추계적 이자율하에서의 복합옵션 평가모형과 응용

1999년 11월

김인준　류정호

한국과학기술원(KAIST)

<요약>

이 논문에서는 주식의 수익률 대신 초과수익률에 초점을 맞추어 추계적 이자율 하에서 유럽형 옵션 평가 모형을 무위험 단위할인채권과 교환옵션(Excahnge Option) 사이의 관계를 이용하여 유도하고, 복합옵션의 평가에서 위 방법들이 어떻게 사용되는지를 보여준다. 추계적 이자율 하에서 복합옵션의 평가모형은 이자율의 기간구조를 반영할 수 있다. 이 평가방법을 이용하여 배당이 있을 주식에 대한 미국형 콜옵션 가격을 결정할 수 있다. 이 모형을 이용하면 이자율의 불확실성이 옵션가격결정에 어떤 영향을 줄 수 있는지를 추정하여 볼 수 있다.

Ⅰ. 서론

Black과 Scholes(1973)의 유럽형 옵션 평가모형 이후 여러 학자들이 이자율에 관한 가정을 완화시킨 모형을 발전시켰다. Merton(1973)이 무위험 단위할인채권에 대한 추계적 과정을 가정한 후 이를 고려한 모형을 개발하였다. Merton의 옵션 평가식에서는 이자율이 직접 표현되지 않고 무위험 단위할인채권의 가격을 통하여 간접적으로 표현되었으며 무위험 단위할인채권의 변화에 대한 확률과정에서 채권수익률의 순간적 표준편차가 주식수익률의 순간적 표준편차와 함께 중요한 역할을 한다. 그후에도 Brenner, Courtadon과 Subrahmanyam(1987), Rabinovitch(1989) 그리고 Kim(1992) 등이 이자율에 관한 추계적 과정을 포함하는 모형을 유도하였다.

특히 Kim(1992)은 이들 모형역시 이자율 또는 무위험 단위할인채권 가치의 움직임을 지배하는 추계적 과정에 대하여 제한적인 가정을 포함하고 있다고 지적하였다. 그는 Merton의 접근법을 보다 일반화하여 이자율 또는 무위험 단위할인채권 가치의 변화에 대한 제한적 가정이 없이 추계적 이자율하에서의 주식옵션에 대한 평가식을 단순접근법을 이용하여 유도하였다. 추계적 이자율하에서의 옵션 평가를 위해 주식수익률과 채권수익률의 차이, 즉 초과수익률에 초점을 맞추어 논의를 진행하였기 때문에 주식수익률과 채권수익률 사이의 관계에 대하여 미리 제한적일 필요가 없었다. 옵션 평가에 있어 초과주식수익률의 순간적 표준편차가 중요한 변수가 됨을 보여 주었다. 이자율에 대하여 제한적인 가정이 없기 때문에 이자율의 불확실성과 기간 구조로 인한 어려움을 어느 정도 해결해 줄 수 있다.

따라서 이자율의 기간 구조가 반영되어야 하는 복합옵션(compound option)과 미국형 옵션의 평가에 위 방법이 유용하게 사용될 수 있을 것이다. 이 논문에서는 추계적 이자율로 특정지어지는 상황하에서 무위험 단위할인채권을 이용하여 유럽형 옵션평가식을 다시 살펴보고 복합옵션의 평가식을 찾아보았다. 또한 이를 이용하여 배당이 있을 주식에 대한 미국형 콜옵션의 가치가 어떻게 나타나는지 찾아보고 기존의 연구와 비교해 보았다. 결국 초과주식수익률을 이용한 평가 방법은 복합옵션의 평가에 이자율의 기간구조의 특성이 전달되는 것을 볼 수 있고 미국형 옵션에서도 비슷한 형태가 나타나리라고 추정된다.

다음 절에서 먼저 추계적 이자율하에서는 유럽형 옵션이 어떻게 유도되는지를 살펴보고 이 방법을 이용하여 추계적 이자율하에서 복합옵션 평가모형을 유도한다. 그리고 배당이 있을 주식에 대한 미국형 콜옵션의 유도과정을 다시 살펴본 뒤 추계적 이자율의 가정하에서 앞 절의 결과들을 이용하여 평가모형을 찾아보겠다.

