

이자율 예측을 통한 국채 거래의 실효성에 관한 분석

2004. 11. 30

김동석*, 이윤근†, 현정순*

<국문 요약>

본 연구에서는 CIR 2요인 모형인 Pearson and Sun 모형을 이용하여 우리나라 국채 금리의 기간구조를 분석하고 미래의 채권가격을 예측한다. 또한, 모수 추정을 위해 최우추정법 (maximum likely estimate)이 사용된다. 예측된 채권 가격을 통해 국채 선물에의 가격을 산출하고 이를 통해 채권 선물, 선물 거래, 및 헤지 거래 전략을 수립한다. 본 연구에 의하면, Pearson and Sun 모형은 우리나라의 금리 기간구조를 적절하게 설명하고 있으나, 예측력에는 그다지 적합하지 않은 것으로 보인다. 그러나 금리의 방향성 및 변동성 설명력은 우수하여 예측을 통한 국채 선물/선물 매매전략을 통해 수익을 창출할 수 있었다.

* KAIST 테크노경영대학원

† Citibank Korea

I. 서론

한국 채권시장 및 채권관련 파생상품 시장은 1997년 경제위기 이후 채권시가평가제 실시로 거래규모의 확대와 거래기법의 다양화 및 전문화 등 비약적인 발전을 거듭하여 왔다. 특히 1999년 9월 29일에 상장된 국채선물은 상장 당시 월 평균 4,415계약에서 2004년에는 약 30,000계약이 넘게 그 규모가 확대되었다. 이에 따라 금융기관에서는 채권 포트폴리오 및 채권관련 파생상품에 대한 공정한 평가와 이자율 예측을 통한 투자 전략수립 등에 적합한 이자율 모형에 대한 관심이 계속적으로 증가되어 왔다.

이자율 기간구조 모형은 크게 균형 상태하에 단기이자율과 같은 상태변수(State variable)들의 추계적인 과정을 통한 금리 기간구조의 체계적인 변동을 설명하는 균형모형과 현재의 금리 기간구조 자체를 하나의 상태변수로 간주하여 금리 기간구조의 동태적 가정을 분석하는 무차익 거래모형으로 발전되어 왔다.

균형모형은 상태변수에 의해 내생적으로 생성되는 금리의 동태적인 변화를 설명함으로써 경제균형 원리에 의한 이자율결정이 이루어져 모수가 안정적이며, 또한 채권 가격의 닫힌 해(closed-form)를 구할 수 있는 이론적인 우수성이 있으며, 위험관리 및 채권거래 전략수립 등에 사용될 수 있다. 반면 현재 이용 가능한 채권가격 정보를 바탕으로 할인채의 가격을 찾아내고 이를 이용하여 현재의 이자율 기간구조와 일치시키는 무차익 거래모형은 주로 채권 현물을 기초자산으로 하는 채권 파생상품의 가격 평가 등에 적합하나 모수가 비 안정적이다. 대표적인 균형모형으로는 Vasicek (1977)과 Cox-Ingerson-Ross (1985) 등이 있으며, 무차익 거래모형으로는 Ho-Lee (1986)와 Heath-Jarrow-Morton (1992) 등이 있다.

우리나라 대표적인 이자율 파생상품 중 하나인 국채선물은 3개월마다 이표를 지급하는 만기 3년, 표면금리 8%, 액면가액 1억인 가상의 국채를 기초자산으로 하고 있다. 이 가상의 채권은 시장에서 관찰되지 않기 때문에 보유비용 모형(cost-of-carry)에 기초한 KTB 선물가격 추정은 불합리한 면이 있다. 선물거래소는 이와 같은 국채선물의 가격을 몇 개의 기준되는 채권의 평균 만기수익률로 결정하고 있다. 이러한 경우 국채선물의 만기 시 지급되는 금액(payoff)은 이자율에 의해 결정되므로 특정한 이자율 모형을 사용하여야 한다. 무차익 거래모형에 의한 접근으로는 강장구,이정진 (2002)과 박진우,최영수 (2003) 등이 있다¹. 반면, 김인준,김동석,이상구 (2001)는 균형모형 중 하나인 Chen-Scott (1993)모형이 우리나라 현재의 이자율 기간구조를 잘 맞추고 있으므로, 파생상품의 가격 결정에도 균형모형이 적용될 수 있음을 주장한다.

본 연구에서는 우리나라 금리기간구조를 대표적인 균형모형인 확장된 CIR 2요인모형 (Pearson and Sun, 1994, 이하 PS 모형이라고 함)으로 고찰하고 이 모형에 기초하여 우리나라 채권시장에서 대표적으로 거래되는 국채현물 및 선물에 대한 거래 전략을 수립하고자 한다.

¹ 강장구,이정진은 Black-Karasinski 모형을 박진우,최영수는 Ho-Lee 모형을 사용하였다.

그리고 이 거래 전략을 통한 채권 거래의 성과를 분석하고 향후, 우리나라 채권시장에서 채권 전략 수립 및 채권 포트폴리오 운영에 따른 투자지표로서 PS 모형의 유용성을 살펴보고자 한다. PS 모형은 같은 2요인 모형인 Chen-Scott과 달리 현실에 적합하도록 확장된 모형이다. 또한 PS 모형은 2요인 모형이므로 임의의 두 개의 채권 가격을 정확하게 맞추도록 모수를 추정할 수 있다. 본 연구에서는 3개월 및 3년 만기 국채의 가격을 맞추도록 하였다. 현재 3년 만기 국채는 시장에서 대표적으로 거래되는 지표채권이다. 그러므로 채권가격에 대한 신뢰도 면에서 가장 적합할 것으로 판단되어, 3년 만기 국채를 이용한 미래 채권 가격이 다른 만기 국채를 이용한 결과보다 현재 거래되는 채권가격 정보를 더욱 정확하게 반영 할 것으로 기대된다.

