

String Market 모형을 이용한 한국 이자율 파생상품 시장의 고찰

김화성¹, 이명환²

< 요약 >

본 논문은 Longstaff, Santa-Clara and Schwartz(2001)의 string market 모형을 이용하여 한국 이자율 파생상품 중 cap과 swaption 그리고 cap과 swaption의 가격 관계를 실증분석 하였다. String market 모형을 이용하여 한국 이자율 파생상품 시장에 대해 살펴본 결과 한국의 스왑션 시장에서 관찰한 선도 이자율의 변동에 영향을 주는 요인은 두 가지로 나타나고 있다. 그리고 스왑션의 경우 옵션의 만기가 길어질수록 시장 가격이 모형 가격에 비교하여 고 평가되어 있는 현상이 커지는 것으로 나타나고 있었다.

그리고 큰 가격 결정 에러를 보이는 곳은 시장 가격이 모형 가격에 비하여 고 평가 되어 있고 가격 결정 에러가 적은 곳에서는 모형 가격이 시장에 비하여 고 평가 되어 있었다. 전체적으로 보았을 때는 시장 가격이 모형 가격보다 고 평가 되어 있었다. 시장 가격이 모형 가격과 비교하여 고평가 되어 형성되고 있는 것으로 나타났고 모형의 저평가 원인으로서는 스왑션 시장에서 내재 공분산 구조가 낮게 추정되었기 때문인 것으로 판단된다.

마지막으로 캡과 스왑션 사이의 Merton(1973)의 무차익 거래 조건(no-arbitrage condition)은 성립하는 것으로 나타났다.

¹. 한국증권연구원

². 기업은행

제 1 장 서 론

파생 상품은 금융기관뿐 아니라 모든 기업의 이자율, 외환 위험 그리고 기타 다양한 위험을 관리하는데 있어서 유용한 역할을 하고 있다. 또한 다양한 파생 상품의 출현과 이를 이용한 거래가 증폭되고 있는 것은 현실이다. 그 중에서도 이자율 스왑(swap) 상품에 대한 수요의 증가는 이와 관계되는 중요한 이자율 파생 상품인 캡(cap)과 스왑션(swaption)을 출현 시켰다. 이자율 파생 상품의 출현으로 금융기관들은 장외 시장(OTC market)에서 이자율 위험을 캡(cap)과 스왑션(swaption)을 이용하여 조정할 수 있게 되었다.

우리나라의 경우 주가지수 선물 및 국채 선물 시장과 같은 장내 파생상품 시장의 경우 규모와 유동성 측면에서 세계 최고 수준을 유지하고 있다. 그리고 국내 장외 파생상품 또한 이자율 변동 위험을 제거하기 위한 원화 금리 스왑(Korean won interest rate swap)을 중심으로 규모가 커지고 있다. 하지만 장내 파생상품과 달리 장외 파생상품 시장의 경우는 주로 외국계 금융기관에 의해 시장이 형성되고 국내 금융기관들은 단순 투자자로서 시장에 참여하고 있는 실정이다. 이자율 변동과 같은 시장 위험을 조절할 수 있는 이자율 파생상품의 경우 원화 금리 스왑 거래가 활성화 되고는 있지만 캡(cap), 플로어(floor) 및 스왑션(swaption)과 같은 상품은 타 상품에 비해 거래가 많지 않다. 다만, 우리나라 금융기관 중 산업은행(Korea Development Bank, KDB)이 한국 이자율 파생 상품인 스왑션과 캡 및 플로어의 가격을 고시하고 있는 실정이다. 하지만 향후 캡(cap), 플로어(floor) 및 스왑션(swaption)과 같은 이자율 파생상품의 시장이 커질 것을 대비한다면 위 상품들의 가격 결정 모형에 대해 심도 있게 살펴볼 필요성이 있다.

다양한 이자율을 위험을 조절할 수 있는 캡과 스왑션은 금융 시장에서 일반적으로 서로 독립적인 상품으로 인식되고 있다. 스왑션(swaption)의 경우는 로그 정규 선도-스왑 모형(Lognormal forward-swap model, LSM)이 이용되고 캡(cap)과 플로어(floor)는 로그 정규 선도-LIBOR 모형(Lognormal forward-LIBOR model, LFM)이 각각 이용되어 일관성이 없는 것이 현실이다. 따라서 이와 같은 이자율 파생 상품이 서로의 가격과 비교하여 가격이 적정하게 결정 되었는지 판단하기가 쉽지 않았다.

하지만 캡(cap)은 개별적인 FRA(forward rate agreement)에 대한 옵션의 포트폴리오로 생각할 수 있고 스왑션(swaption)은 개별적인 FRA(forward rate agreement)의 포트폴리오의 옵션으로 생각할 수 있기 때문에 두 상품을 독립적인 상품으로 보기는 힘들다. 더불어 스왑션(swaption)이나 캡(cap)의 가격은 모두 선도 이자율(forward rate)의 상관 구조(correlation structure)에 의해 결정되기 때문에 캡과 스왑션은 Merton(1973)에 의하면 무차익 조건(no-arbitrage condition)에 따라 서로의 가격은 일정한 관계를 가지고 있어야 한다.

본 논문에서는 독립적이지 않고 서로간에 일정한 관계를 유지하고 있는 이자율 파생상품인 캡과 스왑선에 대해 선도 이자율의 상관 구조와 Merton(1973)의 무차익 조건(no-arbitrage condition)을 이용한 Longstaff, Santa-Clara 그리고 Schwartz(2001)에 의해 제안된 string market 모형³을 이용하여 한국 이자율 파생 상품 시장에 대해 살펴보도록 하겠다. 먼저, 스왑선 가격을 결정하는 선도 이자율의 변동에 영향을 주는 요인에 대해서 살펴보고 이자율 파생 상품인 캡과 스왑선의 가격이 서로의 가격과 비교하여 적절하게 결정되고 있는지를 살펴보도록 하겠다. 그리고 마지막으로 캡과 스왑선이 Merton(1973) 무차익 조건(no-arbitrage condition) 관계를 만족하고 있는지 살펴보도록 하겠다.

String market 모형에 의하면 한국의 스왑선 시장에서 관찰한 선도 이자율의 변동에 영향을 주는 요인은 두 가지로 나타났고 스왑선의 시장 가격은 모형 가격보다 고 평가 되어 있는 것으로 나타났다. 하지만 시간 동질성(time-homogeneity)의 가정은 선도이자율 변화의 복잡한 상관관계 구조를 가지는 한국 시장을 설명하는데 한계점도 나타났다. 시간의 흐름에 따라 공분산 및 상관관계 구조를 변화하는 모형(time-varying covariance structure)을 이용해서 분석해야 할 필요성도 대두되었다. 캡은 시장 가격이 모형 가격과 비교하여 고평가 되어 있는 것으로 나타났고 캡과 스왑선 사이의 Merton(1973)의 무차익 거래 조건(no-arbitrage condition)은 성립하는 것으로 나타났다.

본 논문은 2장에서 이자율 파생상품인 캡과 스왑선의 특징을 살펴보겠다. 그리고 3장에서는 기존 연구 내용과 본 논문의 실증 분석에 사용된 string market 모형에 대해 살펴보고 다음으로 내재 변동성 행렬을 계산하는 방법에 대해 살펴보도록 하겠다. 계속해서 4장에서는 실증 분석에 이용된 캡과 스왑선 자료에 대해, 5장에서는 실증 분석 결과를 살펴보겠다. 마지막으로 6장에서 본 논문의 결과와 향후 보완해야 할 연구 과제에 대해 살펴보도록 하겠다.

제 2 장 이자율 파생상품

본 장에서는 캡(cap)/플로어(floor)와 스왑선(swaption)의 기본적인 특징과 이들 상품들이 금융 시장에서 어떻게 이용되는지 살펴보도록 하겠다.

2. 1 캡과 플로어

변동 금리에 기초한 현금 흐름을 지급하거나 수취하는 시장 참여자는 변동 금리로 인한 위험을 제거하기 위하여 변동 금리에 대한 옵션인 캡/플로어(interest rate cap/floor)와 같은 이자율 파생 상품 계약을 맺는다. 캡은 변동 금리가 고정 금리를 상회 할 때만 캡 상품을 가진 계약 참여자에게 고정

³. String market 모형은 Brace, Gatarek 그리고 Musiela(1997)의 시장모형(market model)과 Santa-Clara와 Sornette(2001), Goldstein(2000), Longstaff 와 Schwartz(2001)의 string shock 모형을 혼합하여 만들어진 모형이다.

금리와 변동 금리의 차액을 제공하는 일종의 유럽형 콜 옵션(European call option) 구조를 가짐으로써 변동 금리가 일정 수준의 고정 금리 K 이상 상승하는 것에 대한 보험을 제공한다. 이러한 이자율 캡은 자본 차입 비용이 일정 수준 이상 넘어가는 것을 회피하기 위한 수단이다. 이러한 일정 수준을 캡 이자율(cap rate)이라 하고 개별적인 콜 옵션은 변동 금리⁴에 대한 캡플릿(caplet)이라 한다.

개별 캡플릿(caplet)은 동일한 행사 가격(K)을 가지나 서로 다른 시점에 변동 금리에 기초하여 동일한 기간 단위로 만기가 발생한다. 한국 시장의 경우는 91일 CD 이자율을 기준으로 하기 때문에 3개월 단위로 만기가 발생한다. 예를 들면, 3개월 단위 변동 금리에 기초하는 5년 캡(cap)은 3개월 단위마다 만기가 도래하는 19개의 독립적인 캡플릿(caplet)으로 구성된 포트폴리오이다.⁵ 변동 금리에 기초하여 이자를 지급해야 하는 투자자는 캡 계약에서 발생하는 현금 흐름을 이용하여 이자율 변동에 대한 위험을 헷징(hedging)할 수 있을 것이다.

만기가 T 인 캡플릿(caplet)의 만기 때 $(\alpha/360)\max[L(\tau, T) - K, 0]$ 현금 흐름이 발생한다. α 는 τ 시점부터 T 시점까지 실제 날짜이고 K 는 행사 가격이다. $L(\tau, T)$ 는 τ 시점부터 T 시점까지 적용되는 변동 금리이다. 캡의 시장 가격은 일반적으로 Black(1976)에 제안된 Black 모형을 이용하여 고시되고 있다. Black 모형에 의한 개별 캡플릿(caplet)의 가치는 아래의 식 (1)처럼 나타낼 수 있다.

$$D(0, T) \frac{\alpha}{360} [F(0, \tau, T)N(d_1) - KN(d_2)] \quad (1)$$

$$d_1 = \frac{\ln(F(0, \tau, T)/K) + \sigma^2 \tau / 2}{\sigma \sqrt{\tau}}, \quad d_2 = \frac{\ln(F(0, \tau, T)/K) - \sigma^2 \tau / 2}{\sigma \sqrt{\tau}}$$

$$F(0, \tau, T) = \frac{360}{a} \left(\frac{D(0, T)}{D(0, \tau)} - 1 \right)$$

$D(t, T)$ 는 t 시점에서 만기가 T 인 할인 채권의 가격이고 $F(t, \tau, T)$ 는 t 시점에서 결정된 τ 시점부터 T 시점까지의 선도 이자율이다. 그리고 σ 는 선도 이자율 로그 변화(change of logarithm)의 변동성이다.

캡은 개별 캡플릿(caplet)의 포트폴리오이기 때문에 캡의 가치는 앞서 계산된 개별 캡플릿(caplet)의 가치를 합하여 계산할 수 있다. 일반적으로 이자율 파생 상품의 가격은 Black 모형을 이용한 ATM의 내재 변동성으로 고시되고 있는데 이는 Black 모형이 정확한 모형이라기 보다는 실제 가격보다 내재 변동성으로 가격을 고시하는 것이 더 안정적이기 때문에 시장에서 관습적으로 내재 변동성을 이용한다.⁶

이자율 파생 상품 중 캡과 비슷한 특징을 가지는 플로어(floor) 상품이 있다. 플로어(floor)는 변동 금리에 기초하는 유럽형 풋옵션(European put option)의 포트폴리오로 플로렛(floret)⁷의 만기 시에는

⁴. 일반적으로 국제 금융 시장에 이용되는 기준 변동 금리로 LIBOR(London InterBank Offered Rate)가 이용되지만 한국의 스왑(swap) 시장에서는 기준 변동 금리로 91일 CD에 대한 이자율이 보편적으로 이용된다.

⁵. 시장 관습상 0.25년의 첫 번째 캡플릿의 현금 흐름은 발생하는 않는 것으로 간주한다. 따라서 3개월 단위의 변동 금리를 기초로 하는 만기 5년 캡의 경우 19(=20-1)개의 캡플릿에서 현금 흐름이 발생한다.

⁶. ATM의 캡 이자율(cap rate)은 동일한 만기를 가지는 스왑 이자율(swap rate)과 동일하다.

⁷. 캡플릿과 마찬가지로 플로어를 구성하는 개별적인 유럽형 풋옵션 구조를 의미한다.

$(\alpha/360)\max[K - L(\tau, T), 0]$ 의 현금 흐름이 발생한다. 나머지 특징들은 캡과 동일하다.

2. 2 스왑션

스왑션(swaption)은 스왑션을 가지고 있는 투자자에게 미래의 어느 시점에서 계약 시점에서 정해진 일정 수준의 스왑 이자율(swap rate)을 이용하여 스왑 계약을 할 수 있는 권리를 제공하거나 이미 계약된 스왑 계약을 헷징(hedging)하기 위해 이용할 수 있는 상품으로 스왑 계약과 옵션이 혼합된 상품으로 고정 금리와 변동 금리를 교환하는 이자율 스왑 계약(interest swap contract)을 기초 상품(underlying instrument)으로 한다.

이자율 스왑 계약(interest swap contract)을 기초 상품(underlying instrument)으로 하는 유럽형 스왑션(European swaption)은 고정 금리를 받는 권리를 가지는 스왑션(receiving fixed payments)과 고정 금리를 제공하는 스왑션(paying fixed payments) 두 가지로 나누어 질 수 있다. 스왑 계약이 시작되는 옵션의 만기를 τ , c 를 스왑 계약에 적용되는 이자, T 를 스왑션 계약의 만기라고 하면 고정 금리를 받는 스왑션(receiving swaption)을 가지고 있는 투자자는 τ 시점에 $T - \tau$ 기간 동안 c 이자를 받는 스왑 계약을 할 수 있다. 그리고 위 스왑션은 일반적으로 τ into $T - \tau$ 또는 τ by T 라 한다. 고정 금리를 제공하는 스왑션(paying fixed payments)은 반대의 스왑 계약을 생각할 수 있다.

스왑 계약(swap contract)을 체결할 때 고정 금리를 제공하는 쪽과 변동 금리를 제공하는 쪽 현재 가치가 동일하게 되도록 고정 금리를 결정한다. 이때 양쪽의 현금 흐름을 동일하게 하는 고정 금리를 (swap rate)라 한다. 스왑션은 옵션의 만기가 도래하는 미래의 일정 시점에서 스왑 계약이 시작되기 때문에 미래 일정 시점의 이자율 스왑 계약(interest swap contract)을 위한 선도 스왑 이자율(FSR, forward swap rate)이 필요하다. 선도 스왑 이자율(FSR, forward swap rate)은 고정 금리를 제공하는 쪽과 변동 금리를 제공하는 쪽 현재 가치를 동일하게 하는 스왑 이자율 계산 방법을 적용하여 계산할 수 있고 선도 스왑 이자율(forward swap rate, $FSR(0, \tau, T)$)은 식 (2)처럼 나타낼 수 있다.

$$FSR(0, \tau, T) = 4 \left[\frac{D(0, \tau) - D(0, T)}{A(0, \tau, T)} \right] \quad (2)$$

현재 시점은 0, 스왑 계약이 시작되는 옵션의 만기는 τ ($t < \tau < T$) 그리고 스왑(swap)의 만기는 T 이다. $\tau + 0.25, \tau + 0.50, \tau + 0.75, \dots, T - 0.25, T$ 시점에서 현금 흐름이 3개월 단위로 발생하게 된다.

$A(0, \tau, T) = \sum_{i=1}^{4(T-\tau)} D(0, \tau + i/4)$ 는 τ 시점에서 스왑 계약의 시작 후 3개월부터 스왑의 만기(T)까지 할인채 현재 가치의 합(present value of annuity)이다.

스왑 계약이 실행되면 시장에서 결정되는 금리는 스왑 금리와 달라지게 되고 스왑의 가치는 스왑 계약 당시의 가치 0에서 변화하게 된다. c 를 고정 금리를 적용하여 받는 이자, $V(t, \tau, T, c)$ 을 고정 금리를 받는 쪽의 t 시점의 가치는 할인채 가격의 선형 결합을 이용하여 식 (3)처럼 고정 금리로 받는

금액의 현재 가치와 변동 금리로 제공하는 금액의 현재 가치로 나타낼 수 있다.

$$V(t, \tau, T, c) = \frac{c}{2} \sum_{i=1}^{2(T-\tau)} D(t, \tau + i/2) + D(t, T) - D(t, \tau) \quad (3)$$

캡 시장과 마찬가지로 스왑선 시장에서도 스왑선의 가격을 Black 모형을 이용한 내재 변동성으로 가격을 고시한다.⁸ 선도 스왑 이자율(forward swap rate)에 대한 로그 정규(lognormal)를 가정하면 할인 채권의 현재 가치 척도(annuity measure, $A(0, \tau, T)$)하에서 현재 시점 0에서의 스왑선의 가치는 Black 모형 의해 아래의 식 (4)처럼 나타낼 수 있다.

$$\frac{1}{2} A(0, \tau, T) [FSR(0, \tau, T) N(d_1) - c N(d_1 - \sigma \sqrt{\tau})] \quad (4)$$

$$d_1 = \frac{\ln(F(0, \tau, T)/K) + \sigma^2 \tau / 2}{\sigma \sqrt{\tau}}$$

c 는 고정 금리 이자, σ 는 선도 스왑 이자율(forward swap rate)의 로그 변화(changes of the logarithm)에 대한 변동성, $N(\cdot)$ 는 누적 표준 정규분포 함수이다. 스왑선이 ATM($c = FSR(0, \tau, T)$)인 경우 식 (4)는 식 (5)처럼 정리할 수 있다. 그리고 스왑선의 실제 가격은 공시되는 내재 변동성(σ)을 식 (5)에 대입하여 계산할 수 있다.

$$[D(0, \tau) - D(0, T)] [2N(\sigma \sqrt{\tau} / 2) - 1] \quad (5)$$

Merton(1973)의 무차익 조건(no-arbitrage condition)외에도 Longstaff, Santa-Clara 그리고 Schwartz(2001)가 지적했던 것처럼 캡과 스왑선은 양쪽의 개별 시장에서 모두 기초 자산에 대한 로그정규(lognormal)의 가정에는 문제는 가지고 있기 때문에 캡과 스왑선은 통합된 모형 하에서 가격 결정이 이루어 져야 한다.⁹ 더불어 두 시장을 비교할 때 개별 시장에서 서로 다른 Black 모형을 이용하여 공시되는 내재 변동성을 직접적으로 비교하는 것은 의미가 없다.

