KOSPI 200 지수의 비선형동학

강 태훈*

1999 년 4 월

* 계명대학교 정경학부 경제학과 조교수. (대구시 달서구 신당동 1000, 우편번호 704-701)
(전화: 053-580-5046, E-mail: thk@kmucc.keimyung.ac.kr)

Nonlinear Dynamics of the KOSPI 200 Index

Abstract

This paper shows if the KOSPI 200 index, the underlying of the Korean stock index futures and options contracts, has some nolinear dynamic properties which are empirically found in most financial time series. In this paper, are considered the nonlinear dynamic properties such as the conditional heteroskedasticity, asymmetries both in return distribution and in volatility, and discontinuities of the returns. The TAR-M Jump-GQARCH(1,2) model, which combines conditional heteroskedasticity, asymmetries in the first and second moments, and jump properties, fits the data better than any other alternatives considered in this paper. Thus, the KOSPI 200 index like other financial time series data, shows leptokurtosis, time-vaying volatility, leverage effects, asymmetries and jumps in return distributions. The findings of this paper may contribute to the financial asset pricing like option pricing models.

Keywords: KOSPI 200, financial time series, nonlinear dynamics, conditional heteroskedasticity, asymmetries, leverage effect, jump

1. 머리말

새로이 시장에 도래한 정보나 갑작스러운 충격 등에 의해 발생하는 주식시장의 변동은 기껏해야 부분적으로 밖에는 예측하기 어렵다. 그러나 이러한 움직임이 어떻게 왜 발생하는 가를 이해하는 것은 경제학의 여러 영역에서, 그 중에서도 자산가격의 평가를 위해서 뿐 아니라, 자산 시장 특히 옵션시장 참여자에게도 중요하다. 시장 변동성과 강하게 관련된 것으로 보이는 몇 가지 요소[1]로는 첫째, 변동성간의 양의 상관관계가 지적된다. Mandelbrot (1963)이 "시장이 상승하든 하락하든, 큰 변동 뒤에는 큰 변동이 따르는 경향이 있다. 그리고 작은 변동 뒤에는 작은 변동이 따르는 경향이 있다."고 언급한 바와 같이 가격분포의 분산에는 계열상관(serial dependence)이 있다. 둘째, 레버리지 효과를 들 수 있다. Black(1976)은 주가가 하락(상승)할 때 그 수익률의 변동성이 증가(감소)한다고 지적한다. 즉 주가 움직임의 방향과 변동성간의 음의 상관관계가 그것이다. 경험적으로 증시의 폭락은 변동성을 크게 증가시키는 경향이 있다. 그 이유를 레버리지 효과[2]가 부분적으로 설명해 준다. 차입경영을 하는 기업은 그 주가가 하락(상승)할 때 차입율이 더욱 높아(낮아)진다. 이러한 레버리지 효과는 변동성의 비대칭으로 나타난다. 셋째, 몇 가지 시장 이례현상들도 변동성에 영향을 미친다. 예컨대, 정보의 집적이 많은 월요일에는 변동성이 더 커진다는 요일효과, 혹은 1 년을 주기로하는 순환적 계절효과 등이 그것이다.

이러한 점들이 규명되지 않는 한 종래의 블랙-숄즈모형에 의한 옵션프리미엄은 구조적인 오차를 면하기 어렵고 종래의 CAPM 도 타당성이 적어진다. 옵션 대상 상품 가격의 변동성이 확정적이지 않고, 확률적이라는 점에 입각한 확률적 옵션 가격 모형이 제시되었는데, 그 대표적인 것에는 Hull and White (1987), Johnson and Shanno(1987) 등이 있으며, 확률적 변동성과 분포의 비연속성을 동시에 고려한 시도로서 Jorion(1988)이 있다. 조건부 이분산에 의한 변동성 예측에 근거한 GARCH 옵션 모형으로 Myers and Hanson (1993), 확률적 변동성 및 수익분포의 비대칭성도 고려한 Kang and Brorsen (1995), Kang (1998)등이 있다. 이처럼 대상 상품 가격 분포의 동학구조를 이용한 옵션 가격이론의 새로운 시도가 이루어지고 있다.

한국 주가지수 선물과 주가지수옵션의 대상지수인 KOSPI200 의 비선형동학을 가장 잘 설명할 수 있는 시계열 모형들을 분석하는 것은 투자모형의 정밀화를 위해서 필요하다. 주가의 확률과정을 구체화하는 것이 그 동안 금융경제학의 주된 연구분야가 되어 왔는데, 본 논문은 우리 나라 주가지수 선물과 주가지수 옵션의 기초 대상인 KOSPI 200 지수의 비선형동학적인 특징을 규명하고자 하는 것이다. 그리하여 정확한 가격동학을 파악하고 데이터를 가장 잘 설명할 수 있는 모형을 선정하는데 기여하고자 하는 것이다.

---

[1] 이에 대한 정리는 Nelson (1989)참조.

[2] 레버리지 효과에 따르면, 주식가치의 하락은 부채비율(debt-equity ratio)을 높여, 장래의 변동성으로 측정되는 기업의 위험을 증가시킨다. 그 결과, 장래의 변동성은 현재의 주식수익과 역관계에 있게 된다.

2. 연구방법

포트폴리오 이론의 발전과 함께 포트폴리오의 기대수익 뿐 아니라 포트폴리오 수익의 변동성이 크게 주목을 받아 왔다. 금융자산의 포트폴리오가 수익률의 기대평균과 분산의 함수가 되기 때문이다. 자산수요의 변동은 수익률의 기대평균 및 분산의 변동과 연관되어 있다. 이 점이 금융시계열을 분석함에 있어서 분산을 시간과 관계없이 일정한 것으로 가정하는 전통적인 시계열 분석방법 보다는 가변분산을 허용하는 조건부 이분산 모형이 보다 큰 호응을 얻게 하는 이유이다. 이분산성을 무시함으로써 생기는 점근적 효율성의 감소가 적지 않기 때문에, 시간에 따라 변하는 분산구조를 모형화하는 것은 계량경제학적 추론의 측면에서 볼 때 의의가 크다.

그리하여 본 연구는 KOSPI200 의 비선형 동학과정을 분석하기 위해 Engle (1982)에 의해 소개된 이래 지금까지 금융 시계열 분석에 있어서 가장 널리 이용되고 실제로 그 설명력의 우수성을 인정받는 자기회귀 조건부이분산 (autoregressive conditional heteroskedasticity; ARCH) 모형을 분석 기법의 출발점으로 삼았다. 십 수년 전까지만 해도 계량경제학에서는 금융시계열 분석의 초점을 조건부 일차 적률에 두었다. 고차의 적률에서 발견되는 기간간 종속성은 부차적인 것으로 취급되었다. 그런데 현대 경제학 이론에서 고려 대상으로 하는 리스크와 불확실성의 중요성에 대한 인식이 높아지면서 시간에 따라 변하는 분산과 공분산을 모형화하려는 기법을 개발할 필요성이 커졌다. 고차의 적률이 가지는 구조동학적 측면을 고려하는 ARCH 모형은 그래서 중요한 의의를 가진다. ARCH 모형의 주안점은 2 차 혹은 그 이상에서의 조건부와 비조건부 적률의 구별이다.

한편, 통계적 성질이나 계산상의 편리성을 가진 Gaussian 과정은 주가의 변동을 제대로 설명해 주지 못한다. 특히 주가수익분포에서 일반적으로 관측되는 첨도나 왜도는 모분포로서의 Gaussian 분포에서 추출된 표본과 일치하지 않는다. 과도한 첨도 문제와 더불어 표본분포가 두터운 꼬리를 가지는 것을 설명하는 하나의 방법은 정규분포보다 두터운 꼬리를 가지는 조건부 분포를 사용하는 것이다. 그래서 모형에서 과도한 조건부 첨도를 고려할 수 있는 t 분포를 가지는 오차를 가정한다.

변동성 구조에서의 충격에 대한 비대칭적인 반응을 파악하기 위하여 조건부 분산구조를 비선형으로 바꾸거나(Nelson 의 EGARCH) 혹은 시차 오차 제곱항의 증가분과 감소분이 조건부 분산에 미치는 영향을 분리시키는 방식(GQARCH 혹은 GJR 모형)도 고려한다. 기존의 연구는 주로 변동성에서의 오차의 비대칭적인 대응에 초점을 맞추고 있으나, 본 연구에서는 수익분포에서의 비대칭성도 모형화한다 (Kang and Brorsen, 1995).

연속적인 시간경로를 가정하고 있는 Gaussian 과정이나 기본적인 확산과정은 실제 데이터의 특성을 제대로 설명하지 못한다. 효율적이고 동적인 주식시장에는, 매우 짧은 시간에 큰 가격 변화가 일어날 가능성이 있는데, 연속적인 시간경로를 가정하는 모형에서는 그러한 불연속성이 발생할 가능성을 배제하기 때문이다. 그래서 주가의 불연속적 특성과 비대칭성을 동시에 파악할 수 있게 하는 점프확산모형이 관심의 대상이 되어 왔다(Akgiray and Booth, 1986 참조). 본고에서는 점프-확산 모형과 ARCH 류의 모형을 합한 Jump-GARCH 형태의 모

형을 통해 불연속성과 조건부 이분산성을 동시에 고려하는 비선형 동학을 살펴본다. 이 과정은 기본적으로 데이터의 비정규분포적 특성(예컨대, 첨도와 왜도 등)이나 시변분산 및 시계열 종속성과 주가 움직임의 불연속성 등을 포함하고 있다. Jorion (1988)은 점프와 확산과정에 대한 최우추정을 통해 환율과 주가에 체계적인 불연속이 있음을 보였다. 점프의 존재는 정규분포보다 두터운 꼬리를 가진 실제 데이터를 설명해주는 한 요인이 될 수 있을 것이다.