실증분석 결과 PS 모형은 우리나라 국채 이자율 기간구조의 적합성 측정에서 만기 3년 이하의 기간에서는 양호한 결과를 보이고 있으나 만기 5년의 기간에서는 이론금리와 실제금리간의 괴리가 커짐을 알 수 있었다. 그러나 시장의 일시적인 충격 발생 시기를 제외하고는 이론금리와 실질금리의 방향성은 대체적으로 일치하고 있어 모형을 활용한 채권 현물, 선물거래에서 장기적으로 수익을 창출 할 수 있음을 확인 할 수 있었다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. II장에서는 이자율 균형모형의 원리와 이자율 기간구조를 도출 할 때 사용 되는 PS 모형과 채권 가격 식에 대해 논한다. 제 III장에서는 실제 우리나라 이자율 자료를 통해 모형의 모수를 추정하고 모형의 결과를 분석한다. 제IV장에서는 이자율 예측을 통해 미래의 채권가격 구하고, 이를 바탕으로 채권 거래 전략을 수립하고 동 거래들의 실증분석을 한다. 마지막으로 제V장은 본 논문의 결과를 요약하고 시사점 등을 논한다.

II. 확장된 2요인 이자율 모형 (Pearson and Sun Model)

본 연구에서는 확장된 CIR 2요인 모형으로서 PS 모형을 사용한다. 요인으로는 균형에 의해 내생적으로 결정되는 실질이자율과 외생 변수인 인플레이션을 이용한다. 실질이자율인 순간이자율은 다음과 같이 평균으로 회귀하는 square-root 과정을 따른다고 가정한다.

$$dr = \kappa_1(\theta_1 - r) + \sigma_1 \sqrt{r} dW_1 \quad (2.1)$$

여기에서 계수 θ_1 은 양의 상수로써 장기 평균 금리를 나타내며, 계수 κ_1 역시 양의 상수로써 순간이자율이 장기 평균 금리로 회귀하는 속도를 나타낸다. dW_1 은 위너과정을 (Wiener process) 나타낸다. 다음의 식은 Sun (1987)에 의해 사용된 물가수준의 확률과정이다.

$$dq = yqdt + \sigma_q q \sqrt{y} dW_2 \quad (2.2)$$

여기에서 상태변수 y 는 아래와 같이 평균으로 회귀하는 확률과정을 따른다고 가정한다.

$$dy = \kappa_2(\theta_2 - y)dt + \sigma_2 \sqrt{y} dW_3 \quad (2.3)$$

단, κ_2 과 θ_2 는 식(2.1)에서와 같이 양의 상수이다. 두 위너과정의 dW_2 , dW_3 은 서로

ρ 의 상관관계를 가지고 있으며, dW_1 에 대해서는 각각 독립이다. 다음의 식은 상태변수인 y 의 역할을 보여준다. 만약 E_t 가 t 시점까지의 모든 정보에 대한 조건부 기대값 이라고 한다면,

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{E_t(\ln(q_{t+\tau}/q_t))}{\tau} = \lim_{\tau \rightarrow 0} E_t \left[\frac{\left(y_t - 1/2\sigma_q^2 \right) \tau + \int_t^{t+\tau} \sigma_q \sqrt{y_s} dW_s}{\tau} \right]$$

$$= \left(1 - \frac{\sigma_q^2}{2} \right) y_t$$

이 되므로 상태변수 y 는 물가수준의 변동성인 σ_q 와 함께 기대 인플레이션율을 설명한다. σ_q 가 0이면 y 는 정확하게 기대 인플레이션율이 된다.

채권의 명목가격($P_t(\tau)$)은 실질가격 $P'_t(\tau)$ 에 구매력의 감가상각율($q_t/q_{t+\tau}$)을 곱하면 된다. 그러나 PS 모형은 채권의 실질 가격을 결정하는 실질 금리와 인플레이션이 독립적으로 움직이므로 모형에 의한 명목채권의 가격은 1요인 CIR의 채권 가격에 구매력의 감가상각율을 곱하면 된다. 그러므로 모형에서 결정되는 채권의 명목 가격은 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$P_t(\tau) = P'_t(\tau) \cdot E_t(p_t / p_{t+\tau})$$

$$= A(\tau)C(\tau) \exp(-B(\tau)r_t - D(\tau)y_t) \quad (2.4)$$

$$\text{단, } A(\tau) = \left[\frac{2\gamma \cdot \exp((\kappa_1 + \lambda + \gamma) \cdot (\tau/2))}{(\kappa_1 + \lambda + \gamma) \cdot (\exp(\gamma \cdot \tau) - 1) + 2\gamma} \right]^{\frac{2\kappa_1\mu_1}{\sigma_1^2}}$$

$$B(\tau) = \frac{2(\exp(\gamma \cdot \tau) - 1)}{(\kappa_1 + \lambda + \gamma) \cdot (\exp(\gamma \cdot \tau) - 1) + 2\gamma}$$