⁸. 시장에서 Black 모형을 이용하여 고시되는 ATM(at the money) 스왑선의 경우 스왑 계약에 적용되는 고정 금리가 선도 스왑 이자율(forward swap rate)과 동일한 경우를 말한다. 이때 선도 스왑(forward swap)의 가치는 0가 되고, 고정 금리를 제공하는 스왑선과 고정 금리를 받는 스왑선의 가치는 동일하게 된다.

⁹. 캡(cap)은 선도 이자율(forward short-term rate)을 기초 자산으로 가정하고 스왑선(swaption)은 선도 스왑 이자율(longer-term forward swap rate)을 기초 자산으로 가정하고 있다. 이는 선도 이자율의 근사 선형 결합이 선도 스왑 이자율이지만 로그 정규(lognormal)의 선형 결합은 로그 정규(lognormal)가 아니기 때문에 캡과 스왑선 양쪽 시장에 모두 동일하게 선도 이자율과 선도 스왑 이자율에 대한 로그 정규성을 가정하는 것에 문제가 발생한다.

제 3 장 기존 연구 및 String Market 모형

본 장에서는 이자율 파생상품에 대한 기존 연구의 흐름과 실증 분석에 이용될 string market 모형 및 실증 분석 방법에 대해 살펴보도록 하겠다.

3. 1 기존 연구

최근의 이자율 옵션 모형은 크게 두 가지 방향으로 발달되어 왔다. 첫째는 HJM에 의한 연속 복리(continuous forward rate) 모형을 보다 현실적으로 이용이 편리한 방향으로 발전시킨 소위 LIBOR 시장 모형(market model)이 많이 이용된다. 이 모형은 연속 복리 선도 이자율 대신 단순 복리 선도 이자율(forwards of observable term rate)을 이용한 모형으로 Brace-Gatarek-Musiela(1997)과 Jamshidian(1997) 등에 의해 발전된 모형이다. 위 모형은 LIBOR 금리가 연속 복리(continuous compounding)로 고시되기 보다는 일정한 기간을 단위로 하는 단순 복리 이자율(simple compound interest rate) 형태로 고시되는 시장의 관습을 반영한 모형이다. 이 모형은 선도 이자율(forward rate)을 이용한다는 점에서 많은 부분에서 HJM(1992) 모형과 유사한 구조를 가지고 있고 동일한 조정(calibration) 이슈를 가지고 있다.

다른 최근의 연구 방향은 Kennedy(1994,1997), Goldstein(2000), Longstaff-Schwartz(2001) 그리고 Santa-Clara, Sornette(2001)에 의해 발전된 string 모형이다. 이 모형은 이자율의 기간 구조의 개별 기간들을 독립적인 동학(dynamics)을 가지는 확률 변수(random variable)로 간주하고 동시에 서로 다른 기간이 서로 상관 관계를 갖는 것을 허용하고 있다.

3. 2 String Market 모형

본 논문에서 실증 분석 하고자 하는 모형인 Longstaff, Santa-Clara, Schwartz(2001)에 의해 제안된 string market 모형을 자세히 살펴보도록 하겠다. 이 모형은 앞서 설명한 두 모형의 특징을 혼합한 모형으로서 캡과 스왑선의 기초 자산인 선도 이자율의 상관 구조를 이용하는 모형이다.

개별 기간들의 선도 이자율의 동학(dynamics)을 독립적으로 가정하는 string market 모형은 아래 식 (6)처럼 선도 이자율(forward rate)의 위험 중립형 확률 과정(risk-neutral dynamics)을 가정한다.

$$dF_i = \alpha_i F_i dt + \sigma_i F_i dZ_i \quad (6)$$

F_i 는 개별 기간의 선도 이자율(forward rate), $F_i \equiv F(t, T_i, T_i + 1/4)$, $T_i = i/4$, $i = 1, 2, \dots, 39$ 이고 α_i 는 임의의 순간 기대 수익률 함수(unspecified drift function), σ_i 는 비확률적인 순간 변동성 함수(deterministic volatility function), 그리고 dZ_i 는 개별 기간에 대한 선도 이자율(forward rate)의 표준 Brownian motion을 의미한다. 그리고 선도 이자율에 대한 서로 다른 기간의 Brownian motion

dZ_i 와 dZ_j 는 서로 상관되어 있다. 위 모형에서 변동성 함수 (σ_i)와 Brownian motion의 상관 구조는 선도 이자율의 공분산 행렬(Σ)을 결정한다.

String market 모형에서는 공분산 행렬의 구조(covariance structure)를 간단하게 만들기 위하여 두 가지 가정을 한다. 첫 번째는 서로 다른 dF_i/F_i 와 dF_j/F_j 의 공분산은 $T_i - t$ 와 $T_j - t$ 만 의존하는 시간 동질성(time homogeneity)을 가정한다. 두 번째는 공분산(Σ)은 일정 기간, 본 논문에서는 3개월, 동안 일정하다고 가정한다. 따라서 39X39 선도 이자율의 공분산 행렬로 선도 이자율의 움직임을 설명할 수 있게 된다.

String market 모형에서 string은 선도 이자율(forward rate)에 의해 표현되지만 할인 채권 가격 벡터를 이용하여 모형을 효율적으로 만든다. 식 (7)처럼 선도 이자율 F_i 는 할인 채권의 가격의 벡터(vector)로 나타낼 수 있고 반대로 할인 채권의 가격은 선도 이자율의 함수($D = f(F)$)로 나타낼 수 있다.¹⁰.

$$F_i = \frac{360}{\alpha} \left[\frac{D(t, T_i)}{D(t, T_i + 1/4)} - 1 \right] \quad (7)$$

할인 채권의 가격 벡터(vector)에 Ito's Lemma을 적용하면,

$$dD = rDdt + J^{-1} \sigma F dZ \quad (8)$$

r 은 spot rate, J^{-1} 는 할인채의 가격에서 선도 이자율(forward rate)간의 관계를 표현한 Jacobian matrix의 역행렬, 그리고 $\sigma F dZ$ 은 선도 이자율의 확률 과정을 표현한 식 (6)의 개별적인 $\sigma_i(t, T_i) F_i dZ_i$ 을 벡터로 표현한 것이다. 그리고 Jacobian matrix(J).¹²는 아래 식 (9)과 같이 나타낼 수 있다.

¹⁰. 할인 채권의 가격이 선도 이자율의 함수로 표현되기 위해서는 할인채 가격에서 선도 이자율로 mapping하는 자코비안(Jacobian matrix)의 행렬값(determinant)이 0이 아니어야 한다. 자세한 내용은 Francis A. Longstaff, Pedro Santa-Clara, Eduardo S. Schwartz(2001) 참조.

¹¹. 식 (10)에서 기대수익률 항(drift term)은 선도 이자율 동학(forward rate dynamics)의 기대수익률(drift term)인 α_i 에 의존하지 않는 rD 이다. 이는 할인채권(discount bond)은 완전 시장(complete market)에서 거래되는 자산(traded assets)이고 순간 기대수익률(instantaneous expected return)은 무위험(risk-neutral measure)하에서 현물이자율(spot rate)과 동일하다. 만기가 가장 짧은 이자율을 현물 이자율(spot rate)로 이용한다. Santa Clara and Sornette(2001) 참조.

¹². Jacobian 행렬에서 할인채권의 가격은 만기에 대한 함수로 표현되어 있다. 그리고 Jacobian 행렬은 할인 채권의 가격 39개 $D(0.50), D(0.75), D(1.00), \dots, D(9.75), D(10.00)$ 에 대한 39개의 선도 이자율 $F_{0.25}, F_{0.50}, F_{0.75}, \dots, F_{9.50}, F_{9.75}$ 의 1차 미분값이다.

$$J = \begin{bmatrix} \frac{D(0.25)}{D^2(0.50)} & 0 & 0 & \Lambda & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{D(0.75)} & \frac{D(0.50)}{D^2(0.75)} & & \Lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{D(1.00)} & \frac{D(0.75)}{D^2(1.00)} & \Lambda & 0 & 0 & 0 \\ M & M & M & O & M & M & M \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda & \frac{1}{D(9.75)} & \frac{D(9.50)}{D^2(9.75)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda & 0 & \frac{1}{D(1000)} & \frac{D(9.75)}{D^2(1000)} \end{bmatrix} \quad (9)$$

3. 3 실증 분석 방법

String market 모형에서는 선도 이자율의 움직임을 가장 잘 설명할 수 있는 공분산 행렬(covariance matrix)을 외부적(exogenously)으로 정의하기 보다는 시장 가격을 가장 잘 설명하는 내재 공분산 행렬을 찾는다. 정확하게 설명하면 유럽형 스왑션 가격에서 선도 이자율의 내재 공분산 행렬¹³을 계산한다.

내재 공분산 행렬을 찾는 방법은 아래와 같다. 첫 번째로 연구에 사용될 기간 전, 일정 기간 동안 선도 이자율의 퍼센트 증가분에 대한 시계열 자료의 과거 상관 행렬(H , historical correlation matrix)을 계산한다. 다음으로 과거 상관 행렬 H 를 스펙트럼 분해(spectral decomposition)를 통하여 $H = U\Delta U'$ 을 계산한다.¹⁴ 여기서 U 는 고유 벡터로 구성된 행렬, Δ 는 고유 값으로 구성된 대각 행렬이다. 세 번째로 모형에서 계산된 스왑션 가격과 시장에서 관찰된 스왑션 가격의 RMSE(root mean square error)을 최소화 시켜주는 내재 공분산 행렬 $\Sigma = U\Psi U$ 을 찾는다. Ψ 는 음수가 아닌 내재 고유값(implied eigenvalue)으로 구성된 대각행렬이다. 따라서 내재 공분산 행렬을 찾는 문제는 Ψ 를 구성하는 내재 고유값을 찾는 문제로 귀결된다.

내재 고유값을 찾는 방법을 더 자세히 살펴보도록 하겠다. 먼저 string market 모형인 식 (8)을 이용하여 2000개의 할인 채권의 가격의 패스(path)를 생성한다. 이때 시뮬레이션 에러(simulation error)를 줄이기 위하여 반대의 값(antithetic varieties)을 이용한다. 그리고 시간 동질성(time homogeneity) 조건에 따라 시뮬레이션 기간이 지나감에 따라 Σ 와 J 행렬을 조정해 나간다. 예를

¹³. 공분산 행렬은 양정칙(positive definite) 행렬이거나 적어도 양반정칙(positive semidefinite) 행렬이어야 한다. 행렬이 양정칙이 되기 위해서는 행렬의 고유값이 양수가 되어야 한다. 따라서 내재 공분산 행렬을 계산할 경우 내재 고유값이 음수의 값을 가지지 않아야 한다.

¹⁴. Francis A. Longstaff, Pedro Santa-Clara, Eduardo S. Schwartz(2001)의 논문에서는 상관 행렬에서 구한 역사적 고유벡터(historical eigenvector)와 공분산 행렬에서 구한 역사적 고유벡터는 거의 비슷하다고 하였지만 우리나라 자료의 경우 약간의 차이가 있었다.

들면 시뮬레이션이 시작되는 처음 3개월 동안은 39X39 행렬 모든 원소가 이용되지만 3개월이 지나고 두 번째 시뮬레이션 기간이 되면 첫 번째 선도 이자율은 현물 이자율(spot rate)이 되기 때문에 38개의 선도 이자율만이 사용되게 된다. 따라서 공분산 행렬(Σ)의 앞 38행과 38열까지만 이용하고 Jacobian(J)의 첫 행과 첫 열의 이용하지 않게 된다. 이와 같은 과정을 마지막 시뮬레이션 기간까지 반복한다.¹⁵

다음은 시뮬레이션을 통하여 생성된 할인 채권의 가격을 이용하여 옵션의 만기 τ 시점의 개별적인 ATM 유럽형 스왑선 가치를 계산하고 RMSE를 계산한다. 옵션의 만기 τ 시점에서 고정 금리를 받는 스왑선(receiving swaption)의 가치, $V(\tau, \tau, T, c)$ 는 식 (10)처럼 나타낼 수 있다.

$$V(\tau, \tau, T, c) = \frac{c}{4} \sum_{i=1}^{4(T-\tau)} D(\tau, \tau + i/4) + D(\tau, T) - 1 \quad (10)$$

ATM의 가치를 계산하기 때문에 $c = FSR(0, \tau, T)$ 이고 스왑 계약에서 고정 금리를 의미한다. 식(12)에 따라 스왑선의 가치가 결정되기 때문에 τ 시점에서의 고정 금리를 받는 스왑선(receivers swaption)의 경우 $\max[0, V(\tau, \tau, T, c)]$, 고정 금리를 주는 스왑선(payers swaption)의 경우 $\max[0, -V(\tau, \tau, T, c)]$ 의 현금 흐름이 발생한다. 모든 패스(path)에 대하여 money market factor($\prod_{i=0}^{4\tau-1} D(i/4, (i+1)/4)$)을 이용하여 τ 시점의 스왑선 현금 흐름의 현재 가치를 계산한다. 마지막으로 모든 패스(path)에서 생성된 할인된 현금 흐름의 평균을 계산한다. 할인된 스왑선 현금 흐름의 평균을 계산할 때 ATM의 고정 금리를 받는 스왑선(receivers swaption)의 가치와 고정 금리를 주는 스왑선(payers swaption)의 가치는 동일하기 때문에 고정 금리를 받는 스왑선(receivers swaption)의 가치와 고정 금리를 주는 스왑선(payers swaption)의 가치의 평균을 할인된 스왑선의 현금 흐름으로 이용한다.

마지막으로 앞서 시뮬레이션에 사용된 동일한 난수(random number)를 이용하여 RMSE가 일정 값에 수렴할 때까지 다른 고유값에 대해 앞서 했던 과정을 반복한다.¹⁶

제 4 장 실증 분석 자료

String market 모형을 실증 분석 하기 위해서는 세가지 종류의 자료가 필요하다. 첫째 이자율의 기간 구조를 결정하는 91일 CD금리 및 스왑 이자율(swap rate, 1년, 2년, 3년, 4년, 5년, 7년, 10년)이 필요하다. 다음으로 유럽형 스왑선 내재 변동성, 그리고 마지막으로 캡 내재 변동성 자료가 필요하다. 스왑 이자율(swap rate), 캡 및 스왑선의 가격 자료는 IDB인 Prebon Yamane Asia Pacific에서

¹⁵. 실증 분석 시 이용된 한국 스왑선 및 캡 자료는 일간 단위로 2002년 3월 20일부터의 자료만 존재하였다. 따라서 실증 분석에 사용된 자료는 모두 일간 자료이다. 따라서 사전 기간에서 추정된 과거 고유벡터(historical eigenvector)는 일간 단위의 선도 이자율 증분의 상관 구조에서 추정하였다. 하지만 시뮬레이션에서 이용된 시간 간격은 월간 단위이다. 이는 내적 일치성(consistency)에 문제가 있지만 시뮬레이션 시간 상의 문제로 시뮬레이션에서는 월간 단위의 시간 간격으로 조정하였다.

¹⁶. 고유값에 대한 목적 함수가 비교 가능하게 하기 위하여 동일한 난수(random number)를 사용한다.

고시되는 자료로 Bloomberg에서 구했다. Prebon Yamane가 고시하는 가격은 시장 조성자들인 투자 은행들에서 고시한 가격을 다시 고시한다. Bloomberg 티커(ticker)는 KWSW, KWSV, KWCV이며 캡/플로어 및 스왑선은 Black 모형에 적용된 내재 변동성으로 가격이 공시된다. 그리고 3개월 CD 금리 자료는 한국은행에서 고시된 자료를 이용하였다. 모든 이자율 파생 상품에 대해 “QRT”는 변동 금리 reset 주기가 “분기”라는 것을 의미하고 “A365”는 day-count 관례가 “Actual/365”라는 의미이다. 캡과 스왑선의 변동성은 등가격(at-the-money) 옵션에 대한 내재 변동성이다

실증 분석에는 2002년 3월 20일부터 2003년 9월 23일까지의 시장 종료 시 결정된 중간 값(mid price)의 일간 자료를 이용하였다.¹⁷ 2002년 3월 20일부터 2003년 7월 15일까지의 기간은 역사적인 고유 벡터(historical eigenvector)를 측정하기 위해 이용되었고 2003년 7월 16일부터 2003년 9월 23일까지 50일간은 string market 모형의 실증 분석에 이용되었다.

4. 1 이자율 기간 구조

먼저 이자율 기간 구조를 살펴보도록 하겠다. 스왑 이자율에서 1년, 2년, 3년, ..., 10년은 현재 시점부터 계약 기간이 1년, 2년, 3년, ..., 10년인 스왑 계약을 할 때 적용되는 스왑 이자율을 의미한다. 실증 분석에 이용된 이자율은 만기가 1년, 2년, 3년, 4년, 5년, 7년, 10년인 스왑 이자율과 91 CD금리이다. Fama-Bliss(1987)의 unsmoothed bootstrapping방법을 이용하여 할인 채권의 가격과 선도 이자율을 계산하였다.¹⁸ 그림 1은 2002년 3월 20일부터 2003년 7월 15일까지의 사전 기간(ex ante) 선도 이자율의 기간 구조이다. 이 기간은 앞서 언급한 것처럼 역사적인 상관 구조 행렬(H)을 계산하기 위해 사용되었다. 역사적인 상관 구조 행렬의 고유 벡터는 사후 기간(ex post)의 내재 변동성 행렬을 계산하기 위해 사용되었다.