우리 나라에 1996 년과 1997 년에 각기 도입된 주가지수 선물과 주가지수 옵션은 짧은 기간동안 괄목할 성장을 보여 현물주식시장을 능가하는 중요한 투자시장을 형성하고 있다. 주가지수 선물시장의 도입이 국내 주식시장에 미친 파급효과에 관한 연구는 여러 논자에 의해 시도된 바 있다(김인준외 1997; 도명국 1997 등 참조). 우리나라 주가지수선물과 주가지수 옵션의 대상으로서의 KOSPI 200 자체의 동학에 대한 연구로는 김명직, 장국현 (1996)이 있다. 김명직, 장국현(1996)은 다상태 샘플링 기법을 이용하여 1990/1/3 에서 1995/9/4 기간 동안의 KOSPI 주가지수와 KOSPI 200 지수에 대한 확률변동성 모형을 추정하였으며, GARCH 를 고려한 확산-점프 모형과 비교하였다. 양 모형간의 추정결과에는 질적인 차이가 없었으나, 특히 추정된 확산-점프 모형에서 대부분의 점프 파라미터들이 유의적이지 못한 것으로 나타났다. 그러나 Kim and Chang(1996)에서는 KOSPI 및 자본규모에 따른 대·중·소 규모 기업들에 대한 포트폴리오 모두에서 점프 파라미터들이 유의적이어서 김명직, 장국현(1996)의 결과와 상반된다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 3 절에서는 KOSPI 200 지수에 적용할 여러 형태의 조건부 이분산 및 점프와 결합된 모형을 소개한다. 4 절은 분석자료를 검토하고 5 절은 모형의 추정방법에 대하여 설명한다. 그리고 6 절은 모형의 추정결과에 대하여 설명하고 7 절은 모형의 선정과정과 이에 대한 해석을 덧붙인다.

3. 모형설명

3.1 GARCH 모형

Engle(1982)에 의해 소개된 선형 ARCH(q) 모형에서, 주식수익 Y_t는 다음과 같은 확률과정을 따른다.

$$Y_t = f(I_{t-1}; \Theta) + \varepsilon_t, \tag{1}$$

단, $f(I_{t-1};\Theta)$는 t-1 기 까지의 정보를 나타내는 I_{t-1}의 함수임을 나타내고, Θ는 파라미터 벡터이며, ε_t는 다음과 같이 정의되는 이산적 확률과정을 따른다.

즉,
$$\varepsilon_t = \begin{cases} z_t h_t \\ ((\upsilon - 2)/\upsilon) w_t h_t \end{cases} \tag{2}$$

여기서 첫째 줄은 오차항이 정규분포를 따를 경우에 해당되고, 두 번째 줄은 오차항이 자유도 υ인 t 분포를 따를 경우에 해당된다. z_t는 평균이 0 이고 분산이 1 인 i.i.d. 정규분포를 따른다. w_t는 평균이 0 이고 분산이 υ/(υ-2)인 i.i.d t 분포를 따른다.

조건부 분산 h_t^2는 q 개의 과거 오차항 제곱에 대한 선형함수로 가정된다.

$$h_t^2 = \omega + \Sigma_{i=1,q}\alpha_i\varepsilon^2_{t-i}\,, \tag{3}$$

이 모형이 제대로 정의되고 조건부 분산이 양의 값을 가지기 위해서는 $\omega > 0, \alpha_1 \geq 0, \ldots, \alpha_q \geq 0$ 이어야 한다. 이 과정에서 자기회귀 파라미터의 합이 1 보다 작아야만 공분산이 정상성을 가지며, 이를 만족하는 경우 비조건부 분산은 $Var(\varepsilon_t) \equiv h_t^2 = \omega/(1 - \alpha_1 - . . . . - \alpha_q)$가 된다. 이 과정에 따르면 ε_t가 시간에 대해서 종속적이게 된다. 이 과정에서 큰(작은) 절대값 뒤에는 부호에 관계없이 큰(작은) 값이 따른다. 또한 (2)에서의 표준 오차의 분포가 시간에 불변이라 가정되면, ε_t의 비조건부 분포는 z_t의 분포보다 두터운 꼬리를 가지게 될 것이다. ARCH(q)의 경험적 응용에 있어서, 모형에 흔히 많은 수의 과거 오차항과 그에 대한 모수가 포함된다. 이 문제를 비켜가기 위해 Bollerslev(1986)가 GARCH(p,q)를 제안하였다.

$$h_t^2 = \omega + \Sigma_{i=1,q}\alpha_i\varepsilon^2_{t-i} + \Sigma_{j=1,p}\beta_j h^2_{t-j}\,, \tag{4}$$

GARCH(p,q) 모형의 조건부 분산이 잘 정의되기 위해서는 무한차수의 ARCH 모형에 상응하는 계수가 모두 양의 값을 가져야 한다. 예컨대, GARCH(1,1) 모형에서 h_t^2이 양이 될 조건은 $\omega > 0, \alpha_1 \geq 0, \beta_1 \geq 0$ 이다.

3.2 EGARCH 모형

GARCH 모형이 분포의 두터운 꼬리나 변동성 집적현상을 성공적으로 포착하고, 이차적률의 종속성 등을 파악할 수 있으나, 식(4)의 조건부 분산이 오차항의 크기만의 함수이지 그 부호와는 무관하기 때문에 '레버리지 효과'를 파악하기 어렵다. Nelson(1991)의 EGARCH 모형에서는 h_t^2 이 과거 오차항의 크기 및 부호에 의존한다. EGARCH(p,q) 모형의 분산식은,

$$\ln(h_t^2) = \omega + \sum_{i=1,q}\beta_i g(Z_{t-i}) + \sum_{j=1,p}\ln h^2_{t-j}\,,$$

$$g(Z_t) \equiv \eta Z_t + \gamma[\,|Z_t| - E\,|Z_t|\,], \tag{5}$$

$\beta_1 = 1$ 이고, ω는 확정적이거나 혹은 미리 정해진 변수의 함수이다. 이 모델에서는 lnh_t^2가 정규화된 오차항 $\{Z_t\}$의 비선형 변환인 $g(\cdot)$의 시차분포모형과 같아지게 하였다. $g(\cdot)$의 두번째 항에서 $\gamma > 0$ 이면, $|Z_t|$가 예상보다 클(작을) 때 h_t^2 이 증가 (감소)함을 의미한다. 그리고 $\eta < 0$ 이면, h_t^2 은 Z_t가 음수(양수)일 때 더 커지는 경향이 있으므로 변동성의 비대칭적인 반응을 포착할 수 있게 한다.

3.3 GQARCH

변동성의 집적현상을 모형화하기 위하여 GARCH 는 조건부 분산 h_t^2이 오차 제곱의 시차분포와 같게 하였다. 자연스러운 가정으로서 Talyor(1986)와 Schwert(1989)는 조건부 표준편차 h_t를 오차 절대값의 시차분포가 되게 하였다. 즉,

$$h_t = \omega + \Sigma_{i=1,q}\alpha_i|\varepsilon_{t-i}| + \Sigma_{j=1,p}\beta_j h_{t-j} \tag{6}$$

Higgins and Bera(1992)는 GARCH 와 (7)을 비선형 ARCH 모형의 클래스 속에서 포함할 수 있게 하였다.

$$h_t^\gamma = \omega + \Sigma_{i=1,q}\alpha_i|\varepsilon_{t-i}|^\gamma + \Sigma_{j=1,p}\beta_j h^\gamma_{t-j.} \tag{7}$$

(7)이 다음과 같이 조정되면

$$h_t^{\gamma} = \omega + \Sigma_{i=1,q}\alpha_i|\varepsilon_{t-i} - \kappa|^{\gamma} + \Sigma_{j=1,p}\beta_j h^{\gamma}_{t-j.} \quad (8)$$

0 이 아닌 κ에 대하여 h_t^{γ}에 있어서의 오차는 과거 오차의 크기 및 부호에 의해 영향을 받게 됨으로써 주식 변동성의 레버리지 효과를 포착한다. (8) 에서 $\gamma = 2$ 이면 Sentana(1995)의 Generalized Quadratic ARCH (GQARCH)가 된다. 여기서 h_t^2은 과거오차의 이차함수 형태를 가지게 된다. 이 논문에서는 Sentana 의 GQARCH 모형을 추정한다.

3.4 Glosten-Jagannathan-Runkle (GJR) 모형

비대칭 효과를 도입하는 또 하나의 방법으로 다음과 같은 것이 있다.

$$h_t^{\gamma} = \omega + \Sigma_{i=1,q}[\alpha_i^{+}\mathrm{I}\,(\varepsilon_{t-i} > 0)\,|\varepsilon_{t-i}|^{\gamma} + \alpha_i^{-}\mathrm{I}\,(\varepsilon_{t-i} \leq 0)\,|\varepsilon_{t-i}|^{\gamma}] + \Sigma_{j=1,p}\beta_j h^{\gamma}_{t-j.} \quad (9)$$

단 I(·)는 지시함수이다. 예컨대 Zakoian(1990)의 threshold ARCH(TARCH)모형은 (9)에서 $\gamma = 1$ 인 경우이고, Glosten, Jagannathan and Runkle (1993)은 $\gamma = 2$ 인 경우이다. 이를 소위 GJR 모형이라 부르는데, 이는 좋은 뉴스와 나쁜 뉴스에 대해 다른 계수를 가지게 하여 뉴스에 대해 변동성이 이차함수 형태의 반응을 보이도록 한 것이지만, 뉴스가 없을 때에는 최소의 변동성이 초래된다. 이 논문에서는 GJR 모형을 추정하여 다른 모형들과 비교한다.