$$C(\tau) = \left[\frac{2\xi \cdot \exp(\xi + \kappa_2 + \rho\sigma_2\sigma_p)^{\tau/2}}{(\xi + \kappa_2 + \rho\sigma_2\sigma_p)(\exp(\xi \cdot \tau) - 1) + 2\xi} \right]^{2\kappa_2\mu_2/\sigma_2^2}$$

$$D(\tau) = \frac{2(\exp(\xi \cdot \tau) - 1)(1 - \sigma_p^2)}{(\xi + \kappa_2 + \rho\sigma_2\sigma_p)(\exp(\xi \cdot \tau) - 1) + 2\xi}$$

$$\xi = \sqrt{(\kappa_2 + \rho\sigma_2\sigma_p)^2 + 2\sigma_2^2(1 - \sigma_p^2)}$$

$$\gamma = \sqrt{(\kappa_1 + \lambda)^2 + 2\sigma_1^2}$$

여기에서 λ 는 CIR 모형에서 정의된 실질 금리에 대한 단위위험당 초과수익률의 시장가격을 나타내며, $A(\tau)$, $B(\tau)$ 와 γ 또한 CIR 모형과 동일한 식들이다. PS 모형은 인플레이션을 설명하는 상태변수를 새롭게 도입함으로써, 식(2.4)에 나타난 바와 같이 채권의 가격이 물가

수준에 독립적인 형태로 나타나게 되어 소비자 물가 지수 자료를 사용하지 않고 시장에 있는 채권 가격만으로 모든 계수를 추정할 수 있도록 하는 장점이 있다. 또한 실질금리는 음이 될 수도 있으므로, PS 모형은 Pearson (1990)에서와 같이 실질 금리나 상태변수 중 하나에 음일 수 있는 조건을 부과하므로 현실에 적합하도록 한다. 이러한 조건들은 균형 실질이자율 r' 을 $r' = \bar{r} + r_t$ 와 같이 어떤 상수와 식 (2.1)에서 정의된 실질이자율 r_t 와의 합으로 변환시키므로 얻을 수 있다. 상태변수도 마찬가지로의 변환을 한다. 즉 $y' = \bar{y} + y_t$ 이며, y_t 는 식 (2.3)을 만족한다. 이러한 변환 하에서 $\bar{R} = \bar{r} + \bar{y}$ 로 정의한다면 명목채권 가격식은 아래와 같다.

$$P_t(\tau) = A(\tau)C(\tau)\exp(-\bar{R}\cdot\tau - B(\tau)r_t - D(\tau)y_t) \quad (2.5)$$

이 때 해당되는 명목금리는 $R_t = \bar{R} + r_t + (1 - \sigma_q^2)y_t$ 가 되므로 \bar{R} 는 명목금리의 하한으로 생각될 수 있다.

III. PS 모형의 추정 및 결과

1. 자료

본 연구에서의 사용된 이자율 데이터는 한국채권평가(주)에서 제공하는 2001년 1월2일 부터 2003년 6월30일까지의 국채 일일 기준수익률(892개) 중 3개월, 6개월, 1년, 2년, 3년, 5년 만기의 할인 수익률을 이용하였다.

이 중 모수 추정에 사용된 기간(in sample period)은 2001년 1월 2일부터 2002년 12월 31일까지이며, 총 569개 자료이다, 채권 거래 전략의 실증분석을 위한 기간은 2003년 1월 2일부터 2003년 6월 30일까지로 123개 자료를 이용하였다. 모수 추정을 위해 사용되는 2개의 채권가격으로는 3개월 만기 국채와 3년 만기 국채를 사용하였다. 3년 만기 국채의 경우 3년 만기 현물이자율(Spot rate)을 채권가격으로 환산한 가상의 국채가격을 사용하였다.

기존의 연구결과에 (Pearson and Sun 1994) 따르면 동 모형의 추정을 위해 사용되는 2가지 채권가격으로 1년 미만의 미국 단기 국채들을 사용할 경우 명목금리의 하한으로 여겨지는 \bar{R} 값이 음의 값이 되고 다른 모수들이 실제에 비해 과도한 수치를 나타내고 있는 것으로 나타났다. 이는 적절한 추정값 산출이 어려워짐을 보여준다. 우리나라에서도 국채 3개월, 6개월의 단기물을 사용한 결과 동일한 현상이 관찰되었다[§]. 5년 만기 국채는 3년 만기 국채에 비해 거래량이 적어 금리 데이터 산출 시 시장정보 반영에서 신뢰성이 떨어지는 것으로 판단되기 때문에 본 연구에서는 추정을 위한 2개의 채권 가격으로 단기금리를 대표하는 3개월 만기 채권과 중장기 금리를 대표하는 3년 만기 채권을 이용함으로써 우리나라 이자율 기간구조를 보다 실증적으로 파악하고자 한다.

[§] 실제로 모수를 추정하였으나 본문에는 포함하지 않았다.

2. 방법론

이자율 기간구조 모형의 효율적인 모수추정 및 현실 적합성을 위해 다양한 모수 추정 방법론들이 개발되어 왔다. 대표적인 모수추정 방법으로는 일반 적률법(GMM), 효율적 적률법(EMM), 최우추정법(MLE) 및 상태공간모형(칼만필터)등이 있다. 우리나라의 금리들도 칼만필터(김명직,장국현 2000), 최우추정법(이병근,현정순 2002) 등과 같이 다양한 방법에 의해 추정되었다.