Ⅱ. 추계적 이자율하의 옵션 평가모형

1. 유럽형 옵션

먼저, 유럽형 옵션의 경우에 있어서 전통적인 Black-Scholes 모형과 Kim의 모형의 특성을 비교하여 살펴보자. Black-Scholes의 모형은 주식(S)의 수익률에 대한 다음의 확률과정을 가정한다.

$$\frac{dS}{S} = \mu\, dt + \sigma\, dW \qquad (1)$$

여기서 μ와 σ는 주식의 순간적 기대 수익률과 주식 수익률의 순간적 표준편차이며, dW 는 표준 Winner 과정이다. 이와 더불어 주된 가정중 하나는 이자율(r)이 상수로 일정하다는 것이다. 이들 가정으로부터 행사가격이 K이고 만기까지 τ시간이 남은 유럽형 콜옵션의 가치는 다음과 같이 계산된다.

$$C(S, K; \tau) = SN(d_1) - Ke^{-r\tau}N(d_2) \qquad (2)$$

$$d_1 = \frac{\ln(S/Ke^{-r\tau}) + \sigma^2\tau/2}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$$

여기서 보는 것과 마찬가지로 옵션의 평가에 주식 수익률의 표준편차와 이자율이 큰 영향을 미친다. 만기가 작다면 이자율의 부적절성이 옵션 평가에 크게 오차를 주지 않을 수도 있지만 만기가 클 경우에는 이자율과 주식 수익률의 표준편차가 큰 오차를 유도할 수도 있다. 실제적으로 이자율이 기간 구조를 갖는 상황에서 옵션 평가에 사용 될 특정 이자율을 선택하는데 있어 어려움이 있을 것이고 또 주식 수익률의 표준 편차를 측정하는 것에도 영향을 줄 것이다. 그래서 이자율과 표준편차는 옵션 평가에 올바른 정보를 제공하지 못 할 수도 있다.

한편 Kim(1992)은 무위험 단위할인채권과 초과 수익률에 대한 가정으로부터 옵션평가모형을 제시하였다. 채권의 만기 시각 T에서 $1이 지급되는 무위험 단위할인채권의 시각 t 에서의 가격을 B(τ=T-t)로 표시하고 B(τ)의 변화는 확산과정을 따른다고 가정한다. 옵션만기시까지 어떠한 배당도 하지 않는 주식(S)에 대하여 무위험 단위할인채권을 기본단위(numeraire)로 표시한 주식의 가격을 $P = S/B(\tau)$ 로 정의하자. 변수 P는 주식과 무위험 단위할인채권의 가격을 관찰함으로서 계산될 수 있으며 P에대한 추계적 과정은 다음과 같은 확산 과정으로 가정하자.

$$\frac{dP}{P} = \mu(P,\tau)\ dt + \sigma(\tau)\ dZ \qquad (3)$$

여기서 μ(P,τ)와 σ(τ)는 주식의 순간적 기대 초과수익률과 초과주식수익률의 순간편차이며, dZ는 표준 Winner 과정이다. dP/P는 주식수익률과 무위험 단위할인채권의 수익률 차이, 즉 초과 수익률(excess rate of return)로 설명된다. 특히 초과수익률의 순간적 표준편차는 만기까지의 시간에만 의존하는 확정적(deterministic)함수라고 가정한다.[1] 만약에 무위험 단위할인채권에 대한 확산과정이 구체적으로 명시된다면 주식에 대한 확률과정은 암묵적으로 표현될 수 있다.[2]

Kim의 옵션 평가모형을 유도하기 위하여 먼저 이자율이 0으로 설명되는 상황에서의 옵션 평가식을 찾아 보겠다.

<*전제1*> 기초자산의 현재 시점 t 에서의 가격이 S이고 이자율은 0인 상황에서, 만기시점이 T(τ=T-t)이고 행사가격이 K인 유럽형 콜옵션의 가치 C는 S에 대한 확률과정이 $dS/S = \mu(S,\tau)dt + \sigma(\tau)dW$ 라 할 때 다음과 같다.

$$C(S,K;\tau) = SN(d_1) - KN(d_2) \qquad (4)$$

$$d_1 = \frac{\ln S/K + \Theta/2}{\sqrt{\Theta}}$$

$$d_2 = d_1 - \sqrt{\Theta}$$

$$\Theta = \int_0^{\tau} \sigma^2(s)\ ds$$

증명) 부록1 참조

위 결과를 이용하여 Kim(1992)의 모형을 유도해 보자. 무위험 단위할인채권(B)을 매개로 하여 일반 유럽형 콜옵션과 교환옵션(exchange option) 사이의 관계를 이용하면

$$C(S,K\ ;\tau) = E(S, KB(\tau)\ ;\tau) \qquad (5)$$

여기서 $E(x, y; \tau)$는 만기에 y자산으로 x자산을 바꿀 수 있는 권리를 나타내는 교환옵션의 가치이다. 위 식은 유럽형 콜옵션이 무위험 단위할인채권을 매개로 하여 교환옵션으로

1) 또한 복합옵션의 평가에서 σ(τ)는 기본단위로 사용되는 무위험 단위할인채권의 종류(만기)와 상관없이 결정되는 함수라고 가정한다. 즉, $\sigma(\tau)=\sigma_1(\tau)=\sigma_2(\tau)$.