그림 1 사전 기간(ex ante)의 선도 이자율을 2002년 10월 7일의 선도 이자율의 움직임에 제외하고는 특별하게 이상한 움직임을 보이는 곳은 없다. 전체적으로 시간이 경과함에 따라 선도 이자율이 하락하고 있다. 초기에는 단기 및 중기의 선도 이자율이 장기의 선도 이자율과 비교하여 높았지만 시간이 경과함에 따라 이런 현상이 줄어들고 있다. 하지만 중기의 선도 이자율이 높은 특징은 지속되고 있다.

표 1은 2002년 3월 20일부터 2003년 7월 15일까지 345일간 사전 기간(ex ante) 동안 3개월 선도 이자율의 로그 변화에 대한 상관 행렬이다. Fama-Bliss unsmoothed bootstrapping은 기준 시점 사이의 연속 선도 이자율(continuous forward rate)은 동일하다고 가정을 하기 때문에 3개월 단위의 단순 선도

¹⁷. 거래일 기준으로 395일이다. 역사적 고유벡터를 추정하기 위해 이용된 사전 기간은 2002년 3월 20일부터 2003년 7월 15일 까지 거래일 기준으로 345일이고 실증 분석 기간인 사후 기간은 2003년 7월 16일부터 2003년 9월 24일까지 거래일 기준으로 50일이다.

¹⁸. Francis A. Longstaff, Pedro Santa-Clara, Eduardo S. Schwartz(2001)의 논문에서 시장의 관습에 스왑 이자율을 무 위험 이자율로 간주하여 이자율의 기간 구조를 구성하였다. 본 논문에서도 동일한 방법을 사용하여 이자율의 기간 구조를 구성하였다.

이자율(discrete forward rate)로 바꾸어도 기준 시점 사이의 선도 이자율은 거의 유사한 값을 가지게 된다. 따라서 표 1과 같이 기준 시점 사이의 선도 이자율의 로그 변화의 상관 관계가 완전 상관($\rho=1$)으로 나타나게 된다. 선도 이자율 사이가 멀어질수록 상관관계가 안정적으로 줄어들지 않고 양의 상관관계와 음의 상관관계가 혼재한 복잡한 구조를 가지고 있다.

그림 2는 string market 모형의 실증 분석 기간인 2003년 7월 16일부터 2003년 9월 23일까지의 선도 이자율이다. 사전 기간(ex ante)처럼 증기의 선도 이자율이 단기 및 장기의 선도 이자율보다 더 높은 특징을 보이고 있지만 그 정도가 시간이 경과 함에 따라 줄어들고 평평한(flat) 이자율 기간 구조를 형성하고 있는 것을 확인 할 수 있다. 그리고 선도 이자율은 사전 기간(ex ante)과 달리 4%에서 안정적으로 형성되고 있는 것도 사전 기간(ex ante)과 다른 또 다른 특징이다.

4. 2 스왑선 자료

실증 분석에 이용된 스왑선 자료는 2003년 7월 16일부터 2003년 9월 24일까지 29개 ATM 유럽형 스왑선에 대한 내재 변동성의 중간 가격(mid price)이다. 스왑선의 최종 만기($M+M$)까지가 10년 이내인 것만 이용하였다.¹⁹ 스왑선 가격의 공시는 시장의 관습에 따라 Black 모형에 적용된 내재 변동성으로 시장의 실제 가격을 계산하기 위해서는 내재 변동성을 Black 모형에 적용하면 계산할 수 있다.

일반적으로 N by M 스왑선은 옵션의 만기가 N 이고, 스왑 계약 기간이 M 인 스왑선을 의미한다. 따라서 기초 자산인 스왑의 만기는 현재 시점부터 $N+M$ 년 후가 된다. 예를 들면 2 by 5 스왑선은 2년 후에 5년 동안 거래되는 스왑을 기초 자산으로 하는 스왑선을 말하며 스왑선의 만기는 2년이고 기초 자산의 만기는 현재 시점부터 8년 후가 된다.

표 2와 표 3에서 확인 할 수 있듯이 스왑선의 옵션 만기가 길어지고 스왑 계약 기간(tenor)가 길어질수록 가격이 낮아지는 것을 확인 할 수 있다. 그리고 이와 같은 특징은 미세한 차이가 있기는 하지만 특정 몇 일의 스왑선의 만기와 스왑 계약 기간에 대한 관계를 표현한 그림 4에서도 확인 가능하다. 그리고 전체적으로 공시되는 스왑선의 변동성은 15와 25사이에서 형성되고 있다. 그리고 그림 3에서 확인 할 수 있듯이 최근 스왑선의 변동성이 상승하고 있다. 변동성의 변화가 실증 분석 기간 초기와 증기와 비교하여 크게 나타나고 있다.

4. 3 캡 자료

캡 가격은 현재 시점부터 3개월 후에 만기가 1년, 2년, ..., 10년인 캡을 말한다. 시장에 고시되는

¹⁹ 이자율의 기간 구조가 10년까지만 존재하기 때문에 식 (3)의 선도 스왑 이자율을 계산할 때 10년을 초과하는 스왑선의 최종 만기를 가지는 상품의 선도 스왑 이자율을 계산할 수 없다. 선도 스왑 이자율(FSR)은 식 (12)에서 옵션의 만기 때 발생하는 ATM 스왑선의 가치를 계산할 때 이용된다.

캡의 가격 정보는 스왑선의 경우와 마찬가지로 Black 모형에 적용된 내재 변동성으로 고시되고 있으면 그림은 캡에 대한 만기 별 내재 변동성의 시계열 자료이다. 표 4와 그림 5에서 확인 할 수 있듯이 중기의 내재 변동성이 단기와 장기에 비교하여 더 높게 나타나고 있다. 중기의 내재 변동성이 단기와 장기와 비교하여 높게 형성되는 구조(hump)를 보이고 있는 이유를 잘 설명한 일반적인 이론은 존재하지 않는다. 다만, 단기 이자율은 정부의 중앙 은행에서 되는 반면 3년 내지 3년의 이자율은 단기 이자율의 변동에 민감한 반응을 보이는 다양한 종류의 시장 참여자의 견해가 반영되어 높게 형성되고 마지막으로 5년 이상의 장기의 경우 이자율의 평균 회귀(mean reversion)의 특징에 의하여 줄어드는 것으로 보고 있는 견해가 있다.

제 5 장 실증 분석 결과

본 장에서는 실증 분석한 결과들을 살펴보겠다. 먼저 스왑선의 시장 가격을 설명하기 위해서 얼마나 많은 내재 요인이 필요한지 살펴보도록 하겠다. 다음으로 string market 모형에서 결정된 스왑선 가격의 특징을 살펴보고 string market 모형을 이용하여 캡과 스왑선의 relative valuation에 대해 살펴보겠다. 그리고 마지막으로 캡과 스왑선이 Merton(1973) 무차익 조건(no-arbitrage condition) 관계를 만족하고 있는지 살펴보도록 하겠다.

5. 1 내재 변동성의 요인(factor) 수

이자율의 기간 구조의 변동을 설명하기 위하여 얼마나 많은 요인(factor)이 필요한가에 대한 많은 연구가 진행 되어오고 있었다. 단기 이자율의 변동에 영향을 주는 4번째 요인(factor)의 존재를 실증 분석한 Knez, Litterman와 Scheinkman(1994)의 연구를 제외하고 대부분 실증 분석 연구 결과는 2개 내지 3개의 요인이 존재 하는 것으로 밝히고 있다. 그리고 본 논문에서 실증 분석하는 Longstaff, Santa-Clara와 Schwartz(2001)의 string market 모형도 스왑선 가격에서 이자율의 기간 구조의 변동 요인을 4개까지 존재하는 것으로 밝히고 있다.

앞서 언급하였듯이 본 논문에서 실증 분석하는 string market 모형은 기존 연구와 좀 다른 방법론으로 이자율 기간 구조의 변동 요인을 찾는다. 과거의 이자율 구조(historical term structure)에서 변동 요인을 찾기 보다는 시장 참여자들의 견해가 반영된 스왑선의 시장 가격에서 이자율 기간 구조의 변동 요인을 찾고자 한다. 50일 동안의 29개 스왑선 가격 자료에 대한 incremental likelihood ratio test을 이용하여 선도 이자율 변동에 영향을 주는 내재 요인(implied factor) 수를 결정한다. 자세한 방법은 아래에 계속해서 설명하도록 하겠다.

3. 2장에서 설명하였듯이 내재 공분산 행렬(implied covariance matrix)을 만들기 위해서는 사전

기간(ex ante)에서 계산된 과거 고유벡터(historical eigenvector, U)와 N 개의 고유값(eigenvalue)으로 구성된 대각 행렬이 필요하다. 고유값으로 구성된 대각 행렬(Ψ)을 구성할 때 N 개의 고유값을 제외하고는 모든 원소가 0이다. N 개의 고유값에 의해 공분산 행렬($\Sigma = U\Psi U$)이 계산되면 계수(rank)가 N 인 행렬이고 공분산 행렬은 N 개의 요인에 의해 설명된다.

고유값의 개수가 N 개에 대해 50일 동안 백분율 잔차제곱합(sum of squared percentage swaption pricing error)를 최소화 시켜주는 고유값을 찾는다. 백분율 잔차(percentage error)는 시장가격을 기준으로 계산된 string market 모형과 시장 가격과의 차이에 대한 백분율 잔차다. 그리고 50일 동안 총 백분율 잔차제곱합(total sum of squared error)을 계산한다. 그리고 고유값의 개수가 $N+1$ 일 경우에도 위와 같은 과정은 반복하여 $N+1$ 개의 고유값에 해당하는 총 백분율 잔차제곱합(total sum of squared error)을 계산한다. 서로간의 비교가 가능하게 하기 위하여 총 백분율 잔차제곱합을 계산할 때 고유값의 개수가 N 개의 경우나 $N+1$ 개인 경우 모두 동일한 난수(random number)를 사용한다. 두 집단의 차이가 없다는 귀무가설(null hypothesis) 하에서 $1450(=50 \times 29) \times (N$ 개의 고유값에 대한 로그 총잔차제곱합 - $N+1$ 개의 고유값에 대한 로그 총잔차제곱합)은 자유도가 50인 카이제곱 분포(χ_{50}^2) 따른다.

표 5는 incremental likelihood ratio test에 대한 결과를 정리하였다. 표 5에서 확인 할 수 있듯이 고유값의 개수가 1개와 2개인 경우만 99% 신뢰 수준에서 유의한 차이를 보이고 있고 나머지 경우에는 유의한 차이가 나타나지 않고 있다. 결과 얼마나 신뢰할 수 있는 지 여부를 조사하기 위하여 실증 분석 기간의 전기 25일과 후기 25일 구분하여 동일 테스트를 한 결과 표 5에서 확인 할 수 있듯이 50일에 대한 결과와 동일하게 나타나고 있다. 따라서 시장의 유럽형 스왑션 가격을 결정하는데 있어서 선도 이자율의 공분산 행렬에 영향을 주는 요인(implied factor)의 개수는 두 개라도 판단 할 수 있다. 더불어 기존 연구들은 채권의 이자율 기간 구조에서 이자율 변동 요인을 찾았지만 실증 분석을 하는 string market 모형에서는 스왑 이자율의 기간 구조에서 이자율의 변동 요인을 찾고 있어 다른 연구들과 다른 점이라 할 수 있다. 앞으로 실증 분석은 두 개의 고유값에서 계산되는 내재 변동성 상관 행렬을 이용해서 분석을 진행하도록 하겠다.

그림 5의 2개의 그림은 사전 기간(ex ante)에서 계산된 상관 행렬(H)의 첫 번째 고유 벡터와 두 번째 고유 벡터 기간별 가중치 자료이다. 고유 벡터 가중치의 그림이 연속적이지 않고 비연속적으로 나타나는 이유는 이자율의 기간 구조를 만들 때 Fama-Bliss unsmoothed bootstrapping 방법을 사용하였기 때문이다.

상관 행렬의 고유 벡터를 상관 구조에 영향을 주는 요인으로 볼 수 있다면 첫 번째 고유 벡터를 선도 이자율의 로그 증분에 대한 상관 구조에 영향을 주는 첫 번째 요인으로 볼 수 있고 두 번째 고유 벡터를 두 번째 요인으로 볼 수 있을 것이다. 첫 번째 요인은 다양한 이자율 움직임의 특징이 혼합

되어 있는 것으로 보여진다. 5년까지는 동일한 가중치를 가져서 평행이동(parallel shift) 요인으로 생각할 수 있지만 5년 이후에는 가중치의 변동폭이 커지면서 장기로 갈수록 가중치가 높아지는 것을 확인 할 수 있다. 전체적으로 보았을 때는 평행이동(parallel shift) 요인과 이자율 기간 구조의 기울기의 이동(shift in the slope of the term structure) 요인으로 생각 할 수 있다. 두 번째 요인은 단기와 장기의 이자율이 중기의 이자율과 반대 방향으로 움직이는 곡률(curvature) 요인으로 생각할 수 있다.

사후 기간(ex post)의 내재 공분산 행렬을 추정하기 위해 사용된 고유 벡터를 선도 이자율의 움직임을 설명하는 요인으로 생각한다면 추정된 내재 고유값(implied eigenvalue)은 요인들에 대한 변동성(variance)으로 볼 수 있다. 그림 6에서 확인 할 수 있듯이 첫 번째 고유값은 2003년 8월 14일 제외하고는 모든 실증 분석 기간에서 크게 변화하지 않는 안정적인 값을 보이고 있다. 두 번째 고유값 또한 모든 실증 분석 기간에서 크게 변화를 보이지 않는 안정적인 값을 보이고 있다. 따라서 사전 기간(ex ante)에 추정된 이자율의 움직임 요인인 고유 벡터들은 사후 실증 분석 기간에도 크게 변화를 보이지 않으면서 같은 영향을 주고 있는 것으로 판단 할 수 있다.

5. 2 내재 변동성 행렬

다음은 5. 1장의 likelihood ratio test에서 확인 결과인 고유값의 개수가 $N=2$ 를 이용하여 실증 분석 기간에 추정된 내재 상관 행렬이 실제적으로 같은 기간에 추정된 상관 행렬과 어떤 차이를 보이고 있는지 살펴보도록 하겠다. 먼저 실증 분석 기간 동안 추정된 내재 고유값을 이용하여 고유 벡터로 구성된 대각행렬(Ψ)을 구성한다. 대각행렬(Ψ)은 추정된 2개의 내재 고유값을 제외하고는 모든 0인 원소를 가진다. 사전 기간(ex ante)에서 추정된 과거 고유벡터(historical eigenvector, U)와 대각행렬(Ψ)을 이용하여 내재 공분산 행렬($\Sigma = U\Psi U$)을 계산한다. 그리고 내재 공분산 행렬을 표준화 하면 내재 상관 행렬을 얻을 수 있다. 위와 같은 과정을 실증 분석기간인 2002년 7월 16일부터 2003년 9월 24일까지 50일 동안 반복한다. 다음으로 50일간의 시계열 자료를 평균하여 표 6과 같은 실증 분석기간의 내재 상관 행렬을 계산한다. 표 7은 실증 분석 기간(ex post) 동안의 실제 3개월 선도 이자율의 로그 변화(log changes)의 상관 행렬 자료이고 표 8은 표 6과 표 7의 차이로 3개월 선도 이자율의 로그 변화(log changes)의 평균 내재 상관 행렬과 역사적 상관 행렬의 차이 자료이다.

표 8에서 확인할 수 있듯이 내재 상관 행렬(implied correlation)과 같은 기간의 실제 상관 행렬은 대각 원소를 제외하고는 체계적인 차이를 보이는 것을 확인 할 수 있다. 3년간 4년 사이와 다른 모든 기간 사이의 상관 관계 그리고 7년간 10년 사이와 1년과 2년 사이를 제외한 모든 기간 사이의 상관관계는 내재 상관 행렬이 실제의 상관 행렬보다 더 낮게 추정되고 있다. 그리고 위 두 가지 경우를 제외하고는 모든 기간에서 내재 상관 행렬은 실제의 상관 행렬보다 더 높게 추정되고 있다. 그 차이도 대부분 0.5이상의 값을 보이고 있다. 크게는 1까지 나타나고 있다.

내재 상관 행렬과 역사적인 실제 상관 행렬이 체계적 차이를 보이고 있는 원인은 크게 두 가지로 나누어서 살펴볼 수 있다. 가장 중요한 첫 번째로 원인으로 내재 고유값이 두 개만 추정됨으로 해서 역사적인 실제 상관 행렬의 복잡한 구조를 표현할 수 없었던 것을 생각할 수 있다. 고유값의 수가 적어짐으로 해서 행렬의 계수값(rank)이 줄어들게 되고 표 3에서처럼 내재 상관 행렬의 상관관계가 높게 나타나게 된 것으로 판단된다.

두 번째 원인으로 한국 스왑선 및 스왑 이자율의 특이성에서 발생하는 문제 일 수 있다. 그림 1에서 확인 할 수 있듯이 사전 기간(ex ante)의 선도 이자율의 기간 구조가 초기에는 단기의 선도 이자율이 장기의 선도 이자율보다 높았던 상태에서 시간이 지남에 따라 이자율의 기간 구조가 단기의 선도 이자율과 장기의 선도 이자율이 크게 차이가 없는 안정적인 구조로 변해 가는 것을 확인 할 수 있다. 그리고 그림 2에서 확인 할 수 있듯이 사후 기간 선도 이자율의 기간 구조는 중기가 단기와 장기보다 높은 구조를 가지고 있지만 선도 이자율이 크게 변하지 않는 안정적인 구조를 가지고 있는 것을 확인 할 수 있다. 이와 같은 특징은 표 1의 사전 기간(ex ante)의 상관 행렬과 표 7의 실증 분석 기간(ex post)의 상관 행렬을 비교 함으로써도 확인 할 수 있다. 그리고 그림 5와 그림 7에서 이와 같은 특징은 확인 할 수 있다. 사전 기간과 사후 기간의 상관 행렬의 첫 번째와 두 번째 고유 벡터가 비슷한 형태를 유지하고 있지만 기간에 따른 다른 가중치가 나타나고 있다. 따라서 사전 기간의 움직임과 실증 분석을 하는 사후 기간의 선도 이자율의 움직임의 상관 행렬 및 구조가 다르게 나타남에도 불구하고 사전 기간에 추정된 고유 벡터를 사후 기간에 계속해서 이용함으로써 위와 같은 문제를 개선시킬 수 있을 것이라 생각된다.