본 연구에서는 PS의 방법론을 따라 조건부 확률분포를 이용하여 적절한 우도 함수(Likelihood function)를 도출하고 이 함수를 극대화시킴으로써 모형을 실질 자료에 가장 적합하게 만드는 모수들(Parameters)을 찾아내는 방법인 최우추정법을 사용한다. PS 모형의 방법론은 순간이자율과 같은 관찰 불가능한 상태변수들의 모수를 추정하기 위해 자료의 대응치를 요구하지 않는다. 대신 위험의 시장가격이 포함된 관찰 가능한 채권 가격으로부터 상태변수들에 대한 조건부 확률밀도 함수를 도출 함으로써 모형을 현실의 자료에 보다 가깝게 하는 모수들을 구할 수 있는 장점이 있다.

식 (2.5)의 채권가격 식을 통해 시장에서 관찰되지 않는 상태변수의 조건부 확률 밀도함수(Conditional density function)를 아래와 같이 구할 수 있다.

$$f(r_s, y_s | r_t, y_t) = \prod_{j=1}^2 d_j(t, s) \cdot \exp(-u_j(t, s) - v_j(t, s)) \cdot \left[\frac{v_j(t, s)}{u_j(t, s)} \right]^{q_j/2} \cdot I_{q_j}(2\sqrt{u_j(t, s)v_j(t, s)}) \quad (3.1)$$

$$\text{단, } d_j(t, s) = \frac{2k_j}{\sigma_j^2(1 - \exp(-\kappa_j(s-t)))}, \quad j = 1, 2,$$

$$u_1(t, s) = d_1(t, s)r_t \exp(-\kappa_1(s-t)) \quad , \quad s > t$$

$$u_2(t, s) = d_2(t, s)y_t \exp(-\kappa_2(s-t))$$

$$v_1(t, s) = d_1(t, s)r_s$$

$$v_2(t, s) = d_2(t, s)y_s$$

$$q_j = 2\kappa_j\theta_j/\sigma_j^2 - 1 \quad , \quad j = 1, 2,$$

여기에서 $I_q(\cdot)$ 는 수정 베셀 함수(the first kind of order q)이다. 위의 식에서 상태변수 r , y 는 시장에서 관찰되지 않는 변수이므로 시장에서 관찰 가능한 두 개의 채권가격을 위의 조건부 확률에 적용함으로써 모수를 추정 할 수 있다. 우선, 시장에서 관찰되는 만기가 서로 다른 두 개의 채권 가격을 $P_s(\tau_1)$, $P_s(\tau_2)$ 라 하자. 이 때 식 (2.4)로부터 두 개의 상태변수를 아래와 같이 도출 할 수 있다.

$$r_s = \frac{D(\tau_2)[E(\tau_1) - \ln P_s(\tau_1)] - D(\tau_1)[E(\tau_2) - \ln P_s(\tau_2)]}{B(\tau_1)D(\tau_2) - D(\tau_1)B(\tau_2)} \quad (3.2)$$

$$y_s = \frac{B(\tau_1)[E(\tau_2) - \ln P_s(\tau_2)] - B(\tau_2)[E(\tau_1) - \ln P_s(\tau_1)]}{B(\tau_1)D(\tau_2) - D(\tau_1)B(\tau_2)} \quad (3.3)$$

단, $E(\tau_i) = \ln(A(\tau_i)C(\tau_i)) - \bar{R}\tau_i$, $i = 1, 2$, 이며, $A(\tau)$, $B(\tau)$, $C(\tau)$ 와 $D(\tau)$ 는 식 (2.4)에서 정의된 것과 동일하다. 식 (3.1), (3.2), (3.3)을 통해 관찰 불가능한 상태변수에 대한 조건부 확률밀도함수를 관찰 가능한 채권가격에 의한 조건부 확률밀도함수로 아래와 같이 전환이 가능하다.

$$\begin{aligned} f(P_s(\tau_1), P_s(\tau_2) | P_t(\tau_1), P_t(\tau_2)) &= |J| \cdot f(r_s, y_s | r_t, y_t) \\ &= \frac{\prod_{j=1}^2 d_j(t, s) \cdot \exp(-u_j(t, s) - v_j(t, s)) \cdot \left[\frac{v_j(t, s)}{u_j(t, s)} \right]^{q_j/2} \cdot I_{q_j}(2\sqrt{u_j(t, s)v_j(t, s)})}{[B(\tau_1)D(\tau_2) - D(\tau_1)B(\tau_2)]P_s(\tau_1)P_s(\tau_2)} \end{aligned} \quad (3.4)$$

여기에서 J 는 두 밀도함수 사이의 Jacobian이다. 결과적으로 시장에서 관찰된 두 채권가격 $P_s(\tau_1)$ $P_s(\tau_2)$ 의 $N(t_1, t_2, \dots, t_n)$ 개의 시계열 데이터를 가지고 로그 우도함수를 구하고 동 함수를 최대화 하는 모수들을 다음과 같이 추정한다.