2) S = P·B 이고 dS/S = dP/P + dB/B + dP/P·dB/B 이므로 dS/S는 dP/P와 dB/B로 표현된다. 반대로 dS/S와 dB/B의 확률과정들이 주어져 있다면 dP/P에 대한 확률과정을 유추할 수 있다.

나타내어질 수 있음을 의미한다. 또 옵션가치는 기초자산과 행사가격에 대하여 1차 동형(Homogeneous degree 1) 이므로 식 (5)를 무위험 단위할인채권(B)를 기본 단위로 나누면

$$\begin{aligned}\frac{C(S, K\,;\tau)}{B} &= \frac{E(S, KB\,;\tau)}{B} \\ &= E\left(\frac{S}{B}, K\,;\tau\right) \\ &= V(P, K\,;\tau)\end{aligned}$$

V는 이자율이 0인 상황에서의 유럽형 콜옵션의 가치를 나타내는데, 위에서 교환옵션이 무위험 단위할인채권을 기본 단위(numeraire)로 하여 표현될때는 이자율이 0이 되므로 이와 같이 표현된다.[3)]

V는 <전제 1>에서의 공식으로 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}V(P, K;\tau) &= PN(d_1) - K\,N(d_2) \\ d_1 &= \frac{\ln P/K + \Theta/2}{\sqrt{\Theta}}\ , \\ d_2 &= d_1 - \sqrt{\Theta}\ , \\ \Theta &= \int_0^{\tau} \sigma^2(s)\,ds \qquad \text{이다.}\end{aligned}$$

또 C = BV이고 P=S/B이므로 이를 대입하여 계산하면 Kim(1992) 모형을 다시 유도 할 수 있다.

[*Kim*(1992) 옵션 평가 모형]

$$\begin{aligned}C(S, K;\tau) &= BPN(d_1) - BK\,N(d_2) \\ &= SN(d_1) - BK\,N(d_2) \qquad (6)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d_1 &= \frac{\ln(S/BK) + \Theta/2}{\sqrt{\Theta}} \\ d_2 &= d_1 - \sqrt{\Theta}\ .\end{aligned}$$

표면적으로는 식(6)이 Merton 모형과 비슷하지만, σ(τ)의 결정과 무위험 단위할인채권의 확산 모형 가정에서 차이가 있다. σ가 주식수익률 그자체가 아닌 초과 주식 수익률의 순간적 표준편차를 나타냄을 주지할 필요가 있으며 $B(\tau) = e^{-r\tau}$ 로 표현되는 경우에도 Merton 모형 및 Black-Scholes 모형과는 그 해석에 있어서 차이가 있다.[4)] 위 식에서 보는

3) 이에 관한 자세한 설명은 Margrabe(1978)를 참조

4) Kim(1992)의 논문에서 그 차이점을 기술하고 있다. Kim 논문 29 - 31 페이지 참조

바와 같이 식(6)을 평가하는데 있어 관심을 기울어야 할 것은 σ(τ)의 결정이다. 주식 초과 수익률의 순간적 표준편차의 결정이 옵션 평가에 중요한 영향을 준다. 그렇지만 Black-Scholes 의 모형을 이용하기 위해서 이자율과 주식수익률의 순간적 표준편차를 모두 결정하여야 하는 것에 비해서 상대적으로 추정 변수가 하나 밖이라는 점이 경우에 따라서는 유용할 수도 있을 것이다.

2. 복합옵션

이제 추계적 이자율 하에서의 복합옵션(compound option)의 가치평가 모형을 유도해 보자. 앞에서의 가정을 포함하여 기초자산 S에 대한 유럽형 콜옵션의 만기 시점을 T_2 라 하고 이 옵션에 대한 유럽형 콜옵션의 만기 시점은 T_1 ($T_1 < T_2$) 이라 하자. 또한 T_1 과 T_2 시점에서 만기가 되는 무위험 단위 할인채권의 가격을 각각 B_1 과 B_2, 또 만기시점에서의 행사가격은 각각 K_1, K_2 라 하자.