표 9는 3개월 선도 이자율의 로그 변화(log changes)의 내재 상관 행렬의 표준 편차이다. 내재 상관 행렬은 시간에 따라 고정된 값을 가지는 것이 아니고 추정되는 내재 고유값의 변동에 따라 변화를 하고 있다. 하지만 변화는 폭은 크지 않다. 대부분이 0.001보다 적은 값을 가지고 0.01보다 큰 값을 가지는 경우는 많지 않다.

5.3 스왑선 가격

String market 모형에서는 공분산 행렬의 구조(covariance structure)에 대해 시간 동질성(time homogeneity)과 공분산(Σ)은 일정 기간 동안 일정하다고 가정한다. 5.1장의 결과에 의하면 string market 모형은 29개의 스왑선 가격을 2개의 요인으로 설명을 한다. 따라서 모형에 제약이 존재하고 29개의 스왑선을 2개의 요인으로 설명함에 따라 모형 가격과 실제 가격과는 어느 정도의 차이가 발생하게 된다. 따라서 string market 모형이 얼마나 잘 시장의 스왑선 가격을 설명하고 있는지 살펴볼

필요성이 있다.

그림 8은 2003년 7월 16일부터 2003년 9월 24일까지 50일간의 실증 분석 기간 동안 2요인 string market 모형의 스왑션 가격과 실제 시장 스왑션 가격과의 차이를 시장 스왑션 가격을 기준으로 RMSE를 백분율로 표시한 시계열 자료이다. 중기의 2003년 8월 14일과 후기의 몇 일을 제외하고는 50%와 60% 사이의 RMSE값을 보이는 것을 확인 할 수 있다. 한국 스왑션이 평균 매수 호가와 매도 호가의 차이(bid-ask spread)가 2이고 1 매수 호가와 매도 호가의 차이(bid-ask spread)가 스왑션 가격의 6%을 나타내는 것을 고려한다면 적지 않은 가격 결정 에러(pricing error)가 발생하고 있다.²⁰.

먼저 표 10의 백분율 스왑션 가격 에러(percentage swaption errors)의 기초 통계량을 보면서 가격 결정 에러(pricing error)에 대해 살펴보도록 하겠다. 표 10은 2003년 7월 16일부터 2003년 9월 24일까지의 50일간의 string market 모형의 스왑션 가격과 실제 스왑션 가격과의 차이를 실제 스왑션 가격의 백분율로 표시한 자료의 기초 통계량이다. N 은 옵션의 만기까지의 기간, M 은 기초 자산인 스왑 계약 기간을 의미한다. 대부분의 1차 자기 상관이 0.5이상으로 높게 나타나는 것을 확인 할 수 있다. 이는 가격 결정 에러(pricing error)가 일시적인 현상이 아니고 실증 분석 기간 동안 계속해서 발생하는 것으로 판단할 수 있다. 평균의 t 통계량과 표준 편차는 1차 자기 상관에 관한 조정을 한 결과에서 확인 할 수 있듯이 가격 결정 에러는 모두 유의한 값을 보이는 것을 확인 할 수 있다.²¹.

스왑션의 옵션 만기가 3개월인 경우는 스왑 계약 기간이 3년 그리고 5년, 스왑션의 옵션 만기가 6개월 경우는 스왑 계약 기간이 3년 그리고 5년, 스왑션의 만기가 1년인 경우는 스왑 계약 기간이 2년 5년, 스왑션의 옵션 만기가 2년인 경우는 스왑의 계약 기간이 1년 2년에서 큰 가격 결정 에러(pricing error)가 발생하고 있다. 그리고 옵션 만기가 3년 이상인 경우는 옵션 만기 3년 스왑 계약 기간 5년과 7년을 제외하고는 모두 큰 가격 결정 에러(pricing error)가 발생하고 있다. 전체적으로 보았을 때는 옵션 만기가 2년 이하일 경우는 스왑 계약 기간이 3년 및 5년의 중기의 계약 기간을 가지는 스왑션의 가격 결정 에러(pricing error)가 크게 나타나고 있고 옵션 만기가 3년 이상의 경우는 일반적으로 큰 가격 결정 에러(pricing error)를 보이고 있다.

29개의 스왑션 상품 중 10개만이 양의 RMSE값을 보이고 나머지 19개 상품은 음의 RMSE값을 가진다. 그리고 가격 결정 에러가 큰 스왑션들의 경우 일반적으로 음의 값을 보이고 있고 가격 결정 에러가 적은 스왑션들의 경우 양의 값을 보이고 있다. 다시 말하면 가격 결정 에러가 크게 나타나는 스왑션들의 들의 경우는 string market 모형이 실제 스왑션 가격보다 더 낮은 가격을 추정하는 것이고 가격 결정 에러가 적게 나타나는 스왑션들의 들의 경우는 string market 모형이 실제 스왑션 가격보다

²⁰. Bloomberg에 의하면 일반적으로 스왑션에 대한 매수 호가와 매도 호가 차이(bid-ask spread)는 Black 모형에 의한 내재 변동성의 1 퍼센트(percent)로 공시된다 한다. 그리고 16 퍼센트(percent)의 내재 변동성으로 공시되는 스왑션의 경우 1 퍼센트 매수 호가와 매도 호가 차이(bid-ask spread)는 ATM 전도 스왑션(forward swaption) 가격의 6%을 설명한다고 한다.

²¹. Swaption errors(t)= $\alpha + \beta$ Swaption errors($t-1$)+ ε 의 식으로 1차 자기 상관을 조정한다. α 가 찾고자 하는 1차 자기 상관에 조정된 평균이다.

더 높은 가격을 추정한다. 전체적으로 보았을 때는 string market 모형이 실제 스왑선 가격보다 더 낮은 가격을 계산함으로써 높은 가격 결정 에러(pricing error)가 발생하고 있는 것으로 보여진다.

String market 모형이 한국의 스왑선 시장 가격을 정확하게 예측을 하지 못하는 이유를 크게 모형 측면과 한국 스왑선 시장의 특수성에 의한 것으로 나누어 생각해 볼 수 있을 것이다. 모형과 자료의 문제가 동시에 발생(joint-hypothesis problem)하는 것을 동시에 해결하기는 어렵지만 각각을 개별적으로 분리하여 원인을 생각해 볼 수 있을 것이다.

먼저 모형 측면에서 살펴보면 Longstaff, Santa-Clara와 Schwartz(2001)가 지적하였듯이 시간 동질성(time-homogeneity)의 조건이 너무 강하여 복잡한 선도 이자율의 증분에 관한 공분산 구조를 모형화 하는데 한계가 있었을 가능성이 있다. 더불어 앞서 언급하였듯이 내재 고유값이 두 개만 추정됨으로써 역사적인 실제 상관 행렬의 복잡한 구조를 표현할 수 없었던 것도 한 원인으로 생각할 수 있다. 고유값의 수가 적어짐으로써 행렬의 계수값(rank)이 줄어들게 되고 표 3에서처럼 내재 상관 행렬의 상관 관계가 서로간에 높게 나타나게 된다. 그리고 적은 내재 요인으로서 29개의 스왑선 가격을 설명하는데 발생하는 에러 문제도 적지 않은 영향을 미친다.

두 번째로 한국 스왑선 및 스왑 이자율의 특수성에서 발생하는 문제 일 수 있다. 그림 1과 그림 2에서 보듯이 사전 기간과 사후 기간은 서로 다른 이자율의 기간 구조를 가지고 있다. 사후 기간 선도 이자율의 기간 구조는 중기가 단기와 장기보다 높은 구조를 가지고 있지만 선도 이자율이 크게 변하지 않는 안정적인 구조를 가지고 있는 것을 확인 할 수 있다. 따라서 사전 기간의 움직임과 실증 분석을 하는 사후 기간의 선도 이자율의 움직임의 상관 행렬 및 구조가 다르게 나타남에도 불구하고 사전 기간에 추정된 고유 벡터를 사후 기간에 계속해서 이용함으로써 나타나는 오류인 것으로 판단된다. Longstaff, Santa-Clara와 Schwartz(2001)가 지적하였듯이 시간의 흐름에 따라 공분산 및 상관관계 구조를 변화하는 모형(time-varying covariance structure)을 이용함으로써 위와 같은 문제를 개선시킬 수 있을 것이라 생각된다.

그리고 한가지 주의해야 할 부분이 있다. 실증 분석 기간의 후기에 가게 되면 다른 기간과 달리 선도 이자율의 기간 구조가 기간별로 아주 미미한 차이만 있는 평행(flat)한 이자율 기간 구조를 가진다. 그림 7의 string market 모형의 스왑선 가격의 RMSE 시계열 자료를 보면 실증 분석 기간의 후기의 평행한 선도 이자율의 기간 구조를 가지는 부분의 RMSE은 크게 줄어드는 것을 확인할 수 있다. 표 12의 RMSE가 크게 줄어드는 실증 분석 기간의 후기 5일간의 기초 통계량을 살펴보면 모든 실증 분석 기간의 기초 통계량과 달리 3년 및 5년의 옵션 만기를 가지는 스왑선의 가격 결정 에러(pricing error)가 크게 줄어드는 것을 확인 할 수 있다. 이자율의 기간 구조도 가격 결정 에러(pricing error)에 영향을 주고 있는 것을 확인 할 수 있다. 이자율 기간 구조에 따라 가격 결정 에러가 달라지는 특징은 더 많은 연구가 필요한 부분으로 생각된다.

5. 4 캡과 스왑선의 상대가격

String market 모형에서는 이자율 파생 상품에 발생하는 현금 흐름은 이자율의 기간 구조를 결정하는 기초적인 선도 이자율을 이용하여 표현이 가능하다. 따라서 스왑선(swaption)의 시장가격에서 선도 이자율의 변화에 대한 공분산 행렬(Σ)이 추정되면 캡(cap) 및 플로어(floor)와 같은 다른 이자율 파생상품은 string market 모형에 의해서 가격 결정이 이루어 지게 된다. Merton(1973)의 무차익 조건(no-arbitrage condition)에 의하면 공분산 행렬(Σ)은 포트폴리오의 옵션 가격과 옵션의 포트폴리오 가격의 관계를 규정한 것처럼 포트폴리오의 옵션과 옵션의 포트폴리오 관계에 있는 스왑선과 캡은 일정한 관계를 유지하게 된다. 즉, 무 차익 거래 기회가 없다면 스왑선 시장에서 결정된 캡 가격은 실제의 시장가격과 일치해야 한다. 본 장에서 스왑선(swaption)의 시장가격에서 추정된 선도 이자율의 변화에 대한 공분산 행렬(Σ)을 이용하여 캡(cap) 가격 및 캡 시장의 특징에 대해 살펴보겠다. 그리고 포트폴리오의 옵션과 옵션의 포트폴리오 관계에 있는 스왑선과 캡이 실증 분석 기간 동안 Merton(1973) 무차익 조건(no-arbitrage condition)을 만족 시키고 있는지 살펴보도록 하겠다. 본 장에서도 계속해서 5. 1장의 likelihood ratio test의 결과인 2개의 내재 고유값(implied eigenvalue)을 사용하도록 하겠다.

계속해서 선도 이자율 변화에 대한 공분산 행렬을 이용하여 캡 가격을 결정하는 방법을 자세히 살펴보도록 하겠다. 실증 분석 기간 (ex post) 동안 추정된 내재 공분산 행렬의 대각 원소는 개별 선도 이자율의 변동성(variance)을 나타내고 있다. 그리고 Black(1976)에 의해 개별 캡플릿(caplet)의 closed-form 해가 식 (1)로 주어져 있기 때문에 캡플릿 가치 계산시 시뮬레이션 과정이 필요치 않다. 식 (1)과 이자율의 기간 구조 (term structure)을 이용하여 개별 캡플릿 (caplet)의 가치를 결정할 수 있다. 식 (7)에서 선도 이자율에 대해서 로그 정규 동학(lognormal dynamics)을 가정하고 있기 때문에 식 (1)의 Black 모형을 이용하여 개별 캡플릿 의 가치를 계산할 수 있다. 개별 캡플릿은 3개월 단위로 이루어져 있기 때문에 첫 번째 캡플릿의 분산은 대각 행렬의 첫 번째 원소가 되고 두 번째 캡플릿의 분산 첫 번째 대각행렬과 두 번째 원소의 평균으로 계산이 가능하다. 이와 같은 방법으로 해서 39번째 캡플릿까지 분산을 계산할 수 있고 캡플릿의 가치를 식 (1)을 이용하여 계산할 수 있다. 마지막으로 캡은 캡플릿들의 포트폴리오이기 때문에 개별 캡플릿의 가치를 합하게 되면 캡의 가격을 계산할 수 있다.

표 16에서 확인 할 수 있듯이 string market 모형을 이용하여 계산된 캡 가격이 실제 가격과 동일하다는 가정은 모든 만기에서 기각된다. 모든 만기에 음의 평균을 가지고 있다. 이는 모형에서 계산된 캡 가격의 실제의 캡 가격보다 더 낮게 계산된 것을 의미하고 스왑선 시장에서 string market 모형을 이용하여 추정된 변동성이 실제 캡 시장의 변동성 보다 낮다는 것을 의미한다. 추정된 변동성

만기가 짧은 곳의 가격 결정 에러(pricing error)는 큰 반면 만기가 길어질수록 가격 결정 에러(pricing error)가 줄어들고 있다.

옵션의 포트폴리오는 포트폴리오의 옵션보다 크거나 같은 값을 가져야 하는 Merton(1973) 무차익 조건(no-arbitrage condition)에 대해서 살펴보도록 하겠다. 내재 공분산 행렬의 완전 상관을 가정하기 위하여 한 개의 내재 고유값을 이용하여 선도 이자율이 완전 상관을 가지는 내재 공분산 행렬을 계산한다.²² 그리고 완전 상관을 가지는 내재 공분산 행렬을 이용하면 캡 가격을 계산하여 옵션의 포트폴리오 즉 캡 가격의 하한 값(lower bound)을 계산 할 수 있다. 표 17에서 모든 만기에 모형 가격과 실제 가격의 차이에 대한 가격 에러는 모든 음의 값을 가지고 있는 것을 알 수 있다. 이는 실제 캡 가격은 모든 만기에서 캡 가격의 하한 값(lower bound)보다 높은 값을 가지는 것을 의미하고 Merton(1973) 무차익 조건(no-arbitrage condition)을 만족하고 있는 것으로 판단 할 수 있다.

제 6 장 결론 및 향후 연구 과제

6.1 결론

String market 모형을 이용하여 한국 이자율 파생상품 시장에 대해 살펴본 결과 한국의 스왑선 시장에서 관찰한 선도 이자율의 변동에 영향을 주는 요인은 두 가지로 나타나고 있다. 그리고 스왑선의 경우 옵션의 만기가 길어질수록 시장 가격이 모형 가격에 비교하여 고 평가되어 있는 현상이 커지는 것으로 나타나고 있었다. 그리고 큰 가격 결정 에러를 보이는 곳은 시장 가격이 모형 가격에 비하여 고 평가 되어 있고 가격 결정 에러가 적은 곳에서는 모형 가격이 시장에 비하여 고 평가 되어 있었다. 전체적으로 보았을 때는 시장 가격이 모형 가격보다 고 평가 되어 있었다.

하지만 본문에서 지적했던 것처럼 시간 동질성(time-homogeneity)의 가정은 서로 다른 선도 이자율의 증분 사이의 상관관계가 높지 않고 복잡한 구조를 가지는 한국 시장을 설명하는데 한계점이 나타났다. 그리고 사전 기간과 사후 기간의 상관관계 구조가 변화하는 경우에 사전 기간에 추정된 역사적 고유벡터를 이용해야 한다는 문제점이 드러났다. 이 문제는 Longstaff, Santa-Clara와 Schwartz(2001)가 지적하였듯이 시간의 흐름에 따라 공분산 및 상관관계 구조를 변화하는 모형(time-varying covariance structure)을 이용해서 분석해야 할 필요가 있었다. 더불어 이자율의 기간 구조의 형태에 따라 가격 결정 에러가 달라지는 특징은 더 많은 연구가 필요한 부분이다.

마지막으로 스왑선 시장에서 추정된 내재 공분산 행렬을 이용하여 캡의 상대가격과 Merton(1973)의 무차익 조건(no-arbitrage condition)에 대해서 살펴보았다. 시장 가격이 모형 가격과 비교하여 고평가 되어 형성되고 있는 것으로 나타났고 모형의 저평가 원인으로는 스왑선 시장에서 내재

²². 한 개의 내재 고유값만을 이용하면 내재 공분산의 계수(rank)는 1이 되고 모든 선도 이자율이 완전 상관을 가진 내재 공분산 행렬이 계산된다.

공분산 구조가 낮게 추정되었기 때문인 것으로 판단된다. 그리고 캡과 스왑션 사이의 Merton(1973)의 무차익 거래 조건(no-arbitrage condition)은 성립하는 것으로 나타났다.

6.2 향후 연구 과제 및 미비점

자료의 부족과 시뮬레이션 시간 상의 문제로 시뮬레이션을 할 때 공분산 구조의 시간 간격을 역사적 고유벡터의 추정 간격인 일간 단위로 맞출 수 없었던 부분은 전체적인 연구의 아쉬움으로 남는다. 더 정확한 분석의 결과를 얻기 위해서는 일간 단위의 시간 간격 보다는 주간 단위의 분석을 하는 것이 장기적인 시장의 움직임을 분석하는데 더 올바른 방법일 것이라 판단된다. 더불어 시장이 아직 발전 단계에 있는 우리나라의 특수성을 고려하면 본문에서도 지적했던 것처럼 시간의 흐름에 따라 공분산 및 상관관계 구조를 변화하는 모형(time-varying covariance structure)을 이용하여 이자율 파생상품을 분석할 필요성이 든다.