3.5 확산-점프와 조건부 이분산을 결합한 모형

Y_t를 가격비의 자연대수값 (ln P_t/P_{t-1})이라 하면, 가격이 확산과정 $dP_t/P_t = \alpha dt + \sigma dz_t$ (Wiener 과정)를 따른다는 것은 $Y_t \sim N(\mu,\sigma^2)$, 즉 평균 $\mu \equiv \alpha - \sigma^2/2$ (Ito 의 Lemma) 이고 분산이 σ^2인 정규분포를 따른 다는 것을 시사한다. 즉, 이산적인 시간의 경우,

$$Y_t = \ln (P_t/P_{t-1}) = \mu + \sigma z \quad (10)$$

이다. 그런데 이러한 연속적인 확산과정에 불연속성을 포함시키기 위해 확산과정에 점프과정을 결합시킨 점프-확산 혼합과정을 모형화할 수 있다. 즉,

$$dP_t/P_t = \alpha dt + \sigma dz_t + dq_t \quad (11)$$

Poisson 과정 dq_t는 단위시간당 발생하는 점프의 횟수 λ와 점프의 크기 J 에 의해 특징 지워진다. 점프크기는 로그정규분포 $ln\, J \sim N(\theta, \delta^2)$를 갖는다. 따라서 Y_t는 다음과 같다.

$$\ln(P_t / P_{t-1}) = \mu + \sigma z + \sum\nolimits_{j=1,n_t} J_j \quad (12)$$

단, n_t 는 해당 구간 중에 발생한 실제 점프 횟수이다. 점프-확산 모형에서 $\theta \neq 0$ 이면 분포가 비대칭임을 의미하며, $\lambda > 0$ 이면 분포가 leptokurtic 함을 의미한다(Akgiray and Booth, 1986). 실제 데이터에서 관측되는 leptokurtosis 는 시변 이차 적률을 가진 확산모형에 의해서도 설명될 수 있다. 시변 이차적률 모형이 두터운 꼬리에 대하여 충분히 설명할 수 있는가 여부는 GARCH 와 점프 과정을 결합함으로써 알 수 있을 것이다. 즉, GARCH 모형을 고려한 점프-확산 모형의 평균식은,

$$\ln(P_t / P_{t-1}) = \mu + h_t z + \sum\nolimits_{j=1,n_t} J_j \quad (13)$$

로 나타낼 수 있고, 그 분산식은 일반적인 GARCH 류의 분산식을 적용한다. 이 모형이 (4)의 순수 GARCH 과정을 검증하는 대립 모형으로 이용될 수 있다. 여기에서 평균식에 조건부 표준편차가 포함되어 GARCH-in-Mean 의 형태를 취하게 된다. 기대수익과 분산 또는 공분산 간의 상충관계에 대한 이슈는 재무이론에서의 중요한 관심사이다. 예컨대, Merton (1976)의 기간간 자산가격모형(intertemporal CAPM)에서 시장 포트폴리오에 대한 기대 초과수익은 대표적인 투자자가 로그 효용함수를 가진다는 가정하에서 조건부 분산과 선형관계에 있다. Engle, Lillien, and Robbins(1987)가 개발한 ARCH-M 모형은 이러한 선형관계에 대한 자연스러운 수단을 제공한다.

3.6 수익분포의 비대칭성을 고려한 GARCH(Threshold Autoregressive-in-Mean GARCH or TAR-M GARCH) 모형

일반적인 GARCH 류 모형의 평균식에 과거 수익률을 Tong and Lim(1980)이 제안한 Threshold Autoregressive 형태로 포함시키는 것으로, 수익률 분포의 비대칭을 고려할 수 있게 한다. 그러한 의미에서 이를 Threshold Autoregressive–in-Mean GARCH(이하 TAR-M GARCH)라 부를 수 있다. 이 모형은 Kang and Brorsen(1995)에 의해 소개되어 선물가격에 적용한 결과 평균식에 비대칭성을 고려하지 않은 경우보다 설명력이 높음을 보였다. 이는 GARCH 류 모형의 평균식에 포함되는 과거 수익을 상승분과 하락분으로 나누어 추정함으로써 얻을 수 있다. 즉, 과거 수익률 Y_{t-i}를 다음과 같이 나눈다.

$$YP_{t-i} = \begin{cases} Y_{t-i}, & \text{if } Y_{t-i} > 0, \\ 0, & \text{if } Y_{t-i} \leq 0 \end{cases}$$

$$YN_{t-i} = \begin{cases} Y_{t-i} & \text{if } Y_{t-i} < 0, \\ 0 & \text{if } Y_{t-I} \geq 0 \end{cases}$$

$i = 1, 2, \ldots, m$ 이고, m 은 모형의 추정에서 사용될 수익률의 과거기간의 길이이다. 평균식에서 사용할 과거 수익률의 길이는 Schwarz 의 선별조건에 의해 결정할 수 있다. TAR-M GARCH 모형에서의 평균식은 다음과 같다 :

$$Y_t = \mu + a_i\Sigma_{i=1,m}\, YP_{t-i} + b_i\Sigma_{i=1,m}\, YN_{t-i} + \varepsilon_t\ . \qquad (14)$$

4. 분석자료

1996 년 도입된 주가지수 선물과 1997 년에 도입된 주가지수 옵션의 기초지수인 KOSPI 200 일별지수를 표본 데이터로 한다. 표본의 기간은 KOSPI 200 지수가 산정되는 기점인 1990 년 1 월 3 일부터 1997 년 12 월 27 일까지의 2,346 개 관측치를 사용한다. 이 기간 중 KOSPI 200 지수는 1990 년 1 월 3 일을 100.00 를 시작으로 하여, 1994 년 11 월 9 일 130.12 로 최고를 기록하였고, 1997 년 12 월 24 일 39.08 로 최저였다. 일별 주가지수의 자연대수 차분에 100 을 곱하여 백분율로 표시한 수익을 구하였다. 이들 관측치에 대한 기본통계량이 <표 1>에 있다. 전체 관측치의 경우 분포의 비대칭성을 측정하는 왜도(skewness)와 분포 꼬리의 두

께 및 중심점에서의 첨예도를 측정하는 초과첨도(excess kurtosis)가 각기 0.1435 와 3.6770 이다. 첨도 면에서는 정규분포를 크게 벗어나 있지만, 왜도 면에서는 정규분포의 귀무가설이 기각되지 않았다. 우리 나라가 경제위기에 노출되기 시작하여 주가가 크게 하락하던 시기인 1997 년을 전후로 하여 표본을 나누어 본 결과 1997 년 이전에는 유의적인 수준의 양의 왜도를 보이는 반면, 1997 년 이후에는 유의적인 수준의 음의 왜도를 보인다. 기간별로 정반대의 왜도가 관측되어 전체기간의 왜도 평균치가 작아진 것으로 보인다. 데이터의 정규성을 Kolmogorov-Smirnov 검정법에 의해 검정한 결과, 전체기간과 소 기간들에 있어서 모두 분포의 정규성이 기각되었다.

5. 모형의 추정

최우추정치는 GAUSS 통계 패키지(Aptech, Systems Inc., 1992)를 이용하여 구하였으며, 필요할 경우 파라미터의 지수를 취함으로써 부등제약(inequality restriction)을 두었다. GAUSS 프로그램은 steepest descent 와 Polak-Ribiere-type Conjugate Gradient 로 시작하였고, 다섯 번 반복된 후에는 Davidon-Fletcher-Powell(DFP) 혹은 Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno(BFGS)의 방법과 Brent 방법으로 바꾸었다. 마지막 반복은 Newton method 를 사용함으로써, DFP 나 BFGS 방법에 의한 근사적 헤시안을 사용하기보다는 헤시안이 정보 행렬을 추정하는데 사용되도록 하였다. 모든 미분값은 수치적으로 계산되었다.

GARCH-t 과정과 점프과정을 결합하는 것은 다음과 같은 우도함수를 낳는다 :

$$\ln l = -T\lambda - (T/2)\ln(\pi(v-2)) + T\Gamma((v+1)/2) - T\Gamma(v/2) + \sum_{t=1}^{T} \ln(\sum_{j=0}^{\infty} \lambda^{j} / j!)(h_t^2 + \delta^2 j)^{-1/2}$$

$$[1 + (e_t - \theta j)^2 / (h_t^2 + \delta^2 j)(v-2))]^{-(v+1)/2}) \qquad (15)$$

T 는 관측치의 수이고 $\Gamma(\cdot)$는 감마함수이다. 확산점프 모형, GARCH-normal, GARCH-t 는 각기 (15)에 제약을 둠으로써 얻는다. Akgiray and Booth(1988)는 합계연산자에서의 마지막 항이 충분히 작아질 때까지 계산함으로써 그 무한 합의 근사치를 구한다. 여기서는 다섯 번까지 계산하였다.