유럽형 콜옵션에 대한 유럽형 콜 복합옵션의 가치는

$$\begin{aligned} D(S, K_1, K_2, T_1, T_2) &= C(\,C(S, K_2;\, T_2 - t), K_1;\, T_1 - t\,) \\ &= E(\,C(S, K_2;\, T_2 - t), B_1 K_1;\, T_1 - t\,) \end{aligned}$$

B_1을 기본단위로 사용하기 위해 양변을 B_1로 나누면

$$\begin{aligned} \frac{D}{B_1} &= E[\,E(S, B_2 K_2;\, T_2 - t)/B_1, K_1;\, T_1 - t\,)] \\ &= E[\,R(S/B_1, (B_2/B_1) K_2;\, T_2 - t), K_1;\, T_1 - t\,)] \\ &= E[\,R(P, mK_2;\, T_2 - t), K_1;\, T_1 - t\,)] \end{aligned}$$

여기서 $P = S/B_1$ 이고 이에 관한 확률과정을 앞에서와 같이 $dP/P = \mu(P, \tau)\, dt + \sigma(\tau)\, dW$ 라 하자. ($\tau = T_1 - t$) R는 이자율이 0인 상황에서의 유럽형 콜옵션의 가치이고 $m \equiv B_2/B_1$ 이다. 또 m을 상수로 보고 옵션 가치를 평가하여도 그 값은 변하지 않는다. [5]

---

5) 예를 들어, $E(S/B_1, (B_2/B_1)K_2, T_2) = E(S, B_2K_2, T_2)/B_1$

$= C(S, K_2, T_2)/B_1$ 이다.

그리고 추계적 이자율하에서 옵션평가 모형을 이용하여 계산해 보면 $C(S, K_2, T_2)/B_1$ 의 값과 $E(S/B_1, mK_2, T_2)$ 의 값이 같음을 알 수 있고 이것은 다시 $E(S/B_1, (B_2/B_1)K_2, T_2)$ 와 $E(S/B_1, mK_2, T_2)$가 같다는 것이므로 $B_2/B_1 = m$(상수)으로 계산할 수 있음을 뜻한다.

다시 $G \equiv D/B_1$ 이라 두면 $G = G(P, \tau)$ 이다. < 부록1 > 에서와 같이 Merton의 무위험 포토폴리오 복제 방법을 사용하면 다음과 같은 편미분 방정식을 얻는다.

$$G_\tau \;=\; \frac{1}{2} G_{PP} P^2 \sigma^2$$

만기시 조건과 $G(P, 0)$ 의 값으로부터 다음의 결과를 얻을 수 있다.

[정리 1 - 추계적 이자율하에서의 복합옵션]

유럽형 콜옵션에 대한 유럽형 복합옵션의 가치는

$$\begin{aligned} D(S, K_1, K_2, T_1, T_2) \;&=\; C(\,C(S, K_2\,,\, T_2), K_1\,,\, T_1\,) \\ &= S\,M\left(x, y; \sqrt{\frac{u}{u+u'}}\right) \\ &\quad - B_2 K_2 M\left(x-\sqrt{u},\, y-\sqrt{u+u'}\,; \sqrt{\frac{u}{u+u'}}\right) \\ &\quad - B_1 K_1 N(x-\sqrt{u}) \end{aligned}$$

여기서 M은 이변량 표준 정규분포값이고

$$\begin{aligned} x \;&=\; \frac{\ln\ (S/B_1 F) \;+\; u/2}{\sqrt{u}}\,, \\ y \;&=\; \frac{\ln(\ S/\,B_2 K_2) \;+\; (u+u')/2}{\sqrt{u+u'}}\,, \\ u \;&=\; \int_0^{T_1 - t} \sigma^2(s)\; ds\,, \\ u' \;&=\; \int_0^{T_2 - T_1} \sigma^2(s)\, ds\,. \end{aligned}$$

위에서 F는 $C_{T_1}(F, K_2; T_2 - T_1) = K_1$을 만족하는 해이다.

위 식과 Geske(1979b)의 복합옵션과 큰 차이는 초과 주식수익률의 순간 표준편차의 결정에 있다. 만약 $\sigma(\tau) = \sigma$ 상수로 일정하다면 위 식은

$$\begin{aligned} D(S, K_1, K_2, T_1, T_2) \;&=\; S\,M\left(x', y'; \sqrt{\frac{\tau_1}{\tau_2}}\right) \\ &\quad - B_2 K_2 M\left(x' - \sigma\sqrt{\tau_1},\, y' - \sigma\sqrt{\tau_2}; \sqrt{\frac{\tau_1}{\tau_2}}\right) \\ &\quad - B_1 K_1 N(x' - \sigma\sqrt{\tau_1}) \end{aligned}$$

가 된다. 여기서

$$x' = \frac{\ln\dfrac{S}{B_1F} + \dfrac{\sigma^2\tau_1}{2}}{\sigma\sqrt{\tau_1}},$$

$$y' = \frac{\ln\dfrac{S}{B_2K_2} + \dfrac{\sigma^2\tau_2}{2}}{\sigma\sqrt{\tau_2}}$$

이다. 또한 이자율 역시 일정하다는 가정이 있다면 위 모형은 다시 Geske(1979b) 모형과 유사한 형식을 취한다. 그러나 σ의 의미에 있어서 차이가 있다.