참 고 문 헌

- [1] 한상일, “LIBOR 시장 모형을 이용한 KRW 이자율 옵션 시장의 적합”, working paper.
- [2] Alan Brace, Dariusz Batarek and Marek Musiela, “The Market Model of Interest Rate Dynamics”, *Mathematical Finance*, Vol. 7, No. 2, pp 127–147, 1997
- [3] Black, Fischer, “The Pricing of Commodity contracts”, *Journal of Financial Economics*, Vol. 3, pp 167–179, 1976
- [4] Collin-Dufresne, Peirre, and Robert S. Goldstein, “True Stochastic Volatility and Generalized Affine Models of the Term Structure”, Working Paper, 2000
- [5] David Backus, Silverio Foresi, Abon Mozumdar, and Liuren Wu, “Predictable Changes in Yields and Forward Rates”, Working Paper
- [6] Eugene F. Fama, Robert R. Bliss “The Information in Long–Maturity Forward Rates”, *The American Economic Review*, Vol. 77, No. 4, pp 680–692, 1987
- [7] Goldstein, Robert S., “The Term Structure of Interest Rates as a Random field”, *Review of Financial Studies*, Vol. 13, No. 2, pp 365–384, 2000
- [8] Heath, David, Robert Jarrow, and Andrew Morton, “Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rate : A New Methodology”, *Econometrica*, Vol. 60, No. 1, pp 77–105, 1992

- [9] Jamishidian, Farshid, "Libor and Swap Market Models and Measures", *Finance and Stochastics*, Vol. 1, No. 4, pp 290–330, 1997
- [10] Kennedy, Douglas P., "The Term Structure of Interest Rates as a Gaussian Random Field", *Mathematical Finance*, Vol. 4, pp 247–258, 1994
- [11] Kennedy, Douglas P., "Characterizing Gaussian Models of the Term Structure of Interest Rates", *Mathematical Finance*, Vol. 7, pp 107–117, 1997
- [12] Longstaff, Francis A., Pedro Santa-Clara, and Eduardo S. Schwartz "The Relative Valuation of Caps and Swaptions : Theory and Empirical Evidence", *The Journal of Finance*, Vol. LVI, No. 6, pp 2067–2109, 2001
- [13] Merton, Robert C., "The Theory of Rational Option Pricing", *Bell Journal of Economics and Management Science*, Vol. 4, No. 1, pp 141–183, 1973
- [14] Pedro Santa-Clara, Didier Sornette, "The Dynamics of the Forward Interest Rate curve with Stochastic String Shocks", *The Review of Financial Studies*, Vol. 14, No. 1, pp 149–185, 2001
- [15] Peter J Knez, Robert Litterman, Jose Scheinkman, "Exploration Into Factors Explaining Money Market Returns", *The Journal of Finance*, Vol. 49, No. 5, pp 1861–1882, 1994
- [16] Robert R. Bliss, "Testing Term Structure Estimation Method", *Advances in Futures and Options Research*, Vol. 9, pp 197–231, 1997

표 2, ATM(at-the-money)의 유럽형 스왑선 변동의 기초통계량

아래 자료는 2003년 7월 16일부터 2003년 9월 24일까지의 50일간의 자료이며 Black model을 이용하여 계산된 내재 변동성의 closing 가격이다. N 은 옵션의 만기, M 은 기초 자산인 스왑 계약 기간을 의미한다.

N	M	Mean	Standard Deviation	Minimum	Median	Maximum	Serial Correlation
0.25	1.0	24.01	0.89	22.50	23.80	27.00	0.9026
0.25	2.0	24.37	1.03	21.00	24.80	25.50	0.8954
0.25	3.0	23.86	1.45	20.00	24.00	26.00	0.6332
0.25	5.0	22.98	1.74	19.30	23.00	26.50	0.7045
0.25	7.0	22.55	1.62	19.50	22.50	26.00	0.8938
0.50	1.0	24.04	1.02	22.00	23.80	25.50	0.8841
0.50	2.0	23.92	1.13	21.30	24.00	25.50	0.7192
0.50	3.0	23.47	1.33	19.50	23.50	25.50	0.5995
0.50	5.0	22.57	1.70	19.00	22.50	26.00	0.7236
0.50	7.0	21.90	1.43	18.50	22.00	24.80	0.6545
1.00	1.0	23.57	1.20	21.50	23.50	25.50	0.9093
1.00	2.0	23.06	1.37	19.00	22.80	25.50	0.6058
1.00	3.0	22.57	1.32	18.50	22.50	25.00	0.5598
1.00	5.0	21.42	1.12	18.30	21.50	23.50	0.5645
1.00	7.0	21.21	1.08	18.30	21.50	23.30	0.6142
2.00	1.0	22.35	1.08	21.00	22.00	24.50	0.9102
2.00	2.0	21.75	1.25	18.30	21.50	24.50	0.6294
2.00	3.0	21.06	1.26	18.00	20.80	23.80	0.6433
2.00	5.0	20.51	1.03	18.00	20.80	22.30	0.6539
2.00	7.0	20.39	1.00	17.80	20.50	22.30	0.6807
3.00	1.0	21.45	1.19	19.50	21.50	24.30	0.9199
3.00	2.0	20.55	1.05	17.50	20.50	22.50	0.5643
3.00	3.0	19.82	0.99	17.30	19.80	21.80	0.6062
3.00	5.0	19.55	0.79	17.30	19.50	20.50	0.5527
3.00	7.0	19.12	0.55	17.30	19.30	19.80	0.5313
5.00	1.0	19.69	0.75	18.30	19.80	20.50	0.6025
5.00	2.0	18.99	0.55	17.00	19.30	19.80	0.5934
5.00	3.0	18.85	0.61	16.50	19.00	19.50	0.5984
5.00	5.0	18.50	0.59	16.50	18.50	19.50	0.5781

표 3, ATM(at-the-money)의 유럽형 스왑션 가격의 기초통계량

아래 자료는 2003년 7월 16일부터 2003년 9월 24일까지의 50일간의 자료이며 시장에 공시된 내재 변동성을 식 (6)에 대입하여 계산하였다. N 은 옵션의 만기, M 은 기초 자산인 스왑 계약 기간을 의미한다.

N	M	Mean	Standard Deviation	Minimum	Median	Maximum	Serial Correlation
0.25	1.0	0.00146	0.00007	0.00126	0.00149	0.00161	0.83190
0.25	2.0	0.00297	0.00016	0.00257	0.00302	0.00322	0.82544
0.25	3.0	0.00448	0.00024	0.00388	0.00455	0.00479	0.75861
0.25	5.0	0.00730	0.00040	0.00633	0.00750	0.00782	0.75397
0.25	7.0	0.00989	0.00051	0.00856	0.01005	0.01068	0.70803
0.50	1.0	0.00209	0.00011	0.00181	0.00213	0.00228	0.82643
0.50	2.0	0.00423	0.00023	0.00366	0.00429	0.00455	0.80465
0.50	3.0	0.00632	0.00035	0.00549	0.00642	0.00679	0.75050
0.50	5.0	0.01029	0.00056	0.00892	0.01054	0.01103	0.74217
0.50	7.0	0.01384	0.00071	0.01199	0.01404	0.01493	0.70671
1.00	1.0	0.00301	0.00016	0.00261	0.00308	0.00324	0.80520
1.00	2.0	0.00606	0.00037	0.00525	0.00618	0.00649	0.72680
1.00	3.0	0.00896	0.00049	0.00777	0.00911	0.00967	0.68509
1.00	5.0	0.01444	0.00079	0.01252	0.01471	0.01552	0.71521
1.00	7.0	0.01923	0.00098	0.01665	0.01952	0.02065	0.69552
2.00	1.0	0.00430	0.00034	0.00329	0.00430	0.00474	0.55158
2.00	2.0	0.00836	0.00050	0.00694	0.00849	0.00908	0.57532
2.00	3.0	0.01234	0.00075	0.01039	0.01272	0.01328	0.64500
2.00	5.0	0.01977	0.00110	0.01700	0.02008	0.02140	0.63622
2.00	7.0	0.02592	0.00127	0.02242	0.02636	0.02764	0.64854
3.00	1.0	0.00498	0.00032	0.00423	0.00492	0.00574	0.52737
3.00	2.0	0.00985	0.00056	0.00854	0.01007	0.01062	0.67767
3.00	3.0	0.01450	0.00078	0.01257	0.01467	0.01584	0.69177
3.00	5.0	0.02278	0.00110	0.01971	0.02305	0.02470	0.67007
3.00	7.0	0.02998	0.00132	0.02590	0.03054	0.03203	0.65384
5.00	1.0	0.00599	0.00041	0.00512	0.00588	0.00674	0.42966
5.00	2.0	0.01170	0.00078	0.01006	0.01150	0.01316	0.42695
5.00	3.0	0.01664	0.00080	0.01439	0.01661	0.01816	0.50038
5.00	5.0	0.02592	0.00107	0.02236	0.02632	0.02760	0.54276

표 4, ATM(at-the-money)의 캡 변동의 기초통계량

아래 자료는 2003년 7월 16일부터 2003년 9월 24일까지의 50일간의 자료이며 Black model을 이용하여 계산된 내재 변동성 시장 종가의 중간 가격(mid price)이다. M 은 캡의 만기를 의미한다.

M	Mean	Standard Deviation	Minimum	Median	Maximum	Serial Correlation
1.00	21.55	1.48	17.00	21.50	25.00	0.3292
2.00	22.41	1.01	18.50	22.50	24.00	0.4891
3.00	22.82	1.14	19.00	23.00	24.50	0.5860
5.00	22.02	1.05	18.30	22.00	24.25	0.5144
7.00	21.06	0.88	17.50	21.00	23.00	0.4944
10.00	20.25	0.76	17.30	20.00	22.00	0.5159

표 5, 유럽형 스왑션 가격의 내재 인자(Implied Factors) 수의 Likelihood Ratio Tests

아래 표는 선도 이자율의 변동 요인에 대한 pair wise likelihood ratio test 결과에 통계량이다. 모델 스왑션 가격과 시장 스왑션 가격의 잔차제곱합(sum of square error, SSE)을 최소화 하는 N 개의 내재 고유값(implied eigenvalue)과 $N+1$ 개의 내재 고유값(implied eigenvalue)을 찾는다. 이때 N 개의 내재 고유값(implied eigenvalue)에서 계산된 잔차제곱합(SSE)과 $N+1$ 개의 내재 고유값(implied eigenvalue)에서 계산된 잔차제곱합의 차이는 두 값이 동일하다는 귀무가설(null hypothesis)하에서 근사적으로 χ^2_{50} 을 따른다. 어떤 주어진 고유값(eigenvalue) 벡터를 이용하여 고유값으로 구성된 대각 행렬을 구성하고 대각 행렬과 사전 기간(ex ante)기간 동안 추정된 역사 고유 벡터(eigenvector)를 이용하여 내재 공분산 행렬을 계산한다. String market model과 공분산 행렬을 이용하여 2000개의 이자율 기간 구조에 대한 패스(path)을 생성하고 개별 스왑션 가격을 계산한다. 이자율 기간 구조의 패스(path)를 생성할 때 동일한 난수(random number)를 사용하였다. 2003년 7월 16일부터 2003년 9월 24일까지 29개의 스왑션 가격에 대한 50일 동안의 자료로 구성되어 있다. χ^2_{50} 분포 99% 신뢰 수준의 임계값(critical value)은 76.2이고 χ^2_{25} 분포 99% 신뢰 수준의 임계값(critical value)은 44.3이다.

Factor의 수 (N)	Factor의 수 (N+1)	Test Statistics	p-value
A. Full Sample Period			
1	2	423.0594	0.0000
2	3	38.3403	0.8856
3	4	0.0529	1.0000
4	5	0.0001	1.0000
B. First Half of the Sample Period			
1	2	200.5122	0.0000
2	3	18.0061	0.8421
3	4	0.0262	1.0000
4	5	0.0001	1.0000
C. Second Half of the Sample Period			
1	2	225.1334	0.0000
2	3	20.6369	0.7128
3	4	0.0268	1.0000
4	5	0.0001	1.0000

표 6, 실증분석 기간의 3개월 선도 이자율의 로그 증분 내재 상관행렬

2002년 7월 16일부터 2003년 9월 24일까지의 50일간의 사후 기간(ex ante) 동안 추정된 일간 내재 고유값(daily implied eigenvalue)과 사전 기간(ex ante)에 추정된 고유벡터로 계산된 일간 내재 공분산 행렬을 표준화 하여 내재 상관 행렬을 계산하였다. 일간 내재 상관 행렬을 50일간 평균하여 내재 상관 행렬을 계산하였다.

0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25	2.50	2.75	3.00	3.25	3.50	3.75	4.00	4.25	4.50	4.75	5.00	5.25	5.50	5.75	6.00	6.25	6.50	6.75	7.00	7.25	
0.25	1.0000																												
0.50	1.0000	1.0000																											
0.75	1.0000	1.0000	1.0000																										
1.00	0.6988	0.6988	0.6988	1.0000																									
1.25	0.6988	0.6988	0.6988	1.0000	1.0000																								
1.50	0.6988	0.6988	0.6988	1.0000	1.0000	1.0000																							
1.75	0.6988	0.6988	0.6988	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000																						
2.00	0.936	0.936	0.936	0.905	0.905	0.905	0.905	1.0000																					
2.25	0.936	0.936	0.936	0.905	0.905	0.905	0.905	1.0000	1.0000																				
2.50	0.936	0.936	0.936	0.905	0.905	0.905	0.905	1.0000	1.0000	1.0000																			
2.75	0.936	0.936	0.936	0.905	0.905	0.905	0.905	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000																		
3.00	-0.900	-0.900	-0.900	-0.940	-0.940	-0.940	-0.940	-0.996	-0.996	-0.996	-0.996	1.0000																	
3.25	-0.900	-0.900	-0.900	-0.940	-0.940	-0.940	-0.940	-0.996	-0.996	-0.996	-0.996	1.0000	1.0000																
3.50	-0.900	-0.900	-0.900	-0.940	-0.940	-0.940	-0.940	-0.996	-0.996	-0.996	-0.996	1.0000	1.0000	1.0000															
3.75	-0.900	-0.900	-0.900	-0.940	-0.940	-0.940	-0.940	-0.996	-0.996	-0.996	-0.996	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000														
4.00	0.687	0.687	0.687	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.898	0.898	0.898	0.898	0.898	-0.935	-0.935	-0.935	-0.935	1.0000												
4.25	0.687	0.687	0.687	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.898	0.898	0.898	0.898	0.898	-0.935	-0.935	-0.935	-0.935	1.0000	1.0000											
4.50	0.687	0.687	0.687	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.898	0.898	0.898	0.898	0.898	-0.935	-0.935	-0.935	-0.935	1.0000	1.0000	1.0000										
4.75	0.687	0.687	0.687	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.898	0.898	0.898	0.898	0.898	-0.935	-0.935	-0.935	-0.935	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000									
5.00	0.941	0.941	0.941	0.416	0.416	0.416	0.416	0.763	0.763	0.763	0.763	-0.700	-0.700	-0.700	-0.700	0.401	0.401	0.401	0.401	1.0000									
5.25	0.941	0.941	0.941	0.416	0.416	0.416	0.416	0.763	0.763	0.763	0.763	-0.700	-0.700	-0.700	-0.700	0.401	0.401	0.401	0.401	1.0000	1.0000								
5.50	0.941	0.941	0.941	0.416	0.416	0.416	0.416	0.763	0.763	0.763	0.763	-0.700	-0.700	-0.700	-0.700	0.401	0.401	0.401	0.401	1.0000	1.0000	1.0000							
5.75	0.941	0.941	0.941	0.416	0.416	0.416	0.416	0.763	0.763	0.763	0.763	-0.700	-0.700	-0.700	-0.700	0.401	0.401	0.401	0.401	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000						
6.00	0.941	0.941	0.941	0.416	0.416	0.416	0.416	0.763	0.763	0.763	0.763	-0.700	-0.700	-0.700	-0.700	0.401	0.401	0.401	0.401	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000					
6.25	0.941	0.941	0.941	0.416	0.416	0.416	0.416	0.763	0.763	0.763	0.763	-0.700	-0.700	-0.700	-0.700	0.401	0.401	0.401	0.401	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000				
6.50	0.941	0.941	0.941	0.416	0.416	0.416	0.416	0.763	0.763	0.763	0.763	-0.700	-0.700	-0.700	-0.700	0.401	0.401	0.401	0.401	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000			
6.75	0.941	0.941	0.941	0.416	0.416	0.416	0.416	0.763	0.763	0.763	0.763	-0.700	-0.700	-0.700	-0.700	0.401	0.401	0.401	0.401	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000		
7.00	-0.446	-0.446	-0.446	0.328	0.328	0.328	0.328	-0.104	-0.104	-0.104	-0.104	0.013	0.013	0.013	0.013	0.343	0.343	0.343	0.343	-0.722	-0.722	-0.722	-0.722	-0.722	-0.722	-0.722	-0.722	-0.722	
7.25	-0.446	-0.446	-0.446	0.328	0.328	0.328	0.328	-0.104	-0.104	-0.104	-0.104	0.013	0.013	0.013	0.013	0.343	0.343	0.343	0.343	-0.722	-0.722	-0.722	-0.722	-0.722	-0.722	-0.722	-0.722	-0.722	
7.50	-0.446	-0.446	-0.446	0.328	0.328	0.328	0.328	-0.104	-0.104	-0.104	-0.104	0.013	0.013	0.013	0.013	0.343	0.343	0.343	0.343	-0.722	-0.722	-0.722	-0.722	-0.722	-0.722	-0.722	-0.722	-0.722	
7.75	-0.446	-0.446	-0.446	0.328	0.328	0.328	0.328	-0.104	-0.104	-0.104	-0.104	0.013	0.013	0.013	0.013	0.343	0.343	0.343	0.343	-0.722	-0.722	-0.722	-0.722	-0.722	-0.722	-0.722	-0.722	-0.722	
8.00	-0.446	-0.446	-0.446	0.328	0.328	0.328	0.328	-0.104	-0.104	-0.104	-0.104	0.013	0.013	0.013	0.013	0.343	0.343	0.343	0.343	-0.722	-0.722	-0.722	-0.722	-0.722	-0.722	-0.722	-0.722	-0.722	
8.25	-0.446	-0.446	-0.446	0.328	0.328	0.328	0.328	-0.104	-0.104	-0.104	-0.104	0.013	0.013	0.013	0.013	0.343	0.343	0.343	0.343	-0.722	-0.722	-0.722	-0.722	-0.722	-0.722	-0.722	-0.722	-0.722	
8.50	-0.446	-0.446	-0.446	0.328	0.328	0.328	0.328	-0.104	-0.104	-0.104	-0.104	0.013	0.013	0.013	0.013	0.343	0.343	0.343	0.343	-0.722	-0.722	-0.722	-0.722	-0.722	-0.722	-0.722	-0.722	-0.722	
8.75	-0.446	-0.446	-0.446	0.328	0.328	0.328	0.328	-0.104	-0.104	-0.104	-0.104	0.013	0.013	0.013	0.013	0.343	0.343	0.343	0.343	-0.722	-0.722	-0.722	-0.722	-0.722	-0.722	-0.722	-0.722	-0.722	
9.00	-0.446	-0.446	-0.446	0.328	0.328	0.328	0.328	-0.104	-0.104	-0.104	-0.104	0.013	0.013	0.013	0.013	0.343	0.343	0.343	0.343	-0.722	-0.722	-0.722	-0.722	-0.722	-0.722	-0.722	-0.722	-0.722	
9.25	-0.446	-0.446	-0.446	0.328	0.328	0.328	0.328	-0.104	-0.104	-0.104	-0.104	0.013	0.013	0.013	0.013	0.343	0.343	0.343	0.343	-0.722	-0.722	-0.722	-0.722	-0.722	-0.722	-0.722	-0.722	-0.722	
9.50	-0.446	-0.446	-0.446	0.328	0.328	0.328	0.328	-0.104	-0.104	-0.104	-0.104	0.013	0.013	0.013	0.013	0.343	0.343	0.343	0.343	-0.722	-0.722	-0.722	-0.722	-0.722	-0.722	-0.722	-0.722	-0.722	
9.75	-0.446	-0.446	-0.446	0.328	0.328	0.328	0.328	-0.104	-0.104	-0.104	-0.104	0.013	0.013	0.013	0.013	0.343	0.343	0.343	0.343	-0.722	-0.722	-0.722	-0.722	-0.722	-0.722	-0.722	-0.722	-0.722	