6. 모델 추정 결과 (변동성과 수익의 비대칭성 및 불연속성)

본 연구에서는 KOSPI 200 지수의 비선형 동학을 가장 잘 설명하는 모형을 선정하기 위하여 선형 ARCH, 비선형 ARCH, 및 점프-확산 모형을 동시에 고려하였다. 특히 GARCH(<표 2-1>), EGARCH(<표 2-2>), GQARCH(<표 2-3>), GARCH-GJR(<표 2-4>), 및 Jump-GARCH 모형(<표 2-5>) 등을 추정하여 제시하였다. 각 모형들에 대하여 평균 수익률 분포의 비대칭성을 고려하기 위하여 평균식에 Threshold Autoregressive 모형을 적용하였다.

<표 2-1>은 선형 GARCH 모형에 대한 추정결과를 보여준다. GARCH 모형은 분산식에서의 비대칭성을 고려하지 못한다. 그러나 평균식에서의 비대칭성을 고려하는 TAR-M GARCH 모형을 적용한 결과 음의 변화와 양의 변화간에 조정속도에 차이가 있어 수익분포에 비대칭성이 있음을 알 수 있다. 평균식에서의 비대칭성에 대한 검정은 두 가지 방법으로 수행되는데,

그 하나는 식 (14)에서

H$_0$: $\Sigma_{i=1,m} a_i = \Sigma_{i=1,m} b_i$

에 의하여 음의 변화에 대한 총효과와 양의 변화에 대한 총효과를 비교하는 것이고, 다른 하나는 식 (14)에서

H$_0$: 모든 i 에 대하여 $a_i = b_i$

를 비교하여 나쁜 뉴스에 대한 수익변화의 크기와 좋은 뉴스에 대한 수익변화의 크기를 각 시차단계별로 비교하여, 그 반응속도를 측정하는 것이다. 그 반응속도가 다르다면 수익분포는 양의 변화와 음의 변화에 대하여 비대칭적으로 반응하는 것이라 볼 수 있다. 검정결과를 보면, 총효과에서는 양의 변화와 음의 변화가 서로 유의적으로 다르지 않았다. 양의 변화에 대한 반응의 총계와 음의 변화에 대한 반응의 총계는 총합의 개념이므로, 각 시차단계별 반응의 차이를 충분히 반영하지 못한다. 그러나 각 시차 단계별 반응의 차이를 비교하는 반응속도의 차이를 보면, 양의 변화와 음의 변화간에 유의적으로 다름을 볼 수 있다. 이러한 사실에 근거하여 기대할 수 있듯이, 수익분포에 있어서의 비대칭성을 고려하는 TAR-M GARCH 모형의 최우값이 비대칭성을 고려하지 않는 경우보다 더 큰 것으로 나타났다. <표 3-1>에서 GARCH(1,1)과 TAR-M GARCH(1,1)에 대한 검정통계치에 의할 때, TAR-M GARCH(1,1) 모형이 더 나은 모형인 것으로 판명된다.

<표 2-2>는 비선형 ARCH 모형으로서 분산식의 비대칭성을 고려하게 하는 EGARCH 모형에 대한 추정결과를 보여준다. 식 (5)에서 변동성의 비대칭성 여부를 알게 하는 모수 η에 대한 t 값이 표에 있다. η가 유의적으로 0 과 다르고 또한 음의 값을 가지므로 변동성이 비대칭적임을 알 수 있다. 즉 나쁜 뉴스가 도래하여 주가가 하락할 때 변동성이 더욱 커짐을 보여준다. 평균 수익에 있어서의 비대칭성을 고려하는 TAR-M EGARCH 모형은 보통의 EGARCH 모형에 비하여 최우값이 커진다. 그리고 음의 수익과 양의 수익간의 반응속도도 유의적인 차이를 보이고 있다. 결국 KOSPI 200 지수는 변동성에서 뿐 아니라 수익분포에서도 비대칭성을 가지고 있다.

변동성의 비대칭성을 파악하는 다른 방법으로 <표 2-3>에서 GQARCH 모형을 추정한 결과를 볼 수 있다. GQARCH 모형은, Sentana(1995)가 제시한, 다음과 같은 형태로 추정한다. 즉, GQARCH(p,1) 과정은

$$h_t^2 = \omega + \psi\varepsilon_{t-1} + \alpha_1\varepsilon^2_{t-1} + \Sigma_{i=1,p}\, \beta_i h^2_{t-i}, \qquad (16)$$

에 의해, 그리고 GQARCH(1,2) 과정은

$$h_t^2 = \omega + \psi_1\varepsilon_{t-1} + \psi_2\varepsilon_{t-2} + \alpha_1\varepsilon^2_{t-1} + \alpha_2\varepsilon^2_{t-2} + \alpha_3\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-2} + \beta_1 h^2_{t-1}. \qquad (17)$$

에 의해 추정한다. 그리하여 변동성의 비대칭 여부는 GQARCH(p,1)의 경우 (16), (17)에서의 과거오차항의 계수 ψ's 가 음의 값을 가지는가 여부에 따라 결정된다. 추정된 모든 형태의 GQARCH 모형에서 변동성이 비대칭적임을 보이고 있다. 또한 TAR-M GQARCH 모형 역시 모든 경우 수익분포가 비대칭적임을 보이고, 동시에 수익의 비대칭을 고려하지 않은 모형보다 최우값이 상당히 증가하였음을 보여준다.

다음으로 <표 2-4>에 있는 GARCH-GJR 모형도 변동성 뿐 아니라 평균 수익 면에서의 비

대칭성을 동시에 파악하게 하는 모형인데, 이는 Threshold Autoregressive 모형을 분산식과 평균식에 모두 적용하는 것이다. 분산식에의 비대칭성은 GARCH(1,1)-GJR 의 경우 식 (9)에서의 $H_0 : \alpha_1^+ = \alpha_1^-$ 에 대한 F 검정 통계치에 의해 검정되는데, 이 경우 비대칭성의 총효과와 반응속도에 대한 검정 내용이 동일하다. 그리고 GARCH(1,2)-GJR 의 경우 식 (9)에서 $H_0 : \alpha_1^+ + \alpha_2^+ = \alpha_1^- + \alpha_2^-$ 에 대한 F 검정 통계치로서 그 총효과를 검정할 수 있고, 식 (9)에서 $H_0 : \alpha_1^+ = \alpha_1^-$ and $\alpha_2^+ = \alpha_2^-$ 에 대한 결합 F 검정 통계치에 의해 변동성의 좋은 뉴스와 나쁜 뉴스에 대한 반응속도의 차이를 검정할 수 있다. GARCH(1,1)-GJR 의 경우 오차제곱항에 대한 첫번째 시차만 포함되어 변동성의 비대칭성을 고려하기에는 정보가 부족하여 변동성이 대칭적이라는 귀무가설을 기각하지 않았다. 그러나 오차제곱항의 두번째 시차까지 고려한 GARCH(1,2)-GJR 모형의 경우 변동성에서의 총효과 뿐 아니라 반응속도도 좋은 뉴스와 나쁜 뉴스에 대하여 유의적으로 다른 반응을 보이는 것으로 나타났다. 한편 수익분포에서의 비대칭성은 앞의 다른 모형들과 마찬가지로 반응속도 면에서 수익분포의 비대칭성이 파악된다.

마지막으로 조건부 이분산과 분포의 불연속성을 동시에 고려하기 위하여 조건부 이분산 모형과 점프-확산 모형을 결합한 결과가 <표 2-5>에 있다. 우선 점프를 고려한 조건부 이분산 모형에서 모든 경우 점프 파라미터(λ)가 유의적으로 0 과 다르다. KOSPI 200 지수에 있어서도 미국의 주가지수의 경우에서와 마찬가지로 아주 짧은 시간에 주가가 크게 변동하는 불연속적인 특성이 있음을 확인할 수 있다. 이 점은 점프 파라미터의 유의성이 약하다고 보고한 김명직,장국현(1996)의 결과와 상반되나, 동일 저자의 논문 Kim and Chang(1996)에서의 KOSPI 에 대한 점프 파라미터가 유의적이었던 것과는 일치한다. KOSPI 200 지수가 KOSPI 지수와 밀접한 상관관계에 있고, 그 움직임을 복사하기 위한 지수인 만큼 KOSPI 의 결과와 본고에서의 KOSPI 200 의 결과가 일치하는 것은 서로를 확인하여 주는 것이다. 평균적인 점프의 크기를 나타내는 파라미터인 θ의 값이 거의 모든 경우에 있어서 0 과 유의적으로 다름을 알 수 있는데, 이는 앞에서 설명한 바와 같이, 분포의 비대칭성을 말하여 주는 것이기도 하다. 점프와 TAR-M EGARCH 를 결합한 모형, 그리고 점프와 TAR-M GQARCH 를 결합한 모형에서는 분산식에서의 비대칭성을 검정할 수 있는데, 이들 모형에서도 분산식의 비대칭성이 유의적이었다. 또한 평균식에서의 비대칭성도 모두 유의적이다. <표 2-5>에 있는, 점프 효과를 고려한 모형과 점프를 고려하지 않은 상응하는 모형들을 서로 비교하면, 점프를 고려한 모형의 최우값이 더 개선됨을 알 수 있다.