Ⅲ. 모형의 응용

1. RGW 모형

Roll, Geske 과 Whaley(RGW)는 복합옵션 평가모형을 이용하여 배당이 있는 경우의 미국형 콜옵션 평가모형을 개발하였다. Merton(1973)의 지적대로 배당이 없는 경우에 있어서 유럽형 콜옵션과 미국형 콜옵션의 가치는 동일하다. 그러나, 배당이 있는 주식에 대한 미국형 콜옵션의 가치는 유럽형 콜옵션의 가치와 다르다. Roll(1977)은 만기이전에 배당이 알려져 있을 경우 미국형 콜옵션의 평가 모형을 제시하였고 이것은 연속시간의 가정과 폐형해(closed form solution)를 구할 수 있다는 점에서 이항 옵션 모형(binomial option model)을 이용한 미국형 콜옵션의 수치해법적 방법보다 진일보 한 것이다. Geske(1979)는 이 모형을 보다 단순화 시켰으며 Whaley(1981)는 이 모형들에서 미진한 부분들을 수정하였다.

RGW 모형을 살펴보면, 먼저 미국형 옵션의 행사가격을 K, 만기를 T_2, 배당이 있는 시점을 T_1($T_1 < T_2$)이라 하자. 배당을 D라 하고 이 배당부분을 제외한 주식의 순가치를 S라 하자. 그러면 현재 주가 P와 S사이에는 $P_t = S_t + De^{-r(T_1-t)}$의 관계가 성립한다.

배당일(T_1)에 배당직전(T_1^-)의 이 미국형 콜옵션의 가치는 주식의 가격(S_{T_1})이 어느 특정값보다 크나 작으냐에 따라서 달라진다. 미국형 콜옵션의 행사여부가 결정되는 주식의 가치를 S^*라 하면 $S_{T_1} \geq S^*$일 경우에는 배당후 즉시 옵션을 행사하면 그 가치는 $S_{T_1}+D-K$ 가 되고 $S_{T_1} < S^*$일 경우에는 행사를 하지 않으므로 $C_{T_1}(S_{T_1}, K, T_2)$가 된다.

즉,
$$C_{T^-} = \begin{cases} S_{T_1} + D - K & \text{if } S_{T_1} \geq S^* \\ C_{T_1}(S_{T_1}, K, T_2) & \text{if } S_{T_1} < S^* \end{cases}$$

이고 옵션의 행사여부가 결정되는 S^*는 $C_{T_1}(S^*, K\ ; T_2 - T_1) = S^* + D - K$의 해이다.

Roll(1977)은 위와 같은 이익구조를 갖는 포트폴리오를 다음과 같이 구성하였다.

P1. 만기가 T_2이고 행사가격이 K인 유럽형 콜옵션(이를 C_1이라 하자)

P2. 만기가 $T_1 - \varepsilon\ (\varepsilon > 0, \varepsilon \simeq 0)$이고 행사가격이 S^*인 유럽형 콜옵션(이를 C_2라 하자)

P3. P1에 대한 만기가 $T_1 - \varepsilon$이고 행사가격이 $S^* + D - K$인 유럽형 콜옵션, 즉 복합옵션(이를 C_3라 하자)

먼저 이자율(r)이 일정하고 주식에 관한 확률과정이 $dS/S = \mu dt + \delta dW$ 일 때 Black-Scholes 모형과 Geske(1979)의 복합옵션 평가모형을 사용하여 위 포트폴리오를 평가하여 보자.

원래옵션은 C_1, C_2의 매수 포지션과 C_3의 매도 포지션으로 복제가 가능하며 배당이 있는 주식의 미국형 콜옵션의 가치 C는 다음과 같이 나타내어 질 수 있다.

Black-Scholes 모형으로부터 C_1의 값은

$$C_1 = S\,N(a_1) - Ke^{-r\tau_2}N(a_2)$$

$$a_1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \delta^2/2)\tau_2}{\delta\sqrt{\tau_2}}$$

$$a_2 = a_1 - \delta\sqrt{\tau_2}$$

$$\tau_2 = T_2 - t$$

이고 C_2의 값은

$$C_2 = S\,N(b_1) - S^* e^{-r\tau_1}N(b_2)$$

$$b_1 = \frac{\ln(S/S^*) + (r + \delta^2/2)\tau_1}{\delta\sqrt{\tau_1}}$$

$$b_2 = b_1 - \delta\sqrt{\tau_1}$$

$$\tau_1 = T_1 - t$$

이다.