$$\begin{aligned} L(\kappa_1, \sigma_1, \mu_1, \lambda, \kappa_2, \sigma_2, \mu_2, \sigma_p, \bar{R}) &= \ln f(P_{t_2}, P_{t_3}, \dots, P_{t_n} | P_{t_1}) \\ &= \ln \prod_{i=2}^N f(P_{t_i} | P_{t_{i-1}}) \\ &= \sum_{i=2}^N \ln f(P_{t_i} | P_{t_{i-1}}) \end{aligned} \quad (3.5)$$

3. 실증분석 결과

아래의 표1과 표2는 이자율에 대한 기초 통계량을 보여준다. 채권의 만기 별 평균으로 관찰된 국채 이자율 구조는 우리나라에서 전형적으로 관찰되는 우 상향 기울기를 나타내고 있다. 첨도, 왜도로 판단할 때 시계열 자료가 정규분포와 상당한 차이를 보이고 있다. 또한, 만기가 길고 거래량이 많은 지표채권일수록 변동성이 크며 장,단기 채권간에는 약한 상관관계를 보이고 있다.

< 표 1 : 국채 이자율에 대한 기초 통계량 >

	3M	6M	1Y	1.5Y	2Y	2.5Y	3Y	5Y
평균	4.89	5.06	5.30	5.57	5.74	5.81	6.03	6.57
Median	4.73	4.94	5.28	5.63	5.81	5.90	6.14	6.65
표준편차	0.48	0.45	0.45	0.49	0.53	0.48	0.53	0.55
최대값	6.52	6.66	6.72	6.77	7.04	6.52	7.14	7.83
최소값	4.03	4.12	4.18	4.29	4.35	4.03	4.66	5.52
첨도	2.78	2.97	3.05	2.90	2.51	2.78	2.02	2.06
왜도	0.79	0.65	0.26	-0.04	-0.12	0.79	-0.20	-0.01

< 표 2 : 국채 이자율 만기에 따른 상관관계 >

3M	6M	1Y	1.5Y	2Y	2.5Y	3Y	5Y	
1.00	0.99	0.89	0.72	0.59	0.53	0.44	0.36	3M
	1.00	0.94	0.79	0.70	0.61	0.53	0.43	6M
		1.00	0.95	0.87	0.83	0.77	0.66	1Y
			1.00	0.98	0.96	0.92	0.82	1.5Y
				1.00	0.99	0.92	0.82	2Y
					1.00	0.98	0.36	2.5Y
						1.00	0.93	3Y
							1.00	5Y

(2001년 1월 2일 ~ 2002년 12월 31일, 관찰일수 : 569일)

아래의 표3은 3개월, 3년의 2가지 국채들로 모수를 추정 한 결과 값을 나타낸다. PS의 연구에 의하면 모수 추정을 위한 대상채권들을 계속적으로 바꾸어도 식(2.4)의 상관계수 $\rho (dW_2, dW_3)$ 에 대한 추정치는 -1로 나타나고 있음이 밝혀져 있다. 본 연구에서는 이를 수용하여 ρ 를 -1의 상수로 취급하였으며 \bar{R} 는 앞에서도 정의 되었듯이 명목금리의 하한으로 간주되어 양의 수치로 제약한다

< 표 3 : PS모형의 모수 추정 결과값 >

κ_1	θ_1	σ_1	λ	σ_p	κ_2	θ_2	σ_2	\bar{R}
0.2748	0.0360	0.4378	-0.080	0.5195	0.3807	0.0522	0.4312	0.001
(0.016)	(0.002)	(0.014)	(0.023)	(0.000)	(0.000)	(0.000)	(0.008)	(-)

주1) 괄호 안의 값은 모수에 대한 점근적 분산을 나타냄.

\bar{R} 는 양의 수치로의 제약에 따라 적절한 점근적인 분산을 도출하지 못하였음.

모수추정을 위한 프로그램으로 gauss optimal 함수를 이용하였으며 표본 대수우도 값은 -0.6696 으로 나타나고 있다.

위험의 시장가격을 나타내는 λ 는 음의 값으로 나타나 위험 프리미엄이 양의 수치로 표시되고 있으며 첫 번째 상태변수로 간주되는 실질이자율의 장기평균이 3.6%, 두 번째 상태변수로 간주되는 인플레이션율의 장기평균이 5.22% 그리고 명목금리의 하한으로 간주되는 \bar{R} 는 0과 거의 가까운 수준인 0.001%로 나타나고 있다. 두 상태변수의 장기평균으로 진행되는 속도계수들(κ_1, κ_2)은 단일요인 CIR모형의 추정치보다 작은 수준으로 이는 \bar{R} 가 명목이자율 하한에 대한 장기평균 역할을 하고 있음으로 여겨진다.

아래의 표4는 모수 추정기간인 2001년 1월 2일부터 2002년 12월 31일까지의 현물이자율로 표시된 실질금리와 모형에 의해 산출된 이론금리의 오차에 대한 통계값이다. 그 결과값은 2개의 채권가격으로 사용된 3개월, 3년의 금리오차가 0으로 동 모형의 특성을 잘 반영하고 있음을 보여주고, 3년 미만의 기간에서는 평균오차가 0.1%수준 이하이며 오차의 최대값 또한 0.5%수준 이하로 모형의 적합성은 양호한 수준으로 평가된다. 그러나 5년의 장기채권에 대한 오차는 평균 0.318%, 최대값 0.9%로 그 괴리가 확대되고 있음을 보여준다. 이는 5년 만기 장기채권의 경우, 3개월과 3년 만기의 단, 중기 채권에 의해서 결정되는 위험프리미엄 외에 추가로 기간프리미엄(term premium)을 요구하는 것으로 해석될 수 있다. 그 결과 이론가가 실체가보다 낮게 평가되고 있음을 볼 수 있다.