이상의 모델 추정 내용에서 특히 변동성의 비대칭성과 분포의 비대칭성 및 분포의 불연속성 등을 살펴 보았는데, 그 내용을 요약하면 다음과 같다. 첫째, 분산식에 포함되는 변수로는 1 기의 시차를 가진 자기회귀 조건부 분산(p=1)과 2 기 까지의 시차를 가진 오차제곱항을 포함(q=2)하는 것이 가장 높은 최우값을 가지고 있다. 둘째, 레버리지 효과를 측정하는 분산식에서의 비대칭성이 모든 모형에서 유의적인 것으로 나타났다. 셋째, 평균식에서 음의 수익과 양의 수익의 반응이 서로 동일인가 여부를 측정하는 TAR-M 모형에서의 비대칭성 검정 결과, 그 총효과는 유의적으로 다르지 않았으나, 반응속도에서는 모든 경우 유의적으로 다르게 나타났다. 이 점은 평균 수익에서의 비대칭성을 고려하는 모형이 이를 고려하지 않은 모

형보다 항상 높은 최우값을 가진다는 결과에 의해서도 확인된다. 한편 점프-확산과 ARCH 효과를 결합한 모형에서는 점프 파라미터(λ)가 유의적이었으며, 분포의 비대칭성을 나타내는 점프 크기의 평균이 모든 경우에 유의적으로 0 과 다르게 나타나, TAR-M 모형의 결과와 일치한다.

7. 모형의 선정

7.1 일차 및 이차 적률에서의 비대칭성

<표 3-1>과 <표 3-2>는 앞 절에서 추정한 각 유형의 모형 중 데이터에 보다 적합한 모형을 선정하기 위한 가설검정 및 비교기준의 결과를 보여준다. <표 3-1>은 한 모형이 다른 모형의 특수형태로 표시될 수 있는(nested) 모형들간의 비교를 위하여 최우비율 검정(likelihood ratio tests)을 수행한 것이고, <표 3-2>는 서로 상대 모형의 특수형태로 표시될 수 없는 경우(non-nested)에 비교하는데 편리한 기준으로서 Schwarz criterion 을 계산한 것이다. 비선형 동학을 설명하기 위하여 추정된 여러 종류의 모형들 중 KOSPI 200 지수의 시계열을 가장 잘 반영하는 것을 선정함으로써 그 비선형동학적인 특징을 밝히는 것이 본 절의 목적이다.

최우비율검정의 검정통계량은 $2T(L_1 - L_0)$로 계산한다. 여기서 T 는 관측수(=2,346)이고, L_1은 대립가설하에서의 우도함수, L_2는 귀무가설하에서의 우도함수 값이다. 이 통계량은 비교되는 두 모형에서 추정 파라미터 수의 차이를 자유도로 하는 χ^2분포를 따른다. <표 3-1>에서 [1]은 ARCH 모형과 GARCH 모형간의 비교로서 GARCH 모형의 우수성을 보여준다. [2]는 GARCH 모형과 수익의 비대칭을 고려하는 TAR-M GARCH 모형간의 비교로서 TAR-M GARCH 모형이 채택된다. 이는 비대칭성을 고려하지 못하는 GARCH 모형에 Threshold autoregressive 형태의 비대칭 모형을 고려하여 수익분포의 비대칭성을 고려하는 것이 필요함을 말해준다. [3]~[5]는 TAR-M GARCH 모형에서 분산식의 제곱오차항과 자기회귀항의 시차수를 조정하였을 때의 결과에 대한 비교이다. 검정 결과 TAR-M GARCH(1,2) 모형이 다른 모형보다 나은 것으로 채택된다.

[6]은 EGARCH(1,1)과 TAR-M EGARCH(1,1)모형을 비교한 것이다. EGARCH 모형은 변동성의 크기가 좋은 뉴스와 나쁜 뉴스에 대하여 비대칭적으로 반응하는 것을 포착할 수 있는 모형이다. TAR-M EGARCH 모형은 이에 더하여 수익의 비대칭성까지도 포착한다. 양 모형의 검정 결과 변동성에서의 비대칭성만을 포착하는 EGARCH 모형보다는 변동성 뿐 아니라 수익분포의 비대칭성까지 고려하는 TAR-M EGARCH 모형이 설명력이 높음을 알 수 있다. 이는 위에서 단순한 GARCH 모형보다 TAR-M GARCH 모형의 설명력이 높았던 것과 일치한다. TAR-M GARCH 모형과 TAR-M EGARCH 모형은 non-nested 이므로 공식적인 가설검정을 수행할 수 없다. 그래서 <표 3-2>에서의 Schwarz criterion 에서 다른 non-nested 모형들과 함께 한꺼번에 비교하기로 한다.

[7]은 변동성의 비대칭성을 고려하는 다른 형태의 모형으로서 GQARCH 모형 중에서 제곱오차항의 시차가 1 인 경우와 2 인 경우를 비교한 것이다. GQARCH(1,2)모형이 데이터 설명에 더 적합함을 알 수 있다. [8]은 앞에서와 마찬가지로 변동성의 비대칭성을 고려할 수 있

는 GQARCH 모형 중에서도 수익분포의 비대칭을 동시에 고려하는 TAR-M GQARCH 모형을 비교하기 위한 것이다. 이 경우에도 역시 수익분포와 변동성의 비대칭성을 둘 다 고려하는 모형이 변동성의 비대칭성만 고려하는 모형보다 설명력이 높다. [9]는 TAR-M GQARCH 모형들 중 시차구조를 조금씩 변화시켰을 때의 결과를 비교한 것으로 여전히 TAR-M GQARCH (1,2) 모형의 설명력이 높다. [10]은 TAR-M GARCH(1,2) 모형과 TAR-M GQARCH (1,2) 모형을 비교한 것이다. TAR-M GARCH(1,2) 모형은 TAR-M GQARCH(1,2) 모형의 특수형태이므로[3] 공식적인 가설검정이 가능하다. 이 경우 TAR-M GARCH(1,2) 모형보다는 TAR-M GQARCH (1,2) 모형이 설명력이 높다. 전자의 경우 수익분포의 비대칭성은 고려하지만 변동성의 비대칭성은 고려 밖이다. 그러나 후자의 경우 양자를 다 고려하므로 전자보다 설명력이 높으며 그 차이는 통계적으로 유의하다.

[11]과 [12]는 변동성의 비대칭성을 고려하는 또 다른 형태의 모형인 GARCH-GJR 모형 중 설명력이 높은 것을 선정하기 위한 것이다. 이 모형에서도 수익분포의 비대칭성도 고려하는 TAR-M GARCH-GJR(1,2) 모형이 선정되는데, 이 모형을 TAR-M GQARCH(1,2)와 비교하면, TAR-M GQARCH(1,2)가 설명력이 유의적으로 더 높다.

이상의 결과로 볼 때, 조건부 이분산 모형에 불연속성(점프)을 고려하기 전에는 TAR-M GQARCH(1,2) 모형이 데이터를 가장 잘 설명하는 것이라 할 수 있다.

7.2 분포의 불연속성

[14]는 짧은 시간 동안 주가가 큰 폭으로 변하는 분포의 불연속성을 고려하기 위한 점프-확산 모형에 대한 것이다. 이러한 점프-확산 모형에 분포의 비대칭성을 고려한 경우의 차이를 보기 위한 검정이다. 이 경우 단순한 점프-확산 모형보다는 분포의 비대칭성도 고려하는 TAR-M Jump 모형이 상대적으로 설명력이 더 높은 것으로 나타났다. [15]는 점프-확산 모형과 조건부 이분산 모형을 결합한 경우이다. 점프-확산 모형을 GARCH 모형에 결합시킨 것과 점프-확산 모형을 GQARCH 모형에 결합시킨 것을 비교한 결과, TAR-M Jump-GARCH(1,2) 보다는 TAR-M Jump-GQARCH(1,2) 모형의 설명력이 높다. 조건부 이분산에 변동성의 비대칭성과 분포의 비대칭성을 고려하는 모형에 있어서, GARCH 형태보다는 GQARCH 형태가 설명력이 높다는 것을 알 수 있다.

지금까지의 모형 비교는 nested 모형간의 비교로서, 조건부 이분산 모형에서 수익의 비대칭성을 고려하는가 여부와, 변동성의 비대칭성을 고려하는가 여부에 대한 비교가 부분적으로 가능하였으나, 어떤 경우는 모형이 non-nested 되어 직접 공식적인 가설검정이 불가능하므로 Schwarz criterion 을 사용하였다. Schwarz criterion 은 $SC = -2\ln(L) + K\ln(T)$ 값을 최소화시키는 모형을 가장 적합한 모형으로 선정하며, 파라미터의 수는 벌점으로서 작용한다. 단, L 은 모형의 우도함수값이고, K 와 T 는 각기 파라미터의 수와 관측수이다. <표 3-2>에는 각 모형그룹 중 가장 설명력이 높은 것들의 Schwarz criterion 값을 구하여 놓았다. 즉 GARCH 모형

[3] GARCH(1,2) 모형은 <표 2-3> 각주의 GQARCH(1,2) 모형에서 $\psi_1=\psi_2=\alpha_3=0$ 인 경우이다.

에서는 TAR-M GARCH(1,2) 모형, EGARCH 모형에서는 TAR-M EGARCH(1,1), GQARCH 모형에서는 TAR-M GQARCH(1,2) 모형, 그리고 점프와 조건부 이분산을 결합한 모형 중에서는 TAR-M Jump-GARCH(1,2), TAR-M Jump-EGARCH(1,1) 및 TAR-M Jump-GQARCH(1,2) 등을 비교한다.

먼저 단순 점프-확산 모형의 경우 SC 값이 여타 조건부 이분산모형이나 점프와 이분산을 결합한 모형보다 월등히 높다. 조건부 이분산 모형 중 공식적인 가설검정을 할 수 없었던 GARCH 모형과 EGARCH 모형간의 SC 값을 비교한 결과, EGARCH 모형이 GARCH 모형보다도 높은 SC 값을 보여주고 있어 의외이다. 점프를 결합하기 이전의 조건부 이분산 모형에서는 GQARCH(1,2) 모형이 단순 점프 모형이나 GARCH(1,2) 및 EGARCH(1,1) 모형보다 우수하다.