또 Geske(1979)의 복합옵션 평가모형으로부터 C_3의 값은

$$C_3 = S\,M(a_1, b_1\ ; \sqrt{\tau_1/\tau_2}) - Ke^{-r\tau_2}M(a_2, b_2\ ; \sqrt{\tau_1/\tau_2}) - (S^* + D - K)e^{-r\tau_1}N(b_2)\ .$$

위 세 식을 정리하고 $M(h,-k;-\rho)=N(h)-M(h,k;\rho)$의 성질을 이용하면

$$\begin{aligned} C(S,K,T_2) &= S[N(b_1)+M(a_{1,}-b_{1\,;\,-}\sqrt{\tau_1/\tau_2})] \\ &\quad -Ke^{-r\tau_2}[N(b_2)e^{r(\tau_2-\tau_1)}+M(a_2,-b_2\ ;-\sqrt{\tau_1/\tau_2})] \\ &\quad +De^{-r\tau_1}N(b_2) \end{aligned}$$

이다.

위 RGW 모형은 이자율이 일정하다는 가정하에서 유도되었으므로 τ_1, τ_2가 작고 $\tau_2-\tau_1$도 작다면 이 미국형 콜옵션의 평가모형은 실제로 유용한 모형이다. 만약 $\tau_2-\tau_1$가 아주 크고 만기에 따른 이자율이 곡선 구조를 갖는다면 이를 고려한 모형이 필요하다. 즉 이자율의 기간 구조와 추계적 특성을 염두에 둔 모형은 현실 세계에서 RGW 모형보다 유용할 수 있을 것이다.

2. 추계적 이자율하에서의 배당이 있는 주식에 대한 미국형 콜 옵션

배당이 있는 주식에 대한 미국형 콜옵션은 위에서와 같은 포트폴리오(P1, P2, P3)의 구성으로 복제될 수 있는 사실과 앞 절에서 구한 추계적 이자율하에서의 복합옵션 평가모형을 이용하여 새로운 평가모형을 만들 수 있다. 앞 절에서의 결과를 이용하면 먼저 추계적 이자율하에서의 유럽형 콜옵션 평가모형을 사용하면

$$\begin{aligned} C_1 &= S\,N(g_1)-B_2KN(g_2) \\ g_1 &= \frac{\ln(S/B_2K)+v/2}{\sqrt{v}} \\ g_2 &= g_1-\sqrt{v} \\ v &= \int_0^{T_2-t}\sigma^2(s)\,ds \end{aligned}$$

이고

$$\begin{aligned} C_2 &= S\,N(k_1)-B_1S^*N(k_2) \\ k_1 &= \frac{\ln(S/B_1S^*)+u/2}{\sqrt{u}} \\ k_2 &= k_1-\sqrt{u} \\ u &= \int_0^{T_1-t}\sigma^2(s)\,ds \end{aligned}$$

이다.

S^*는 앞에서와 마찬가지로 $C_{T_1}(S^*, K ; T_2 - T_1) = S^* + D - K$의 해이다. 그리고 앞 절의 모형으로부터

$$C_3 = S M(h_1, k_1 ; \rho) - B_2 K M(h_2, k_2 ; \rho) - B_1 (S^* + D - K) N(k_2)$$

$$h_1 = \frac{\ln(S/B_2K) + (u + u')/2}{\sqrt{u + u'}}$$

$$h_2 = h_1 - \sqrt{u + u'}$$

$$u' = \int_0^{T_2 - T_1} \sigma^2(s)\, ds$$

$$\rho = \sqrt{\frac{u}{u + u'}}$$

이다. 결국 $C = C_1 + C_2 - C_3$ 에서

$$C = S[N(g_1) + M(k_1, -h_1 ; -\rho)]$$

$$-K[B_2 N(g_2) - B_2 M(k_2, h_2 ; \rho) + B_1 N(k_2)]$$

$$+ B_1 D N(k_2)$$

이자율이 기간 구조를 갖는다면, 즉 B_1과 B_2에서 구한 이자율이 크게 다르다면 위 식은 이를 잘 수용하여 표현한다. 그리고 여기서도 σ 의 결정에 따라 옵션의 평가가 중대한 영향을 받는다는 것을 볼 수 있다. 만약 $\sigma(\tau) = \sigma$ 상수로 일정하다면 위 식은 다음과 같이 정리된다.

$$C = S\left[N(b_1) + M\left(a_1, -b_1 ; -\sqrt{\frac{\tau_1}{\tau_2}}\right)\right]$$

$$- K\left[B_1 N(b_2) + B_2 M\left(a_2, -b_2 ; -\sqrt{\frac{\tau_1}{\tau_2}}\right)\right]$$

$$+ B_1 D N(b_2)$$

$$a_1 = \frac{\ln(S/B_2K) + (\sigma^2 \tau_2)/2}{\sigma\sqrt{\tau_2}}$$

$$a_2 = a_1 - \sigma\sqrt{\tau_2}$$

$$b_1 = \frac{\ln(S/B_1S^*) + (\sigma^2 \tau_1)/2}{\sigma\sqrt{\tau_1}}$$

$$b_2 = b_1 - \sigma\sqrt{\tau_1}$$

$$\tau_1 = T_1 - t$$

$$\tau_2 = T_2 - t$$

이 식은 RGW의 모형과 외형상 유사하다.