마지막으로, 기간내의 추계적인 금리비교를 위해 각 만기 별 금리의 진행과정과 오차과정을 그림1과 그림2로 나타내었다. 그림1과 그림2에 따르면 Sample 기간 동안 이론금리가 실질금리의 방향성, 변동성을 적절하게 추론하고 있음을 나타내고 있으나, 앞에서 살펴본 바와 같이 만기가 장기일수록 이론금리의 변동폭이 커져 5년 금리인 경우 구간에 따라 이론금리와 실제금리의 다소 큰 폭의 괴리를 보여주고 있음을 알 수 있다.

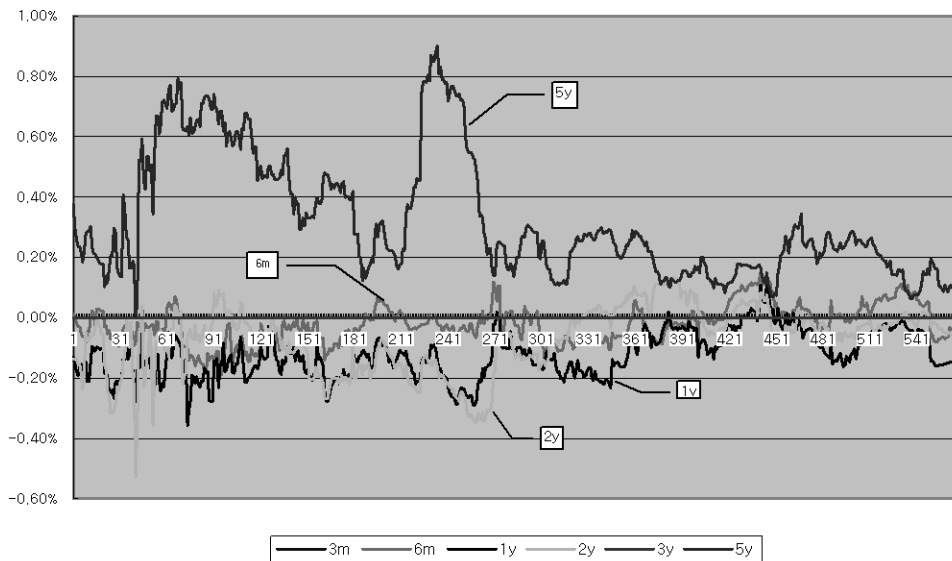
< 표 4 : 실질금리와 이론금리의 오차에 대한 통계량 > (단위 : %)

만 기	평 균	표준편차	최대값
3 개월	0.000	0.000	0.000
6 개월	0.054	0.062	0.189
1 년	0.126	0.075	0.356
2 년	0.096	0.105	0.528
3 년	0.000	0.000	0.000
5 년	0.318	0.202	0.900

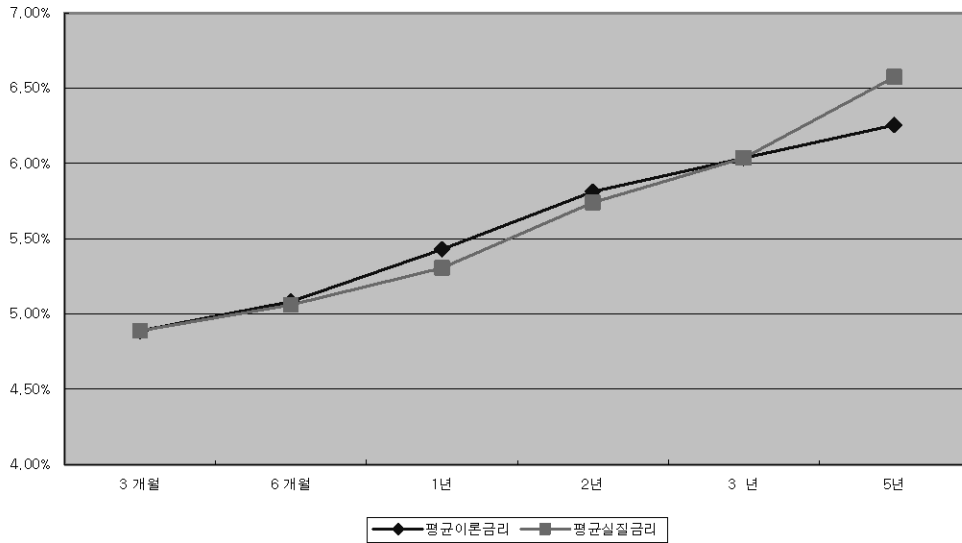
주2) 각 만기의 해당금리는 spot rate 임

평균과 최대값은 오차의 절대값에 대한 평균, 최대값이며 표준편차는 오차에 대한 표준편차임.