	0.25~0.75	1.00~1.75	2.00~2.75	3.00~3.75	4.00~4.75	5.00~6.75	7.00~9.75
0.25~0.75	1.0000						
1.00~1.75	0.6982	1.0000					
2.00~2.75	0.9362	0.9052	1.0000				
3.00~3.75	-0.9002	-0.9402	-0.9958	1.0000			
4.00~4.75	0.6869	0.9999	0.8985	-0.9348	1.0000		
5.00~6.75	0.9413	0.4156	0.7626	-0.7004	0.4014	1.0000	
7.00~9.75	-0.4464	0.3284	-0.1037	0.0126	0.3430	-0.7222	1.0000

표 8, 3개월 선도 이자율의 로그 변화(log changes)의 평균 내재 상관 행렬과 역사적 상관 행렬의 차이
 2002년 7월 16일부터 2003년 9월 24일까지의 50일 동안 계산된 평균 내재 상관 행렬과 역사적 상관 행렬과의 차
 이를 나타낸 것이다.

0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25	2.50	2.75	3.00	3.25	3.50	3.75	4.00	4.25	4.50	4.75	5.00	5.25	5.50	5.75	6.00	6.25	6.50	6.75	7.00	7.25	
0.000																													
0.000	0.000																												
0.000	0.000	0.000																											
0.000	0.000	0.000	0.000																										
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000																									
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000																								
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000																							
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000																						
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000																					
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000																				
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000																			
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000																		
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000																	
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000																
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000															
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000														
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000													
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000												
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000											
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000										
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000									
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000								
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000							
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000						
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000					
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000				
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000			
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000		
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

	0.25~0.75	1.00~1.75	2.00~2.75	3.00~3.75	4.00~4.75	5.00~6.75	7.00~9.75
0.25~0.75	0.0000						
1.00~1.75	0.3931	0.0000					
2.00~2.75	0.9333	0.7739	0.0000				
3.00~3.75	-1.0507	-0.9777	-0.7365	0.0000			
4.00~4.75	0.7835	1.2102	0.5649	-0.7342	0.0000		
5.00~6.75	0.8712	0.1556	0.3981	-0.8132	0.5589	0.0000	
7.00~9.75	-0.4635	0.2316	-0.5576	-0.0082	0.0624	-0.3811	0.0000

표 10, Percentage Swaption Errors의 기초 통계량

아래 자료는 2003년 7월 16일부터 2003년 9월 24일까지의 50일간의 string market model 스왑션 가격과 실제 스왑션 가격과의 차이를 실제 스왑션 가격의 백분율로 표시한 자료의 기초 통계량이다. N 은 옵션의 만기까지의 기간, M 은 기초 자산인 스왑 계약 기간을 의미한다. 평균의 t 통계량과 표준 편차는 1차 자기 상관에 관한 조정을 한 결과이다.

N	M	Mean	t-Stat Mean	Standard Deviation	Minimum	Median	Maximum	Serial Correlation
0.25	1.00	-9.10	-8.79	1.092	-28.271	-8.545	10.619	0.764
0.25	2.00	5.05	5.05	0.359	-0.565	4.544	13.700	0.485
0.25	3.00	35.33	35.27	0.285	31.486	35.602	43.695	0.442
0.25	5.00	-34.26	-34.34	0.253	-37.350	-34.580	-26.531	0.526
0.25	7.00	7.30	7.31	0.043	6.162	7.378	7.854	0.189
0.50	1.00	36.11	36.54	1.481	11.108	36.673	63.727	0.751
0.50	2.00	5.54	5.63	0.568	-6.697	4.924	13.972	0.452
0.50	3.00	29.24	29.19	0.327	25.403	28.729	38.153	0.402
0.50	5.00	-36.37	-36.42	0.170	-38.727	-36.611	-30.641	0.245
0.50	7.00	2.81	2.81	0.159	1.535	2.618	8.898	0.410
1.00	1.00	6.63	6.01	4.036	-29.607	-7.883	68.993	0.901
1.00	2.00	-94.26	-94.33	0.436	-96.958	-95.228	-71.473	0.139
1.00	3.00	20.82	20.71	0.351	16.237	20.751	25.728	0.440
1.00	5.00	-37.28	-37.27	0.309	-41.888	-36.790	-29.066	0.349
1.00	7.00	-4.66	-4.67	0.168	-6.219	-4.816	0.848	0.534
2.00	1.00	-47.58	-48.43	4.327	-86.678	-40.251	88.662	0.429
2.00	2.00	-72.07	-72.69	3.035	-94.002	-85.673	27.840	0.462
2.00	3.00	13.59	13.73	0.476	6.029	12.787	24.596	0.344
2.00	5.00	-29.43	-29.37	0.656	-37.905	-27.790	-15.738	0.451
2.00	7.00	-16.36	-16.38	0.199	-18.803	-16.550	-11.458	0.550
3.00	1.00	-55.61	-56.06	2.730	-87.249	-50.046	-1.550	0.457
3.00	2.00	-79.72	-80.37	2.458	-95.389	-89.921	-22.399	0.650
3.00	3.00	-84.43	-85.09	2.197	-99.482	-91.563	-28.253	0.654
3.00	5.00	-25.35	-25.34	0.557	-33.127	-24.838	-15.219	0.596
3.00	7.00	-25.94	-25.96	0.223	-28.741	-26.112	-21.829	0.490
5.00	1.00	-71.83	-72.24	2.285	-91.810	-63.915	-19.614	0.515
5.00	2.00	-81.81	-82.31	1.618	-94.889	-79.837	-33.129	0.531
5.00	3.00	-84.20	-84.57	1.730	-98.193	-83.580	-43.557	0.622
5.00	5.00	-82.81	-83.08	1.570	-99.793	-86.365	-51.239	0.651

표 11, ATM(at-the-money)의 2 요인 string market model 유럽형 스왑션 가격의 기초통계량

아래 자료는 2003년 7월 16일부터 2003년 9월 24일까지의 50일간의 자료이며 시장에 공시된 내재 변동성을 식 (6)에 대입하여 계산하였다. N 은 옵션의 만기, M 은 기초 자산인 스왑 계약 기간을 의미한다.

N	M	Mean	Standard Deviation	Minimum	Median	Maximum	Serial Correlation
0.25	1.00	0.0013	0.0001	0.0010	0.0014	0.0015	0.8013
0.25	2.00	0.0031	0.0002	0.0026	0.0032	0.0034	0.7859
0.25	3.00	0.0061	0.0004	0.0051	0.0062	0.0066	0.7985
0.25	5.00	0.0048	0.0003	0.0040	0.0049	0.0053	0.7907
0.25	7.00	0.0106	0.0006	0.0092	0.0107	0.0115	0.6824
0.50	1.00	0.0028	0.0002	0.0023	0.0029	0.0032	0.7783
0.50	2.00	0.0045	0.0004	0.0038	0.0044	0.0050	0.6813
0.50	3.00	0.0082	0.0004	0.0069	0.0083	0.0090	0.7679
0.50	5.00	0.0065	0.0004	0.0055	0.0067	0.0072	0.7310
0.50	7.00	0.0142	0.0007	0.0123	0.0144	0.0153	0.6593
1.00	1.00	0.0032	0.0007	0.0022	0.0028	0.0047	0.9027
1.00	2.00	0.0003	0.0002	0.0002	0.0003	0.0016	0.1765
1.00	3.00	0.0108	0.0006	0.0093	0.0110	0.0120	0.6589
1.00	5.00	0.0091	0.0006	0.0078	0.0089	0.0099	0.4930
1.00	7.00	0.0183	0.0009	0.0158	0.0187	0.0195	0.6749
2.00	1.00	0.0021	0.0012	0.0006	0.0025	0.0062	0.5183
2.00	2.00	0.0022	0.0018	0.0005	0.0012	0.0089	0.5098
2.00	3.00	0.0140	0.0009	0.0110	0.0143	0.0155	0.4298
2.00	5.00	0.0140	0.0013	0.0106	0.0138	0.0164	0.3810
2.00	7.00	0.0217	0.0011	0.0186	0.0219	0.0230	0.6207
3.00	1.00	0.0021	0.0010	0.0007	0.0024	0.0043	0.4863
3.00	2.00	0.0019	0.0017	0.0005	0.0010	0.0067	0.6661
3.00	3.00	0.0022	0.0023	0.0001	0.0013	0.0093	0.6690
3.00	5.00	0.0170	0.0011	0.0152	0.0171	0.0189	0.4786
3.00	7.00	0.0222	0.0010	0.0190	0.0225	0.0233	0.5612
5.00	1.00	0.0016	0.0010	0.0005	0.0021	0.0042	0.5320
5.00	2.00	0.0020	0.0014	0.0006	0.0023	0.0068	0.5510
5.00	3.00	0.0025	0.0021	0.0003	0.0027	0.0086	0.6409
5.00	5.00	0.0044	0.0030	0.0001	0.0036	0.0120	0.6643

표 12, Swaption Errors의 기초 통계량

아래 자료는 2003년 7월 16일부터 2003년 9월 24일까지의 50일간의 string market model 스왑션 가격과 실제 스왑션 가격과의 차이에 관한 자료의 기초 통계량이다. N 은 옵션의 만기까지의 기간, M 은 기초 자산인 스왑 계약 기간을 의미한다. 1차 자기 상관에 관한 조정을 하지 않은 결과이다.

N	M	Mean	Swaption price	Percentage error	Standard Deviation	Minimum	Median	Maximum	Correlation
0.25	1.00	-0.00013	0.00146	-9.20%	0.00012	-0.00042	-0.00013	0.00014	0.76776
0.25	2.00	0.00015	0.00297	5.10%	0.00009	-0.00002	0.00013	0.00038	0.51855
0.25	3.00	0.00158	0.00448	35.35%	0.00014	0.00123	0.00160	0.00184	0.71824
0.25	5.00	-0.00250	0.00730	-34.27%	0.00020	-0.00276	-0.00252	-0.00177	0.56340
0.25	7.00	0.00072	0.00989	7.30%	0.00006	0.00056	0.00072	0.00079	0.33677
0.50	1.00	0.00075	0.00209	35.98%	0.00022	0.00023	0.00077	0.00126	0.75953
0.50	2.00	0.00024	0.00423	5.61%	0.00020	-0.00028	0.00020	0.00055	0.47091
0.50	3.00	0.00185	0.00632	29.22%	0.00018	0.00146	0.00186	0.00226	0.54508
0.50	5.00	-0.00374	0.01029	-36.38%	0.00028	-0.00412	-0.00387	-0.00286	0.53984
0.50	7.00	0.00039	0.01384	2.80%	0.00017	0.00021	0.00036	0.00120	0.39030
1.00	1.00	0.00016	0.00301	5.31%	0.00080	-0.00094	-0.00024	0.00191	0.89811
1.00	2.00	-0.00571	0.00606	-94.33%	0.00047	-0.00628	-0.00578	-0.00391	0.45354
1.00	3.00	0.00186	0.00896	20.79%	0.00025	0.00130	0.00184	0.00231	0.48106
1.00	5.00	-0.00539	0.01444	-37.30%	0.00050	-0.00620	-0.00542	-0.00405	0.57241
1.00	7.00	-0.00090	0.01923	-4.67%	0.00026	-0.00121	-0.00093	0.00015	0.55693
2.00	1.00	-0.00215	0.00430	-50.04%	0.00153	-0.00411	-0.00170	0.00292	0.52421
2.00	2.00	-0.00613	0.00836	-73.28%	0.00224	-0.00833	-0.00716	0.00193	0.52668
2.00	3.00	0.00167	0.01234	13.55%	0.00049	0.00063	0.00153	0.00306	0.28071
2.00	5.00	-0.00582	0.01977	-29.42%	0.00108	-0.00757	-0.00573	-0.00306	0.54860
2.00	7.00	-0.00424	0.02592	-16.37%	0.00048	-0.00504	-0.00420	-0.00281	0.59419
3.00	1.00	-0.00283	0.00498	-56.87%	0.00127	-0.00490	-0.00245	-0.00007	0.49235
3.00	2.00	-0.00794	0.00985	-80.60%	0.00217	-0.00988	-0.00905	-0.00194	0.67775
3.00	3.00	-0.01235	0.01450	-85.15%	0.00294	-0.01533	-0.01345	-0.00362	0.70031
3.00	5.00	-0.00579	0.02278	-25.41%	0.00108	-0.00770	-0.00585	-0.00340	0.65674
3.00	7.00	-0.00778	0.02998	-25.96%	0.00071	-0.00899	-0.00773	-0.00619	0.59174
5.00	1.00	-0.00437	0.00599	-72.94%	0.00136	-0.00596	-0.00372	-0.00101	0.49589
5.00	2.00	-0.00965	0.01170	-82.53%	0.00207	-0.01228	-0.00908	-0.00333	0.50522
5.00	3.00	-0.01410	0.01664	-84.71%	0.00279	-0.01752	-0.01386	-0.00658	0.60069
5.00	5.00	-0.02155	0.02592	-83.16%	0.00375	-0.02716	-0.02280	-0.01257	0.63398

표 13, 실증 분석 후기 5일간의 Percentage Swaption Errors의 기초 통계량

아래 자료는 2003년 9월 18일부터 2003년 9월 24일까지의 5일간의 string market model 스왑션 가격과 실제 스왑션 가격과의 차이를 실제 스왑션 가격의 백분율로 표시한 자료의 기초 통계량이다. N 은 옵션의 만기까지의 기간, M 은 기초 자산인 스왑 계약 기간을 의미한다. RMSE의 값이 적은 5일간의 자료이다.

N	M	Mean	Standard Deviation	Minimum	Median	Maximum
0.25	1.00	-23.426	4.366	-28.271	-23.392	-16.505
0.25	2.00	3.784	1.886	2.183	2.643	6.261
0.25	3.00	36.871	2.020	34.470	36.129	39.728
0.25	5.00	-32.728	2.260	-34.928	-33.167	-29.251
0.25	7.00	7.526	0.274	7.106	7.638	7.778
0.50	1.00	18.619	6.629	11.108	18.681	28.967
0.50	2.00	1.062	0.993	-0.345	1.219	2.365
0.50	3.00	30.289	1.284	28.921	30.120	32.159
0.50	5.00	-35.446	1.192	-36.625	-35.714	-33.519
0.50	7.00	2.955	0.351	2.598	2.881	3.535
1.00	1.00	62.595	6.113	52.749	64.006	68.993
1.00	2.00	-91.950	1.641	-94.029	-92.236	-89.528
1.00	3.00	21.412	1.314	19.710	21.134	22.775
1.00	5.00	-38.110	2.265	-41.079	-37.186	-36.170
1.00	7.00	-4.513	1.006	-5.471	-4.793	-3.370
2.00	1.00	0.879	3.658	-4.099	2.382	4.424
2.00	2.00	-27.516	15.808	-45.954	-20.976	-10.488
2.00	3.00	11.744	3.187	7.465	12.421	14.836
2.00	5.00	-30.096	6.363	-37.162	-25.887	-25.110
2.00	7.00	-15.783	1.724	-17.177	-16.824	-13.808
3.00	1.00	-26.815	22.293	-51.842	-15.218	-2.999
3.00	2.00	-42.140	8.529	-52.727	-43.221	-31.508
3.00	3.00	-49.541	13.081	-64.065	-53.092	-31.253
3.00	5.00	-23.375	4.067	-27.827	-21.788	-19.674
3.00	7.00	-24.672	2.129	-26.438	-26.092	-22.170
5.00	1.00	-45.999	22.281	-62.923	-60.983	-19.614
5.00	2.00	-60.454	23.515	-78.012	-76.876	-33.129
5.00	3.00	-59.427	13.173	-70.271	-67.098	-43.557
5.00	5.00	-59.646	4.937	-64.803	-58.706	-53.644

표 14, ATM(at-the-money)의 유럽형 캡 가격의 기초 통계량

아래 자료는 2003년 7월 16일부터 2003년 9월 24일까지의 50일간의 자료이며 시장에 공시된 내재 변동성을 식(1)에 대입하여 개별 캡플릿의 가치를 계산 한 후 개별 캡플릿의 가치를 합하여 캡의 가격을 계산하였다. M 은 캡의 만기를 의미한다.