다음으로 점프와 조건부 이분산 모형을 결합한 모형과 점프와 결합하지 않은 조건부 이분산 모형을 비교해 보자. TAR-M GARCH(1,2)와 TAR-M Jump-GARCH(1,2)를 비교해 보면 점프를 결합한 모형이 오히려 더 높은 SC 값을 보이고 있는데, 이는 GARCH 모형에 점프를 결합할 때 증가하는 파라미터의 수에 대한 벌점 효과가 점프를 추가함으로써 개선되는 효과보다 더 크기 때문이다. 그러나 이러한 벌점 효과를 고려하고도, EGARCH 모형이나 GQARCH 모형에서는 점프를 결합함으로써 SC 값이 감소한다.

그런데 조건부 이분산과 점프효과를 결합한 모형 중, TAR-M Jump-GQARCH(1,2)모형이 가장 작은 SC 값을 보여준다. <표 3-1>과 <표 3-2>를 통해서 TAR-M GQARCH(1,2) 모형이 가장 설명력 있는 모형으로 간주된다. 즉 조건부 이분산 모형들 중에서 TAR-M GQARCH(1,2) 모형이 가장 우수하고, 점프와 조건부 이분산 모형을 결합한 모형들 중에서는 TAR-M Jump-GQARCH(1,2)가 가장 우수한데, TAR-M GQARCH(1,2)모형과 TAR-M Jump-GQARCH(1,2) 모형을 비교하면, TAR-M Jump-GQARCH(1,2) 모형이 더 설명력이 높다. 이 모형은 leptokurtosis를 파악하는 조건부 이분산 모형에 일차 및 이차적률의 비대칭성과 분포의 불연속성을 동시에 고려할 수 있는 포괄적인 모형으로서 KOSPI 200 지수 수익의 비선형 동학을 설명하는데 있어서 데이터를 가장 잘 설명하는 것이라 할 수 있다.

7.3 선정된 모형의 해석

<표 4>는 여러 모형 중 데이터에 가장 적합한 것으로 선정된 TAR-M Jump-GQARCH(1,2) 모형의 추정 결과를 보여준다. 수익분포의 비대칭성을 측정하는 파라미터들이 첫번째 시차인 경우(a_1, b_1) 유의성이 약하나, 두번째 시차의 경우(a_2, b_2) 유의성이 있는 것으로 나타난다. KOSPI 200 지수에 근거하여 볼 때, 직전일의 주가 수준보다는 이틀 전의 주가수준이 더 크고 또한 유의적인 영향을 미치고 있음을 말해준다. 또한 주가가 상승하는 경우와 하락하는 경우에 있어서의 영향을 보면, 과거의 주가상승은 현재의 주가에도 일관되게 긍정적인 영향을 미치는 경향이 있는데 반해, 과거의 주가하락은 그 영향력이 시간이 지나면서 달라짐을 알 수 있다. 즉, 직전일의 주가하락은 당일의 주가에 부정적인 영향을 주지만, 이틀전의 주가하락은 당일의 주가에 긍정적인 영향을 주는 경향이 있다. 이러한 경향은 1990년대 이후

주가가 하락하는 기간보다는 상승하는 기간이 상대적으로 더 길었기 때문으로 사료된다.

평균수익과 시변 조건부 분산간의 선형관계를 보여주는 파라미터(ρ)의 추정치는 음의 값을 가지지만, 유의성은 없다. 다시 말해서 변동성의 증가, 즉 리스크의 증가가 평균수익에 부정적인 영향을 미치는 것으로 보이지만 통계적으로 유의적인 수준은 아니다. 그러나 확정적인 기대수익(μ)은 음의 값을 가지며, 통계적으로도 유의적인 수준이다.

점프 요소를 보면 점프확산 모형에 대한 Wald F 검정통계량 ($H_0 : \lambda = \theta = \delta^2 = 0$)이 40.86 으로 기각되므로 데이터에 불연속성이 있다고 할 수 있다[4]. 점프를 고려하지 않은 TAR-M GQARCH(1,2) 모형과 비교해 볼 때, 모형에 잔류하던 확정적 변동성의 크기(ω)와 평균식에서의 평균기대수익(drift term)의 크기(μ)가 점프 항목이 포함된 후 작아졌다[5]. 점프의 집중도 (λ=0.3135)와 데이터의 크기(2,346)에 의거해서 이 모형이 포착한 점프의 회수를 계산해 보면 735 회이다. 매우 빈번한 점프가 있음을 알 수 있다. 실제 데이터에 대하여 평균적인 점프의 크기(θ =1.085%)보다 크게 변한 경우, 즉 일일 변동폭이 1.085%보다 큰 경우가 전체 기간 중 837 회이다. 이 모형에 의해 실제 점프의 88%정도가 포착됨을 알 수 있다. 점프 집중도(λ)와 점프의 평균적인 크기(θ)간에는 음의 상관관계가 있으므로, 점프의 회수가 과소평가된 것으로부터 점프의 평균크기가 약간 과대평가되었음을 알 수 있다.

다음으로 분산식에서의 추정된 파라미터에 대해 보기로 한다. 먼저 GARCH 파라미터를 보면, α_1, α_2, β가 모두 1% 수준에서 유의적이고, 그 합은 0.957 로서 1 보다 작아 데이터에 정상성이 있음을 보여준다. 또한 그 합이 1 과 가깝다는 것은 KOSPI 200 지수의 과거 변동성 변화가 현재의 변동성에 지속적으로 영향을 미침을 말해준다.

변동성의 비대칭성을 고려하기 위하여 GQARCH 모형을 이용하였는데, 비대칭성은 분산식에서 ψ_1, ψ_2 와 관련이 있다. 이 값들이 음의 값을 가지면 변동성과 주가간에 음의 상관관계가 있음을 말해주는 것으로, Black(1976)이나 Christie(1982)가 제기한 레버리지 효과가 존재함을 의미한다. 추정된 파라미터 값들을 보면 둘 다 음의 값을 가지며 ψ_1 은 10% 유의수준에서 ψ_2 는 1% 유의수준에서 각기 0 과 다른 것으로 나타난다. 양자에 대한 결합검증에서도 둘 다 동시에 0 이라는 귀무가설이 기각되었으므로(<표 2-3> 참조), KOSPI 200 지수의 변동성에는 비대칭성이 있다는 것 즉 레버리지 효과가 확인된다. 두 모수의 추정치를 보면 ψ_1 보다는 ψ_2 의 값이 상대적으로 절대값이 더 커서 직전일의 가격하락 보다는 전전일의 가격하락이 변동성 크기에 더 큰 영향을 미치는 것으로 보인다. 이 점은 앞에서 보았듯이, 평균식에서도 직전일의 수익보다는 전전일의 수익이 평균수익에 더 크게 영향을 미치는 것과 일치한다. 한편 직전일의 오차와 전전일의 오차에 대한 곱으로 표시되는 변수의 파라미터 α_3 는 유의

---

[4] $\lambda = 0$ 일 때에는 θ와 δ^2가 확인되지 않는다. 따라서 점프가 없다는 귀무가설 $H_0 : \lambda = \theta = \delta^2 = 0$ 은 $H_0 : \lambda = 0$ 과 같다. 그러나 여기서는 보수적으로 접근하여 점프가 없다는 귀무가설에 대하여 F(3,2346)의 분포를 사용한다. 점프를 포함시키는 것에 대한 타당성은 <표 3-1>의 [16]에서의 최우비율 검정에서도 확인할 수 있다.

[5] TAR-M GQARCH(1,2)에서의 확정적 변동성(ω)과 drift term(μ)은 각기 0.1175 와 –0.0968 이었으나, 점프를 고려한 TAR-M GQARCH(1,2) 모형에서는 각기 0.0828 과 –0.4106 으로 크기가 줄었다. 이 점은 미국 주식시장에 대하여 분석한 Jorion(1988)의 결과와도 일치한다.

적인 양의 값을 가지고 있다. 이는 가격이 연속적으로 같은 방향으로 변할 경우의 가격 조정속도가 그렇지 않은 경우보다 더 빠르다는 것을 의미한다. 예를 들어, 전일의 오차가 –0.2, 전전일의 오차가 –0.3 이고 전일의 조건부 분산 값이 0.8%(연율로 환산하면 0.8% × $296^{1/2}$ = 13.76%)라면, 당일의 조건부 분산은 0.87%(연율로 15.00%)가 된다. 전일의 오차가 0.2 이고 전전일의 오차가 0.3 이며 전일의 분산은 여전히 0.8%라면 당일의 조건부 분산은 0.62%(연율로 10.73%)가 된다. 따라서 주식수익이 하락할수록 조건부 분산값이 커지고 주사수익이 상승할수록 변동성이 작아지는 전형적인 레버리지 현상이 KOSPI 200 지수에서 발견된다.