Ⅳ. 결론

이 논문에서는 이자율 또는 무위험 단위할인채권의 가격변화에 대하여 특별한 가정을 하지 않고 추계적 이자율하에서 유럽형 옵션의 평가방법을 다시 살펴보고 교환옵션과 무위험 단위할인채권이 옵션가격결정모형에 어떻게 이용되는지를 보여주었다. 옵션의 만기에 상응하는 무위험 단위할인채권의 가격과 초과주식 수익률의 순간적 표준편차가 옵션의 가격결정에 중요한 역할을 하는 것을 알았다.

복합옵션의 평가에 있어서 서로 다른 만기의 두 채권 가격이 옵션평가에 반영되는 것과 추계적 이자율하에서 구한 복합옵션 평가모형을 이용하여 배당이 있을 주식에 대한 미국형 콜 옵션의 평가식을 제시하였다. 여기서도 초과주식 수익률의 순간적 표준편차가 평가식에서 주요한 부분임을 밝혔다. 이 모형들은 이자율에 대하여 제한적인 가정을 하고 있는 다른 모형들을 포함하는 일반적인 모형이다. 옵션의 만기가 장기일 때와 이자율의 기간구조를 반영하여야 하는 상황에서는 이 모형들이 유용할 수 있을 것이다. 이자율의 불확실성이 옵션 가격결정에 어느 정도 영향을 주는 지도 이 모형을 통하여 검증할 수 있을 것이다.

최근에 기본단위(numeraire)를 변환하여 옵션을 평가하는 방법들이 대부분 마팅게일(martingale) 이론을 사용하는데 반하여, 여기에서는 교환옵션의 성질과 무위험 헤지 포트폴리오를 만드는 방법을 사용하여 무위험 단위할인채권이 기본단위가 될 때 옵션평가를 어떻게 하여야 되는지를 보여주었다. 앞으로 초과수익률을 이용한 옵션평가방법이 다른 이색옵션들과 일반적인 미국형 옵션의 평가에 어떻게 관련이 있는 지를 살펴보는 것이 필요할 것이다.

<부 록1>

< 전제 1의 증명 >

C = C(S, t) 이므로 Ito's Lemma에 의하여

$$dC = \frac{\partial C}{\partial t} dt + \frac{\partial C}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} (dS)^2$$
$$= \left[\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial S} \mu S + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right] dt + \frac{\partial C}{\partial S} \sigma S \, dW$$

이고

$$\alpha = \left[\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial S} \mu S + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right] / C ,$$

$$\beta = \frac{\partial C}{\partial S} \sigma S \frac{1}{C}$$ 라 두면

$$dC = \alpha C \, dt + \beta C \, dW \quad . \qquad (A1)$$

Merton(1973)의 방법대로 무위험 헷지포트폴리오(H)를 기초자산, 옵션, 그리고 무위험 단위할인채권으로 구성하되 처음 각각에 투자되는 금액을 w_1, w_2, w_3라 할 때, $w_1 + w_2 + w_3 = 0$ 이 되도록 하자. 무위험 단위할인채권을 M이라하면 이자율이 0이므로 $dM = 0$ 이다. 이때

$$dH = w_1 \frac{dS}{S} + w_2 \frac{dC}{C} + w_3 \frac{dM}{M}$$

이다. 위 식에 $dS/S = \mu(S, \tau) \, dt + \sigma(\tau) \, dW$ 와 식 (A1) 그리고 $dM = 0$ 을 대입하면,

$$dH = w_1(\mu dt + \sigma dW) + w_2(\alpha dt + \beta dW)$$
$$= (w_1 \mu + w_2 \alpha) dt + (w_1 \sigma + w_2 \beta) dW$$

dW 의 계수가 0 이 되도록 $w_i = w_i^*$를 정하면, H는 무위험 헷지포트폴리오이므로 차익거래가 없을 조건에서 dt의 계수 또한 0이다. 즉,

$$\begin{cases} w_1^* \mu + w_2^* \alpha = 0 \\ w_1^* \sigma + w_2^* \beta = 0 \end{cases}$$

위 식의 해 (w_1^*, w_2^*)는 아래와 같은 조건일 때 존재한다.