<그림 1 : Sample 기간의 금리오차의 추계적 과정 >



< 그림 2 : 평균 실질금리와 평균 이론금리의 이자율 기간구조 비교 >



IV. 이자율 예측을 통한 국채거래의 실효성 분석

1. 이자율 예측 및 채권가격예상

PS 모형에서 도출된 채권가격 공식을 바탕으로 현물채권의 선도(Forward) 가격을 아래와 같이 구할 수 있다.

$$F_t(s, \tau) = P_t(\tau) / P_t(s-t) \quad (4.1)$$

$$= \frac{A(\tau)C(\tau)}{A(s-t)C(s-t)} \times \exp(-\bar{R}(\tau+t-s) - [B(\tau) - B(s-t)]r_t - [D(\tau) - D(s-t)]y_t)$$

또한, 아래의 식(4.2)는 현 시점에서 미래에 기대되는 조건부 기대이자율이다.

$$E(r_s | r_t) = r_t \exp(-\kappa_1 \cdot (s-t)) + \theta_1 \cdot (1 - \exp(-\kappa_1 \cdot (s-t))) \quad (4.2)$$

식 (2.5), (4.1), (4.2) 및 추정된 모수들을 이용하여 각 채권의 미래 현금흐름에 대한 할인계수들을 (Discount factors) 구하여 미래의 기대 채권가격 및 미래의 기대 선물가격을 구한다.

2. 국채 현물 및 선물 거래전략

국채현물 매매전략은 거래대상 채권의 미래 기대가격 P_s 와 현재 시장에서 관찰되는 거래대상 채권가격 P_t 를 아래와 같이 비교 함으로서 현물채권의 매수/매도를 통해 실행할 수 있다. 단,

$s > t$ 이며 현재 시장에서 환매채(Repo) 거래가 활성화 되어 있음을 가정하고 각 거래주체 별 신용위험(Credit risk)은 감안하지 않는다. 투자 대상의 채권으로 3년 만기 국채에서 거래량이 가장 활발한 지표채권인 국채 3-1을 선택하였다. 투자는 1주일 단위로 채권가격을 예측하고 현재 현금흐름과의 비교를 통해 채권 매수/매도를 실행한다.

$$\text{거래대상채권 매수전략} : P_s > P_t + C - R \quad (4.3)$$

$$\text{거래대상채권 매도전략} : P_s < P_t - C + R$$

단, C는 채권 거래기간 동안 현물채권에서 발생하는 쿠폰이자이며, R은 환매채 거래에서 발생하는 이자를 말한다.

국채현물과 달리 국채 선물 매매전략은 모형에 의해 산출된 미래 기대 이자율을 이용하여 우리나라 국채선물의 미래 선물가격 F_s 를 산출한 뒤 현재 시장에서 관찰된 시장가격 F_t 와의 비교를 통해 아래와 같이 실행한다.

$$\text{국채선물 매수} : F_s > F_t \quad \text{단, } (s > t)$$

$$\text{국채선물 매도} : F_s < F_t$$

본 연구에서는 현재 우리나라 국채 선물거래소에서 사용하는 방식과 균형이론에 의해 도출된 채권의 미래 선도(Forward) 가격을 바탕으로 국채선물 이론가를 산출한다. 이론가 산출방법은 국채선물의 만기시점 (T_F)에서 바스켓에 편입된 채권들의 만기시점 ($T_{S,i} (i=1,2,3)$)까지의 현금흐름을 모형에서 예측된 T_F 시점에서의 할인금리들로 할인하여 T_F 시점에서의 바스켓 편입 채권의 선물가격 $F_{T_F,i}$ 들을 구한다. 그리고 구해진 각각의 선물가격들과 $T_{S,i} (i=1,2,3)$ 까지의 각 바스켓 편입채권의 현금흐름들을 일치시키는 내부수익률들을 구한 다음 이의 산술평균치로 기초자산인 가상채권의 현금흐름을 할인함으로써 국채선물의 이론가격을 구한다. 실증분석을 위한 대상기간은 2003/1/8부터 2003/6/17일까지로 하며 동 기간 동안의 국채 선물거래는 첫 거래 1주일을 제외하고 두 번째 거래부터 매 2주일 단위로 매매하였다. 거래 대상 선물은 KTB303 (만기일 : 2003/3/19)과 KTB 306 (만기일 : 2003/6/18)이며 해당 만기까지 한 종목에만 투자 한다. 국채선물 이론가 산출을 위한 바스켓 종목은 KTB303이 국채 2-2, 2-4, 2-7이며 KTB 306의 경우는 국채 2-7, 2-10, 2-11이다.

헤지를 위한 바스켓 채권의 투자비율을 구하기 위해, 각 바스켓 현물채권들의 투자비율을

w_1, w_2, w_3 이라 하자. 각 바스켓 현물채권의 현재 가격들을 $P_{1,t}, P_{2,t}, P_{3,t}$, 현재 선물가격을 F_t 라고 하고 모형에 의해 예측된 각 바스켓 현물채권의 미래가격 $P_{1,s}, P_{2,s}, P_{3,s}$, 미래의 선물가격을 F_s 라 하자. 현재 시점의 현물 포지션과 선물포지션을 일치 시키고, 헤지 마지막 일의 현물포지션과 선물 포지션이 일치되도록 투자비율을 선택한다면 현물의 가치 변동치와 선물의 가치 변동치가 정확하게 일치되어 완벽한 헤지 거래를 만들 수 있을 것이다. 즉, 아래의 식과 같이 투자 비율을 정한다.