M	Mean	Standard Deviation	Minimum	Median	Maximum	Serial Correlation
1.00	0.0017	0.0001	0.0014	0.0017	0.0020	0.6416
2.00	0.0052	0.0004	0.0043	0.0053	0.0060	0.6214
3.00	0.0096	0.0011	0.0079	0.0092	0.0111	0.6377
5.00	0.0174	0.0012	0.0145	0.0177	0.0193	0.2099
7.00	0.0245	0.0019	0.0193	0.0249	0.0269	0.2896
10.00	0.0304	0.0018	0.0226	0.0302	0.0332	0.0845

표 15, ATM(at-the-money)의 유럽형 2요인 string market 모델의 캡 가격 기초 통계량

아래 자료는 2003년 7월 16일부터 2003년 9월 24일까지의 50일간의 자료이며 스왑선 가격에서 추정된 내재 변동성을 식(1)에 대입하여 개별 캡플릿의 가치를 계산 한 후 개별 캡플릿의 가치를 합하여 캡의 가격을 계산하였다. M 은 캡의 만기를 의미한다.

M	Mean	Standard Deviation	Minimum	Median	Maximum	Serial Correlation
1.00	0.0002	0.0001	0.0001	0.0002	0.0004	0.4756
2.00	0.0022	0.0005	0.0011	0.0023	0.0031	0.6632
3.00	0.0052	0.0012	0.0023	0.0049	0.0068	0.6307
5.00	0.0119	0.0015	0.0054	0.0121	0.0139	0.1607
7.00	0.0192	0.0026	0.0056	0.0196	0.0216	0.2717
1.00	0.0295	0.0032	0.0106	0.0298	0.0334	0.1011

표 16 , Percentage Cap Errors의 기초 통계량

아래 자료는 2003년 7월 16일부터 2003년 9월 24일까지의 50일간의 string market model 캡 가격과 실제 캡 가격과의 차이를 실제 캡 가격의 백분율로 표시한 자료의 기초 통계량이다. M 은 캡의 만기를 의미한다. 평균의 t 통계량과 표준 편차는 1차 자기 상관에 관한 조정을 한 결과이다.

M	Mean	t-Stat Mean	Standard Deviation	Minimum	Median	Maximum	Serial Correlation
1.00	-86.284	-86.352	0.541	-92.838	-87.158	-77.954	0.434
2.00	-58.824	-58.561	1.025	-78.031	-56.419	-47.681	0.621
3.00	-46.443	-45.977	0.963	-74.070	-46.327	-37.872	0.553
5.00	-31.841	-31.177	0.390	-67.436	-30.552	-24.484	0.165
7.00	-21.786	-20.766	0.449	-72.795	-20.110	-11.430	0.069
10.00	-2.881	-1.688	0.296	-64.784	-1.106	14.291	0.063

표 17, Cap Errors의 기초 통계량

아래 자료는 2003년 7월 16일부터 2003년 9월 24일까지의 50일간의 string market model 캡 가격과 실제 캡 가격과의 차이를 표시한 자료의 기초 통계량이다. M 은 캡의 만기를 의미한다. 1차 자기 상관에 관한 조정을 하지 않은 결과이다.

M	Mean	Cap price	Percentage error	Standard Deviation	Minimum	Median	Maximum	Correlation
1.0	-0.0014	0.0002	-86.28%	0.00008	-0.0016	-0.0014	-0.0011	0.5680
2.0	-0.0030	0.0021	-58.82%	0.00019	-0.0039	-0.0030	-0.0023	0.1748
3.0	-0.0043	0.0051	-46.44%	0.00042	-0.0065	-0.0043	-0.0032	0.1789
5.0	-0.0055	0.0118	-31.84%	0.00105	-0.0112	-0.0054	-0.0035	0.2262
7.0	-0.0052	0.0191	-21.79%	0.00173	-0.0150	-0.0050	-0.0022	0.0839
10.0	-0.0009	0.0294	-2.88%	0.00312	-0.0195	-0.0003	0.0032	0.0939

표 18, Merton의 무차익 조건 검정에 관한 기초 통계량

아래 자료는 2003년 7월 16일부터 2003년 9월 24일까지의 50일간의 string market model에서 추정된 내재 공분산 행렬의 완전 상관을 가정하고 계산된 캡 가격과 실제 캡 가격과의 차이를 실제 캡 가격의 백분율로 표시한 자료의 기초 통계량이다. M 은 캡의 만기를 의미한다. 1차 자기 상관에 관한 조정을 하지 않은 결과이다.

M	Mean	Standard Deviation	Minimum	Median	Maximum	Serial Correlation
1.00	-89.693	4.229	-96.368	-90.114	-81.258	0.387
2.00	-88.296	8.833	-103.980	-87.100	-68.068	0.665
3.00	-86.389	9.312	-100.410	-90.595	-72.550	0.604
5.00	-93.056	4.096	-107.730	-92.273	-84.036	-0.105
7.00	-85.693	6.838	-100.970	-83.765	-75.265	0.517
10.00	-57.472	2.836	-65.376	-57.496	-51.554	0.293

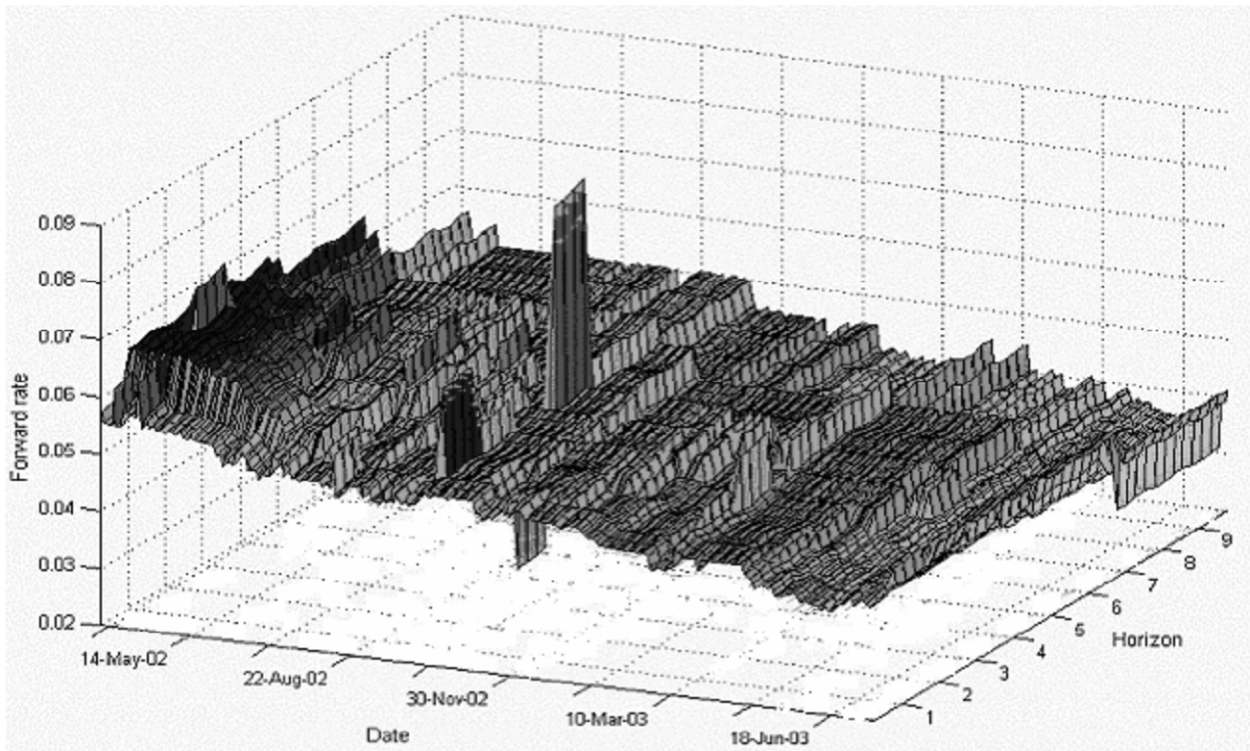


그림 1. 3개월 선도 이자율의 시계열 자료. 자료는 2002년 3월 20일부터 2003년 7월 15일까지의 선도 이자율의 일간 자료이다. 선도 이자율은 0.25년부터 9.75년까지의 3개월에 대한 이자율이고 CD91, 1년, 2년, 3년, 4년, 5년, 7년, 10년 스왑 이자율에서 Fama-Bliss(1987) unsmoothed bootstrapping 방법을 이용하여 계산하였다. 모든 자료는 Bloomberg를 통하여 얻었다. 관측 일은 344일이다.

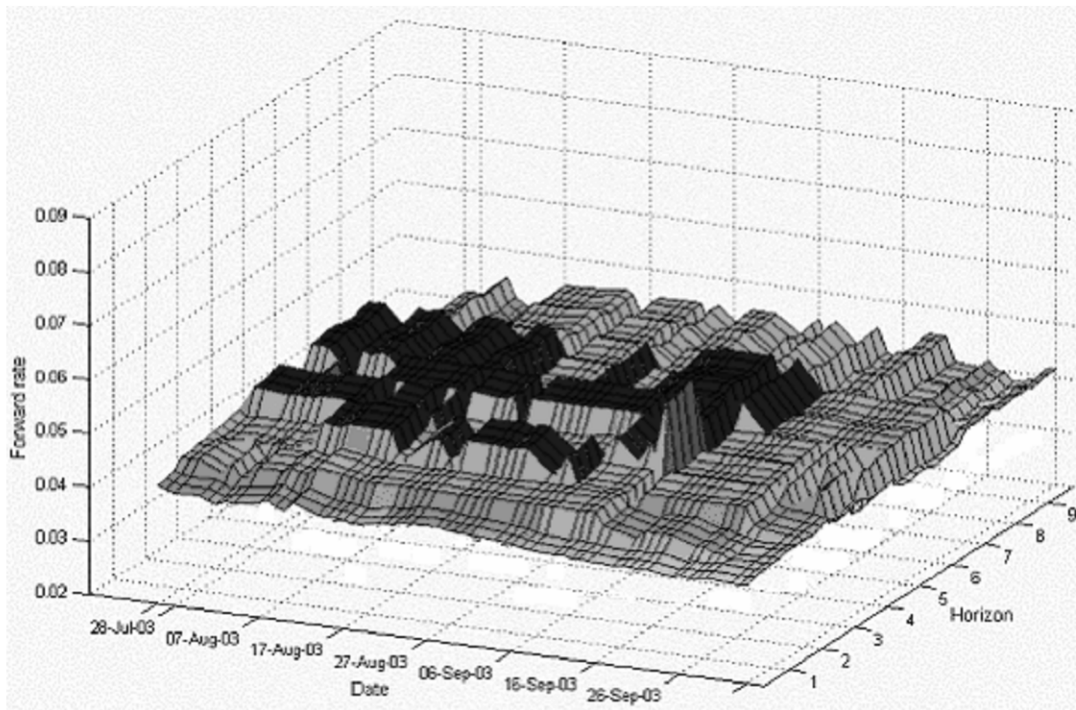
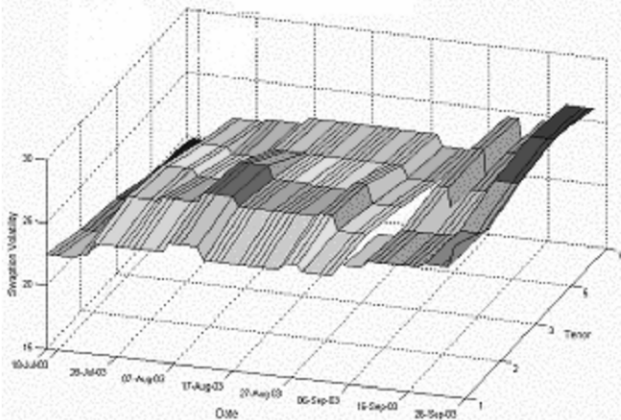
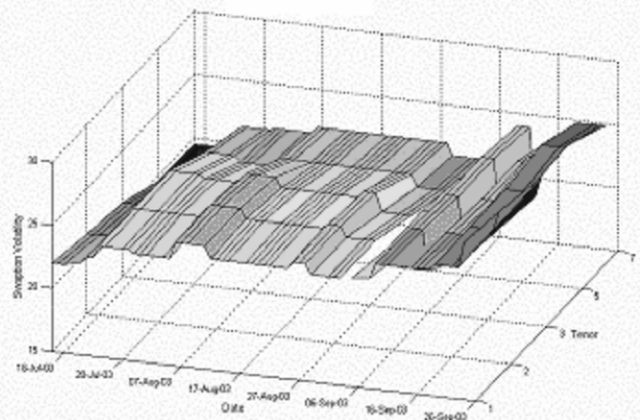


그림 2. 3개월 선도 이자율의 시계열 자료. 자료는 2003년 7월 16일부터 2003년 9월 24일까지의 선도 이자율의 일간 자료이다. 선도 이자율은 0.25년부터 9.75년까지의 3개월에 대한 이자율이고 CD91, 1년, 2년, 3년, 4년, 5년, 7년, 10년 스왑 이자율에서 Fama-Bliss(1987) unsmoothed bootstrapping 방법을 이용하여 계산하였다. 모든 자료는 Bloomberg를 통하여 얻었다. 관측 일은 50일이다.

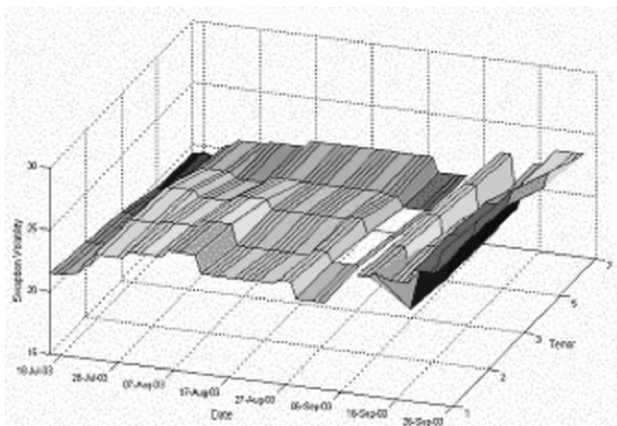
Time to maturity of Three month



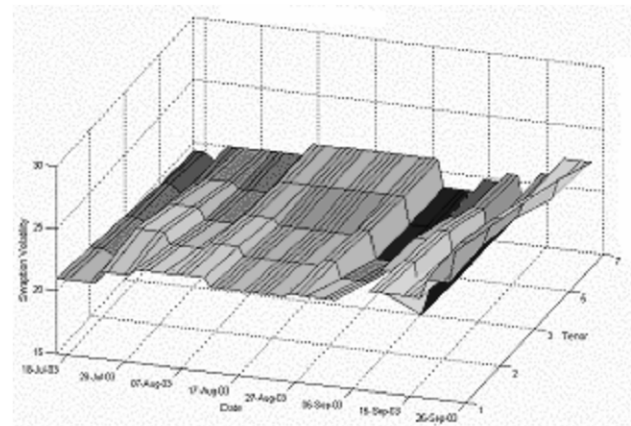
Time to maturity of Six month



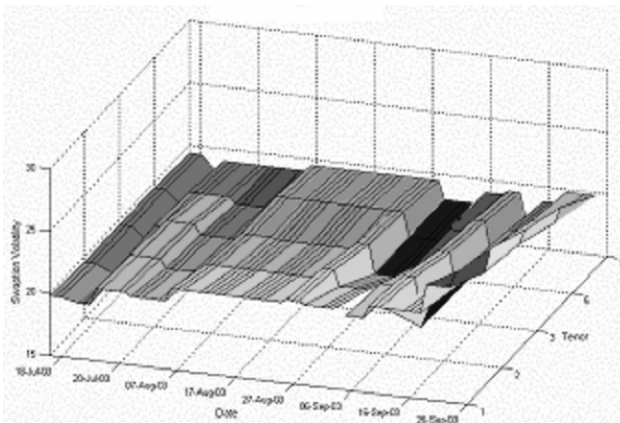
Time to maturity of One year



Time to maturity of Two year



Time to maturity of Three year



Time to maturity of Five year

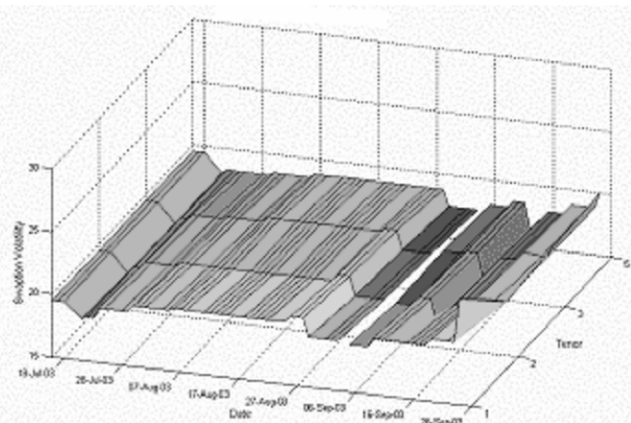


그림 3. 스왑선 변동성의 시계열 자료. 아래 자료는 2003년 7월 16일부터 2003년 9월 24일까지의 50일간의 자료이며 Black model을 이용하여 계산된 내재 변동성 시장 종가의 중앙값(mid-price) 시계열 자료이다. N 은 옵션의 만기까지의 기간, M 은 기초 자산인 스왑 계약 기간을 의미한다. 위 그림은 옵션의 만기 별로 스왑 계약 기간에 따라 그려졌다.