$$\mu / \sigma = \alpha / \beta$$

이 곳에 α, β의 값을 대입하여 정리하면

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} S^2 \sigma^2 = 0$$

을 얻는다. 편미분 표식을 아래 첨자로 표현하고 $C_\tau = -C_t$ 임을 이용하면 위 식은

$$C_\tau = \frac{1}{2} C_{SS} S^2 \sigma^2 \ . \qquad (A2)$$

다시 $\Theta \equiv \int_0^\tau \sigma^2(s)\, ds$ 라 하고 $y(S, \Theta) \equiv C(S; \tau)$ 로 두자. 또 $z = \ln S + \Theta/2$ 로 치환하고 $\Phi(z, \Theta) \equiv y(S, \Theta)/S$로 두면 식 (A2)는 다음과 같이 다시 쓰진다.

$$\Phi_\Theta = \frac{1}{2} \Phi_{zz} \qquad (A3)$$

또 만기조건 $C(S, K; 0) = \max[S-K, 0]$ 으로부터

$$\begin{aligned}\Phi(z, 0) &= e^{-z} y(e^z, 0) \\ &= e^{-z} C(e^z; 0) \\ &= e^{-z} \max\{e^z - K, 0\} \\ &= \max\{1 - e^{-z}K, 0\}\end{aligned}$$

이다. 위 식과 Heat-Equation 의 해법에서 편미분 방정식 (A3)은 그 해를 구할 수 있으며 아래와 같다.

$$\begin{aligned}\Phi(z, \Theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\Theta}} \exp[-\frac{(z-x)^2}{2\Theta}] \max\{1 - e^{-x}K, 0\}\, dx \\ &= \int_{\ln K}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\Theta}} \exp[-\frac{(z-x)^2}{2\Theta}]\, dx \\ &\qquad - K \int_{\ln K}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\Theta}} \exp[-\frac{(z-x)^2}{2\Theta}]\, e^{-x} dx \\ &\equiv \mathrm{I} - \mathrm{II}\end{aligned}$$

이다. 먼저 앞의 항 I 에서 $t = (z-x)/\sqrt{\Theta}$ 로 치환하여 정리하면

$$\mathrm{I} = N\left(\frac{\ln S/K + \Theta/2}{\sqrt{\Theta}}\right)$$

이고 또 II를 정리하면

$$\mathrm{II} = \frac{K}{S} N\left(\frac{\ln S/K - \Theta/2}{\sqrt{\Theta}}\right)$$

이다. 결국

$$\Phi(z, \Theta) = N\left(\frac{\ln S/K + \Theta/2}{\sqrt{\Theta}}\right) - \frac{K}{S} N\left(\frac{\ln S/K - \Theta/2}{\sqrt{\Theta}}\right)$$

이다. 그러므로, 다시 y와 C 를 계산하면 아래와 같다.

$$C(S, K; \tau) = SN(d_1) - KN(d_2). \ \blacksquare$$

<참 고 문 헌>

김인준, “추계적 이자율하에서 옵션평가를 위한 단순접근법”, 재무관리연구 제9권 제1호, (1992), 25-33

Brenner, M. J., G. R. Courtadon and M. G. Subrahmanyam, "The Valuation of Options on Stock Index," New York University Working Paper (March 1987).

Black, Fisher and Myron Scholes, " The Pricing of Options and Corporate Liabilities," Journal of Political Economy 81, (1973), 637-59

Geske, R., "A Note on an Analytical Valuation Formula for Unprotected American Options on Stocks with Known Dividends", Journal of Financial Economics 7, (March 1979), 375-80

Geske, R., "The Valuation of Compound Options", Journal of Financial Economics 7, (1979), 63-81

Kim, I. J., "A Simple Approach to the Valuation of Options under Stochastic Interest Rates," Korean Journal of Financial Management, (June 1992), 25-33

Kim, I. J., "An Alternative Approach to Dividend Adjustments in Option Pricing Models," Journal of Financial Engineering 4, (1995)

Margrabe, W., "The Value of an Option to Exchange One Asset for Another," Journal of Finance 33, (March 1978), 177-86

Merton, R. C., "Theory of Rational Option Pricing." Bell Journal of Economics and Management Science 4, (1973), 141-83

Rabinovich, R., "Pricing Stock and Bond Options when the Default-Free rate is Stochastic," Journal of Financial and Quantitative Analysis 24, (December 1989), 447-57

Roll, R., "An Analytical Valuation Formula for Unprotected American Options on Stocks wiith Known Dividends," Journal of Financial Economics 5, (November 1977), 251-58

Ross, S., "Simple Approach to the Valuation of Risky Streams," Journal of Business 51, (July 1978), 453-75

Ryu, J. H, "Option Pricing : Using Excess Rate of Return", unpublished paper(KAIST), (1995)

Whaley, R. E. "On the Valuation of American Call Options on Stocks with Known Dividends." Journal of Financial Economics 9, (1981), 207-11