8. 맺음말

본 논문은 금융시계열 자료가 보이는 특성인 조건부 이분산성, 변동성의 비대칭성, 수익분포의 비대칭성과 불연속성이 우리나라 주가지수 선물과 주가지수 옵션의 기초인 KOSPI 200 지수에서도 관측되는가를 측정하고자 한 것이다. 이러한 특성들을 개별적으로 혹은 서로를 결합하여 적용하여 보았다. 분석의 결과, 이러한 특성들을 모두 결합한 모형이 데이터를 가장 잘 설명하고 있다. 따라서 KOSPI 200 지수는 꼬리가 두터우면서도 비대칭적인 분포를 가지며, 순간적으로 큰 폭의 변화를 겪는 불연속성의 특징을 보일 뿐 아니라, 이차적률인 변동성에 있어서도 좋은 뉴스와 나쁜 뉴스에 대하여 달리 반응하는 변동성의 비대칭성을 보인다고 할 수 있다. 이러한 특성을 고려하지 않은 채 자산가격 모형을 이용하는 경우 체계적인 오류가 발생한다. 따라서 KOSPI 200 에 기초한 자산의 가격 및 변동성의 예측, 그리고 이를 이용한 옵션 가격 산정의 경우, 이러한 제반 비선형동학의 특성을 고려할 필요가 있다. 물론 분석의 대상이 KOSPI 200 지수이므로, 개별 주가나 특정 목적의 포트폴리오의 수익률에 대해서는 별도로 분석할 필요가 있을 것이다.

<표 1> KOSPI 200 지수 수익률의 통계량 [a]

	전체기간	1990.1~1996.12	1997.1~1997.12
표본의 크기	2,346	2,054	292
평균	-0.0366	-0.0188	-0.1619
표준편차	1.4813	1.3124	2.3476
왜도 [b]	0.1435	0.4233*	-0.1218*
첨도 [b]	3.6770*	1.4479*	2.4735*
D-통계치 [c]	0.0627*	0.0526*	0.9367*

[a] 단위는 백분 변화율. $Y_t = [\ \ln(P_t/P_{t-1})\ ]\times100$.

[b] 표본의 왜도는 $\Sigma_{t=1,n}Y_t^3 n(n-1)/(n-2)$, 첨도는 $\Sigma_{t=1,n}Y_t^4 n(n+1)/(n-1)(n-2)(n-3) - 3(n-1)2/(n-2)(n-3)$로 계산하였다. 첨도는 초과첨도(excess kurtosis)이다.

[c] Kolmogorov-Smirnov 의 Goodness-of-fit 통계량. T 개의 관측치에 대한 5% 유의수준에서의 결정값은 $1.36/T^{1/2} = 0.0206$ 이다.

* 는 5% 유의수준에서 귀무가설(정규분포)이 기각됨을 나타낸다. 왜도와 첨도에 대한 검정은 Snedecor and Cochran(1980)에 의거한다.

<표 2-1> KOSPI 200 지수에 대한 GARCH 모형

모형	파라미터의 수	최우값	비대칭성이 없다는 귀무가설에 대한 검정통계량		
			평균식		분산식
			총효과 [a]	반응속도 [b]	
GARCH(0,1)	6	-3954.3	na	Na	na
GARCH(1,1)	7	-3841.8	na	Na	na
TAR-M GARCH(1,1)	9	-3832.7	1.31	9.26**	na
TAR-M GARCH(1,2)	10	-3827.2	1.07	9.80**	na
TAR-M GARCH(2,1)	10	-3832.3	1.31	9.18*	na
TAR-M GARCH(1,3)	11	-3826.5	1.22	9.89**	na

[a] 식 (15)에서 H_0: $\Sigma_{i=1,m}a_i = \Sigma_{i=1,m}b_i$ (이하 <표 2>의 다른 TAR-M 모형에도 동일)

[b] 식 (15)에서 H_0: 모든 i 에 대하여 $a_i = b_i$ (이하 표 2 의 다른 TAR-M 모형에도 동일).

** 1% 유의수준에서 귀무가설 기각.

* 5% 유의수준에서 귀무가설 기각.

<표 2-2> KOSPI 200 지수에 대한 EGARCH 모형

모형	파라미터의 수	최우값	비대칭성이 없다는 귀무가설에 대한 검정통계량		
			평균식		분산식 [a]
			총효과	반응속도	
EGARCH(1,1)	8	-3837.4	na	na	-4.43(0.00)**
TAR-M EGARCH(1,1)	10	-3828.5	0.36(0.55)	9.45(0.00)**	-4.28(0.00)**

[a] 식(6)에서 $H_0 : \eta = 0$ 에 대한 t 검정 통계치(괄호 안의 수치는 p-value).

** 1% 유의수준에서 귀무가설 기각.

<표 2-3> KOSPI 200 지수에 대한 GQARCH 모형 [a]

모형	파라미터의 수	최우값	비대칭성이 없다는 귀무가설에 대한 검정통계량		
			평균식		분산식
			총효과	반응속도	
GQARCH(1,1)	8	-3833.6	na	na	-3.95(0.00)[b**]
TAR-M GQARCH(1,1)	10	-3824.9	1.15(0.28)	8.79(0.00)[*]	-3.84(0.00)[b**]
TAR-M GQARCH(2,1)	11	-3820.1	0.97(0.33)	9.01(0.00)[*]	-3.85(0.00)[b**]
TAR-M GQARCH(1,2)	13	-3812.4	1.10(0.29)	9.35(0.00)[**]	10.18(0.00)[c**]

[a] GQARCH 모형은 Sentana(1991)이 제시한 다음과 같은 형태로 추정하였다:

GQARCH(p,1) 과정은 $h_t^2 = \omega + \psi\varepsilon_{t-1} + \alpha_1\varepsilon^2_{t-1} + \Sigma_{i=1,p}\, \beta_i h^2_{t-i}$,

GQARCH(1,2) 과정은 $h_t^2 = \omega + \psi_1\varepsilon_{t-1} + \psi_2\varepsilon_{t-2} + \alpha_1\varepsilon^2_{t-1} + \alpha_2\varepsilon^2_{t-2} + \alpha_3\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-2} + \beta h^2_{t-1}$.

[b] $H_0 : \psi = 0$ 에 대한 t 검정통계치(괄호 안의 수치는 p-value).

[c] $H_0 : \psi_1 = \psi_2 = 0$ 에 대한 F 검정통계치

[*] 는 5% 유의수준에서 귀무가설 기각.

[**] 는 1% 유의수준에서 귀무가설 기각.

<표 2-4> KOSPI 200 지수에 대한 GARCH-GJR 모형

모형	파라미터의 수	최우값	비대칭성이 없다는 귀무가설에 대한 검정통계량		
			평균식		분산식
			총효과	반응속도	
TAR-M GARCH(1,1)-GJR	10	-3832.3	1.31(0.25)	9.15(0.00)[*]	0.07(0.79)[a]
TAR-M GARCH(1,2)-GJR	12	-3826.8	1.11(0.29)	9.79(0.00)[**]	93.02(0.00)[b**] 107.3(0.00)[c**]

[a] 식 (10)에서 $H_0 : \alpha_1^+ = \alpha_1^-$ 에 대한 F 검정 통계치.

[b] 식 (10)에서 $H_0 : \alpha_1^+ + \alpha_2^+ = \alpha_1^- + \alpha_2^-$ 에 대한 F 검정 통계치.

[c] 식 (10)에서 $H_0 : \alpha_1^+ = \alpha_1^-$ and $\alpha_2^+ = \alpha_2^-$ 에 대한 결합 F 검정 통계치.

[*] 는 5% 유의수준에서 귀무가설 기각.

[**] 는 1% 유의수준에서 귀무가설 기각.

<표 2-5> KOSPI 200 지수에 대한 Jump-GARCH 모형

모형	최우값	불연속성	비대칭성이 없다는 귀무가설에 대한 검정통계량			
			평균식			분산식
			총효과	반응속도	점프평균 [a]	
Jump	-4048.4	-6.04(0.00)[**]	na	na	3.33(0.00)[**]	na
TAR-M Jump	-4042.6	-6.97(0.00)[**]	1.29(0.26)	4.6(0.01)[**]	1.03(0.15)	na
Jump-GARCH(1,1)	-3834.4	-4.09(0.00)*[*]	na	na	2.32(0.01) [**]	na
Jump-EGARCH(1,1)	-3829.5	-5.34(0.00)[**]	na	na	9.23(0.00) [**]	-6.24(0.00)[b**]
TAR-M Jump EGARCH(1,1)	-3811.4	-4.92(0.00)[**]	0.10(0.75)	8.7(0.00)[**]	8.69(0.00) [**]	-6.06(0.00)[b**]
Jump-GARCH(1,2)	-3832.0	-4.90(0.00)[**]	na	na	2.85(0.00) [**]	na
TAR-M Jump-GARCH(1,2)	-3821.7	-7.47(0.00)[**]	0.89(0.35)	9.2(0.00)[**]	5.98(0.00) [**]	na
TAR-M Jump-GQARCH(1,2)	-3797.3	-4.74(0.00)[**]	1.23(0.27)	8.9(0.00)[**]	10.0(0.00) [**]	15.98(0.00)[c**]

[a] 식 (13)에서 $H_0 : \theta = 0$ 에 대한 t 검정통계치(괄호 안의 수치는 p-value).

[b] 식(6)에서 $H_0 : \eta = 0$ 에 대한 t 검정 통계치.

[c] <표 2-3>에서 정의된 $H_0 : \psi_1 = \psi_2 = 0$ 에 대한 F 검정통계치

[d] 식(6)에서 점프 파라미터 λ에 대한 t 검정 통계치.