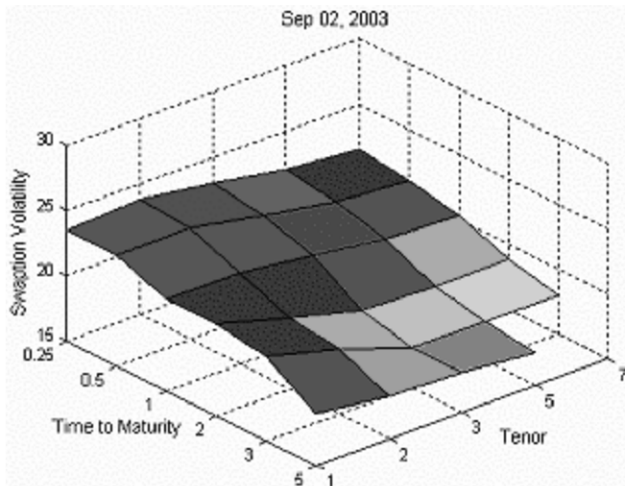
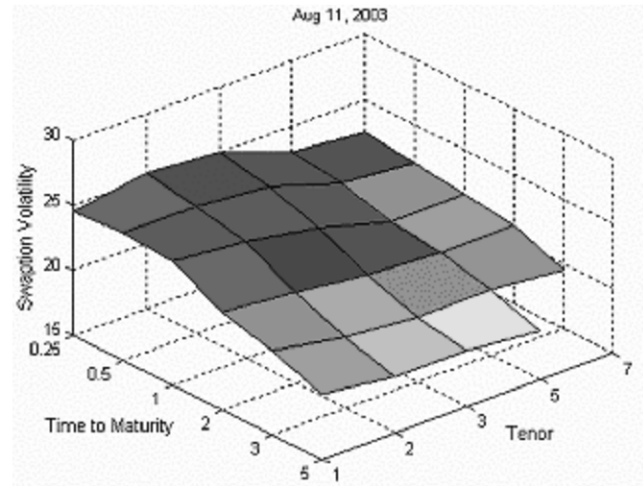
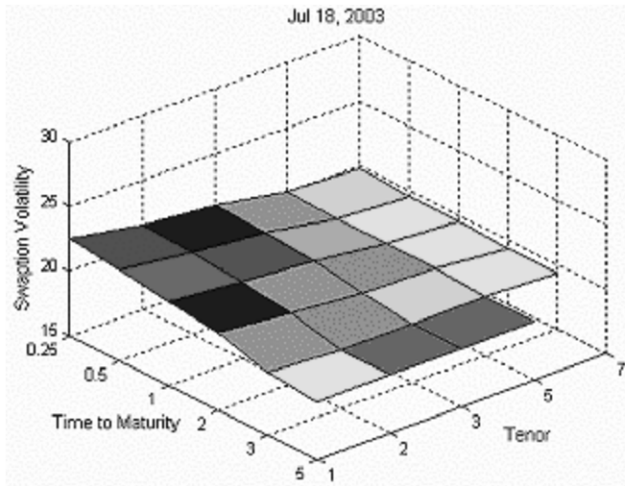


그림 4. 옵션의 만기와 스왑 계약 기간과의 관계. 자료는 2003년 7월 16일부터 2003년 9월 24일까지의 50일간의 자료이며 Black model을 이용하여 계산된 내재 변동성 시장 종가의 중간 값(mid price)이다. 2003년 7월 18일, 2003년 8월 11일, 2003년 9월 2일 그리고 2003년 9월 24일에 스왑의 만기와 스왑 계약 기간의 관계를 표현하였다.

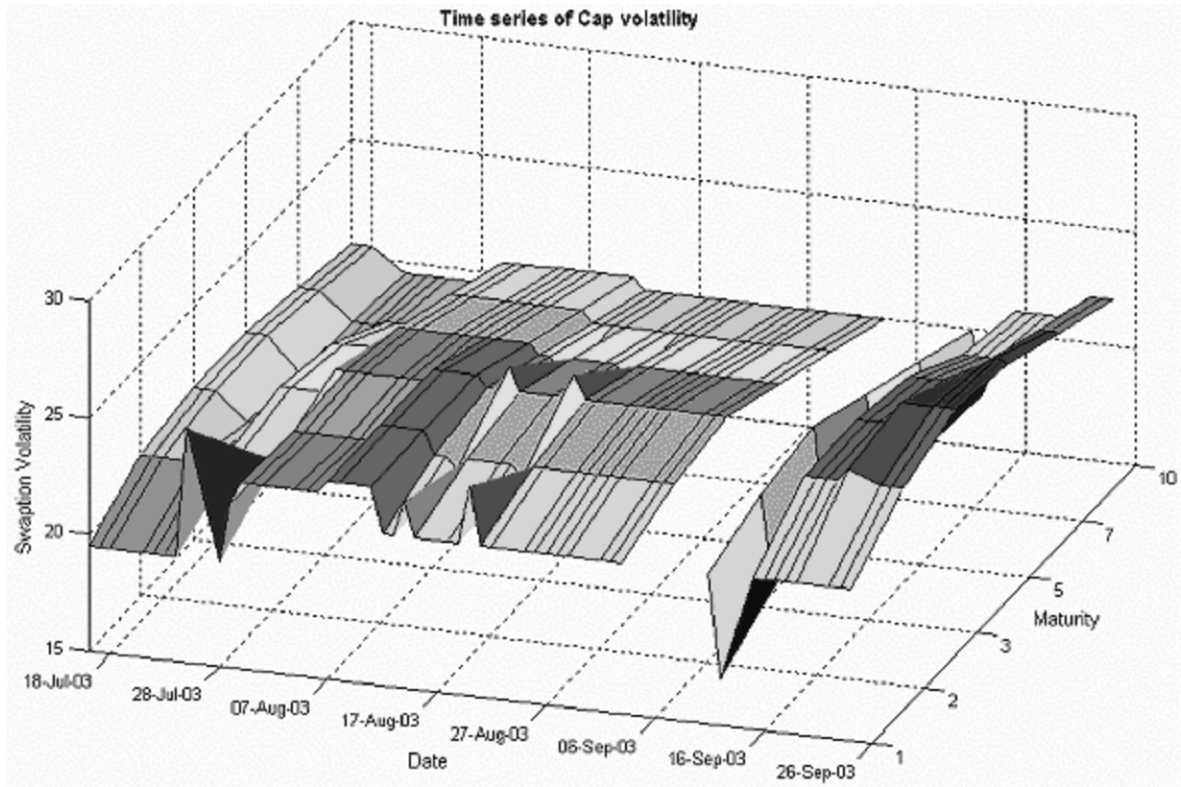


그림 5. 캡 변동성의 시계열 자료. 자료는 2003년 7월 16일부터 2003년 9월 24일까지의 50일간의 자료이며 Black model을 이용하여 계산된 내재 변동성 시장 증가의 중간 가격(mid price)이다. M 은 캡의 만기를 의미한다.

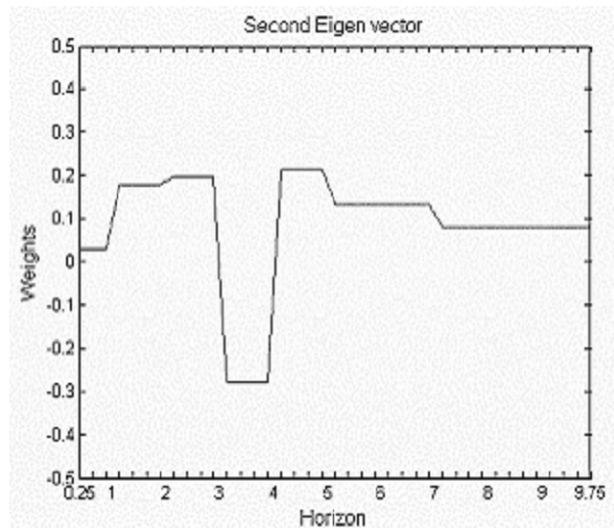
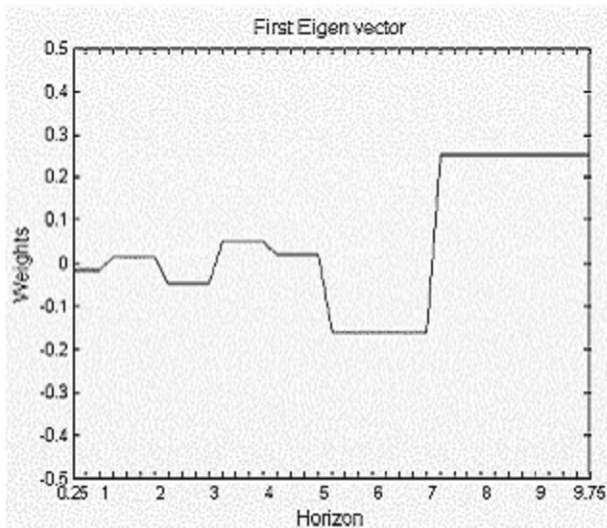


그림 5. 고유벡터(eigenvector)의 가중치. 2개의 그림은 사전기간(ex ante)에서 계산된 상관행렬(H)의 첫 번째 고유벡터와 두 번째 고유벡터 기간별 가중치 자료이다. 3개월 단위로 0.25년부터 9.75년까지 39개의 기간에서 계산된 상관 행렬은 2002년 3월 20일부터 2003년 7월 15일까지의 선도 이자율의 일간 로그 증분에서 계산되었다. 사용된 자료들은 매일 시장 마감 때 중간 가격(mid price)이다.

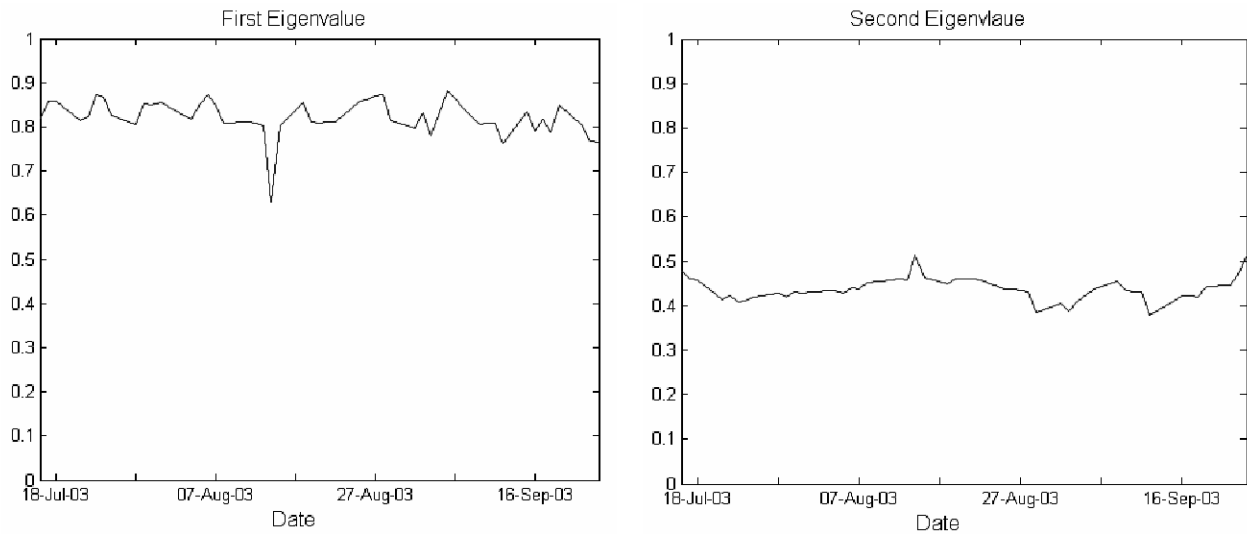


그림 6. 내재 고유값(implied eigenvector)의 시계열 자료. 2개의 그림은 2002년 7월 16일부터 2003년 9월 24일까지의 실증분석 기간에 시장 가격의 모델 가격의 차이의 잔차를 최소화하면서 추정된 고유값의 시계열 자료이다. 고유값 추정시 사전기간(ex ante)에서 계산된 상관행렬(H)의 고유벡터들을 이용하였다.

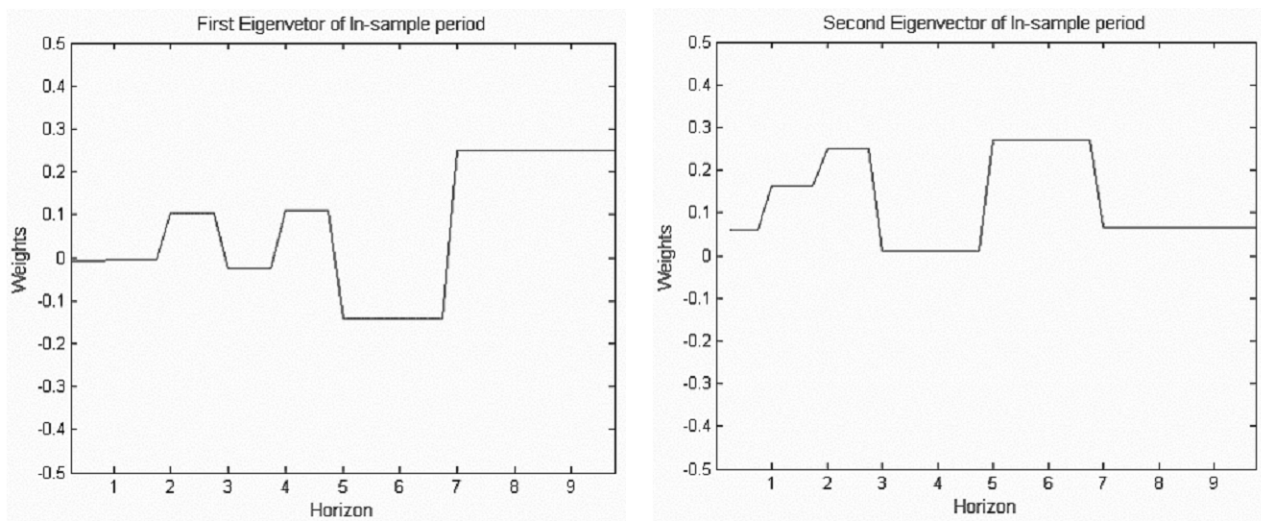


그림 7. 실증분석 기간(ex post)의 고유벡터(eigenvector)의 가중치. 2개의 그림은 사후 기간(ex ante)에서 계산된 역사적 상관 행렬(historical correlation of ex post period)의 첫 번째 고유 벡터와 두 번째 고유 벡터 기간별 가중치 자료이다. 3개월 단위로 0.25년부터 9.75년까지 39개의 기간에서 계산된 상관 행렬은 2002년 3월 20일부터 2003년 7월 15일까지의 선도 이자율의 일간 로그 증분에서 계산되었다. 사용된 자료들은 매일 시장 마감 때 중간 가격(mid price)이다.

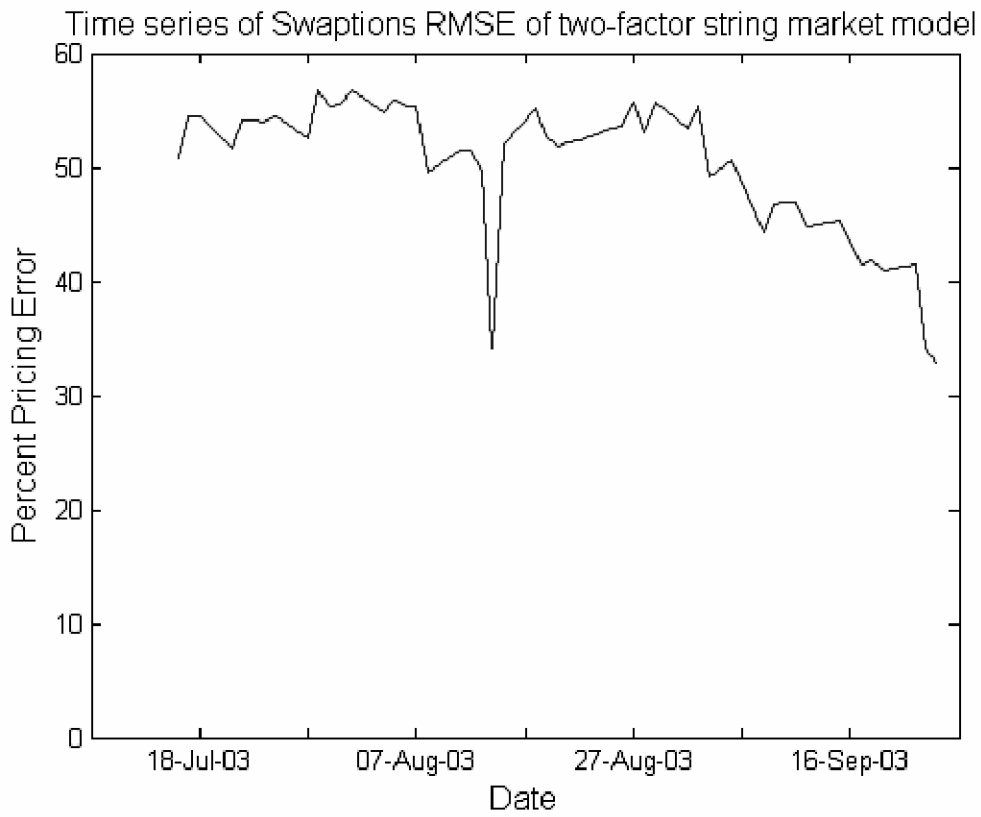


그림 8. 2요인 string market model 스왑션의 가격의 RMSE 시계열 자료. 위 그림은 2002년 7월 16일부터 2003년 9월 24일까지의 50일 동안 29개의 스왑션 가격에 대한 RMSE 시계열 자료이다. RMSE는 시장가격을 기준으로 모델 가격과 시장 가격의 차이의 RMSE를 백분율로 표시한 것이다.