** 는 1% 유의수준에서 귀무가설 기각.

<표 3-1> 모형간의 비교와 모형선정(Likelihood ratio tests)

번호	가설		검정
	귀무가설	대립가설	통계치 [a]
[1]	GARCH(0,1) = ARCH(1)	GARCH(1,1)	207.0**
[2]	GARCH(1,1)	TAR-M GARCH(1,1)	18.2**
[3]	TAR-M GARCH(1,1)	TAR-M GARCH(1,2)	11.0**
[4]	TAR-M GARCH(2,1)	TAR-M GARCH(1,2)	10.2**
[5]	TAR-M GARCH(1,2)	TAR-M GARCH(1,3)	1.4
[6]	EGARCH(1,1)	TAR-M EGARCH(1,1)	17.8**
[7]	GQARCH(1,1)	GQARCH(1,2)	15.2**
[8]	GQARCH(1,2)	TAR-M GQARCH(1,2)	25.0**
[9]	TAR-M GQARCH(2,1)	TAR-M GQARCH(1,2)	15.4**
[10]	TAR-M GARCH(1,2)	TAR-M GQARCH(1,2)	29.6**
[11]	GARCH(1,1)-GJR	TAR-M GARCH(1,1)-GJR	
[12]	TAR-M GARCH(1,1)-GJR	TAR-M GARCH(1,2)-GJR	11.0**
[13]	TAR-M GARCH(1,2)-GJR	TAR-M GQARCH(1,2)	28.8**
[14]	Jump	TAR-M Jump	11.6**
[15]	TAR-M Jump-GARCH(1,2)	TAR-M Jump-GQARCH(1,2)	48.8**
[16]			

[a] 최우비율 검정통계량은 $2T(L_1 - L_0)$로 계산하였다. 여기서 T(=2,346)는 관측수이고, L_1은 대립가설하에서의 우도함수 값이고, L_2는 귀무가설하에서의 우도함수 값이다. 이 통계량은 두 모형에서의 추정 파라미터의 수의 차를 자유도로 하는 카이제곱분포를 따른다.

** 는 1% 유의수준에서 귀무가설이 기각됨을 의미한다.

<표 3-2> 모델간의 비교와 모형선정(Schwarz Criterion)

	모형	Schwarz Criterion[a]
[1]	TAR-M Jump	8,153.6
[2]	TAR-M GARCH(1,2)	7,730.4
[3]	TAR-M EGARCH(1,1)	7,733.0
[4]	TAR-M GQARCH(1,2)	7,723.7
[5]	TAR-M Jump-GARCH(1,2)	7,742.3
[6]	TAR-M Jump-EGARCH(1,1)	7,721.7
[7]	TAR-M Jump-GQARCH(1,2)	7,716.3

[a] Schwarz criterion 은 $-2\ln(L) + K\ln(T)$에 의해 구한다. 여기서, L 은 추정된 모형의 최우값이고, K 는 모형에서의 추정 파라미터의 수, T(=2,346)는 관측수이다.

<표 4> TAR-M Jump-GQARCH(1,2) 모형 [a] 의 추정결과

파라미터	추정통계치	p-value
loglikelihood	-3797.3	
μ	-0.4106	$(0.00)^{**}$
a_1	0.0500	(0.11)
a_2	0.2089	$(0.00)^{**}$
b_1	0.0540	(0.08)
b_2	-0.2036	$(0.00)^{**}$
ρ	-0.0990	(0.44)
λ	0.3135	$(0.00)^{**}$
θ	1.0851	$(0.00)^{**}$
δ^2	0.67×10^{-5}	(0.44)
ω	0.0828	$(0.00)^{**}$
α_1	0.0865	$(0.00)^{**}$
α_2	0.0805	$(0.01)^{**}$
β_1	0.7900	$(0.00)^{**}$
ψ_1	-0.0678	$(0.00)^{**}$
ψ_2	-0.2212	(0.08)
α_3	0.0958	$(0.00)^{**}$
자유도(υ)	12.71	

[a] 추정된 모형은 다음과 같다.

$$Y_t = \mu + a_i\Sigma_{i=1,m}\, YP_{t-i} + b_i\Sigma_{i=1,m}\, YN_{t-i} + \rho h_t z_t + \Sigma_{j=1,nt}\, J_t + \varepsilon_t \,.$$

$\varepsilon_t = ((\upsilon\text{-}2)/\upsilon)w_t h_t$, w_t는 평균이 0 이고 분산이 $\upsilon/(\upsilon\text{-}2)$인 i.i.d. t 분포를 따른다.

$$n_t \sim e^{-\lambda}\lambda^j/j!\,, \quad \ln J_t \sim N(\theta, \delta^2),$$

$$h_t^2 = \omega + \psi_1\varepsilon_{t-1} + \psi_2\varepsilon_{t-2} + \alpha_1\varepsilon^2_{t-1} + \alpha_2\varepsilon^2_{t-2} + \alpha_3\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-2} + \beta h^2_{t-1}.$$

* 는 1% 유의수준에서 귀무가설이 기각됨을 의미한다.

** 는 5% 유의수준에서 귀무가설이 기각됨을 의미한다.

참고문헌

김명직, 장국현, "KOSPI 200 지수의 확률변동성 측정방법," □□□究, □ 4 □, 1996, 131-153.

김인준, 김동석, 박건엽, "주가지수선물거래 도입이 주식시장 분산성에 미치는 영향: 한국에서의 실증연구," □□□究, □ 5 □, 1997, 59-84.

도명국, "선물시장의 정보전달 메커니즘과 효율성에 관한 실증연구," 주식, 한국증권거래소, 1997.1, 7-39.

Akgiray V., and G. Booth, "Mixed Diffusion-Jump Process Modeling of Exchange Rate Movements," *Review of Economics and Statistics*, 1988, 70, 631-37.

Akgiray V., and G. Booth, "Stock Price Processes with Discontinuous Time Paths: An Empirical Examination," *The Financial Review*, 21, 1986, 163-184.

Aptech Systems, Inc., *GAUSS 3.0 Applications, Maximum Likelihood*. Maple Valley, WA, 1992.

Ball, C.A. and W.N. Torous, "On Jumps in Common Stock Prices and Their Impact on Call Option Pricing," *Journal of Finance*, 1985, 40, 155-73.

Black, F. and M. Scholes, "The Valuation of Option Contracts and a Test of Market Efficiency," *Journal of Finance*, 1972, 27, 399-417.

Blck, F., "Studies in Stock Price Volatility Changes," *Proceedings of the 1976 Business Meeting of the Business and Economics Statistics Section*, American Statistical Association, 177-181.

Bollerslev, T. "Generalized Autoregressive Conditoinal Heteroskedasticity," *Jorunal of Econometrics*, 1986, 31, 307-27.

Engle, R. , "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of U.K. Inflation," *Econometrica*, 1982, 987-1008.

Engle, R., D. Lillien, and R. Robins, "Estimating Time Varying Risk Premia in the Term Structure: The ARCH-M Model," *Econometrica*, 55, 391-407.

Glosten, L., R. Jagannathan, and D. Runkle, "On the Relation Between the Expected Value and the Volatility of Nominal Excess Return on Stocks," *Journal of Finance*, 1993,46, 1779-1801.

Higgins, M. and A. Bera, "A Class of Nonlinear ARCH Models," International Economic Review, 33, 1992, 137-158.

Hull, J. and A. White, "The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities," *Journal of Finance*, 62, 1987, 281-300.

Johnson, H. and D. Shanno, "Option Pricing When the Variance is Changing," *Journal of Financial and Quantitative Analysis, 22*, 1987, 143-151.

Jorion, P. "On Jump Processes in the Foreign Exchange and Stock Markets,", *Review of Financial Studies*, 1988, 1, 427-45.

Kang, T. and B. W. Brorsen, "Conditional Heteroskedasticity, Asymmetry, and Option Pricing," *Journal of Futures Markets*, 1995, 15, pp.902-928.

Kang, T., "EGARCH Option Pricing Model with Asymmetries in the Mean Equation," *Korean Economic*

Review, 1998, 14-1, pp.79-98.

Kim, M. and K. Chang, “Volatility and Jump Risk in Korean Financial Markets,” *Journal of Economic Research*, 1, 1996, 349-368.

Mandelbrot, B., “The Variation of Certain Speculative Prices”, *Journal of Business*, 1963, pp. 394-419.

Merton, R., “An Intertemporal Capital Asset Pricing Model,” *Econometrica*, 41, 1973, 867-887.

Myers R. J. and S. D. Hanson, “Pricing Commodity Options When the Underlying Futures Price Exhibits Timy-Varying Volatility,” *American Journal of Agricultural Economics*, 75, 1993, 121-130.

Nelson, D., “Modeling Stock Market Volatility Changes,” *ASA 1989 Proceedings of the Business and Economics and Statistics Section*, 93-98.

Nelson, D., "Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach," *Econometrica*, 1991, 59, 347-70.

Santana, E., "Quadaratic ARCH models," *Review of Economic Studies*, 1995, 62, 639-61.

Scheinkman, J. A. and B. LeBaron, "Nonlinear Dynamics and Stock Returns," *Journal of Business*, 1989, 62, 311-37.

Schwert, G.W., “Why Does Stock Market Volatility Change Over Time,” *Journal of Finance*, 44, 1989a, 1115-1153.

Snedecor, G., and W. Cochran, *Statistical Methods*. Ames, Iowa: Iowa State University Press, 1980.

Tong, H., and K. Lim, “Threshold Autoregressive, Limt Cycles and Cyclical Data,” *Journal of Royal Statistical Society Series B*, 42-3, 1980, 245-292.

Taylor, S., *Modeling Financial Time Series*, Wiley and Sons: New York, NY., 1986.

Zakoian, J., “Threshold Heteroskedastic Models,” Unpublished Manuscript, INSEE, 1990.