$$W_1P_{1,t} + W_2P_{2,t} + W_3P_{3,t} = F_t \quad (4.4)$$

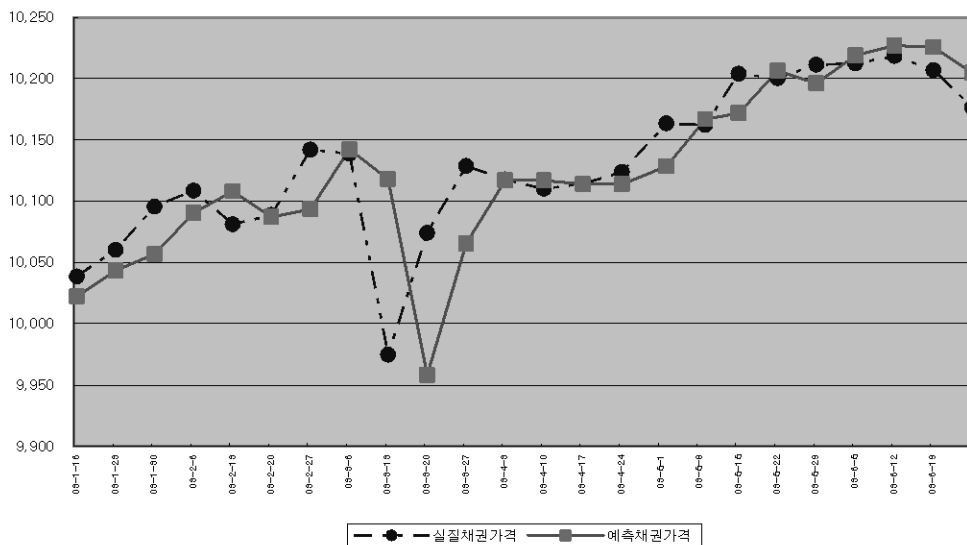
$$W_1P_{1,s} + W_2P_{2,s} + W_3P_{3,s} = F_s \quad (4.5)$$

$$W_1 + W_2 + W_3 = 1 \quad (4.6)$$

3. 국채 현물 및 선물 매매 전략에 따른 실증분석

아래의 그림 3은 거래대상 기간 중 국채 3-1의 실질 채권가격과 모형에 의한 예측이론가격을 나타낸다. 그 결과 전반적으로 모형이 예측대상인 실질 가격 움직임의 방향성 및 변동성을 적절히 예측하고 있음을 알 수 있다. 그러나 3/13일과 3/27일 구간에서는 큰 오차를 보이고 있다. 이는 3/13일 주간에 발생했던 SK 글로벌 사태에 의한 일시적인 충격의 결과로 볼 수 있다. 동 기간에 발생했던 실질 채권 가격 하락은 다음 기에 대한 예측치를 하락시켜 다음 기의 채권 가격 반등을 포착하지 못하고 있다.

그림 3 : 국채 현물거래에서 실질가격과 예측가격 비교



아래의 표5는 거래 대산 기간 중 채권 현물 거래의 손익을 보여주고 있다. 총 24회의 거래에서 17회의 수익창출과 7회의 손실이 발생 되었으며 총 수익은 액면 채권가격 10,000원 기준으로 234.06원으로 약 2.34%정도이다.

앞의 <그림 3>에서 살펴 보았듯이 시장의 일시적인 충격구간에서 손익변동이 크게 발생하였고 6개월의 투자기간 동안 채권거래자들이 방향성 예측을 통한 적절한 수익 창출할 수 있었음을 보여준다.

<표 5 : 채권가격 예측을 통한 국채 3-1 매매거래의 손익> (단위: 원)

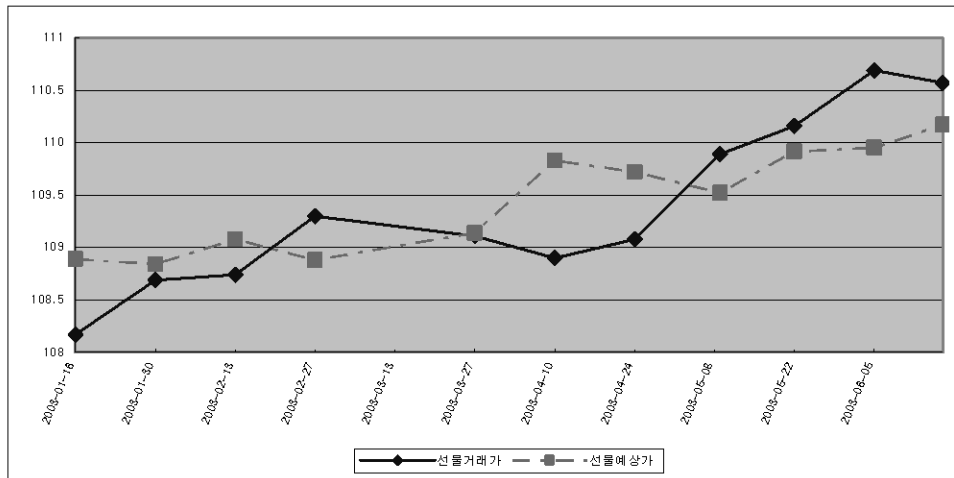
거래일	예상일	예상가격	현금흐름	거래전략	결과일	수익
2003-01-08	2003-01-16	10.021	10.010.2	buy		
2003-01-16	2003-01-23	10.042	10.038.7	buy	2003-01-16	28.30
2003-01-23	2003-01-30	10.056	10.060.5	sell	2003-01-23	21.63
2003-01-30	2003-02-06	10.089	10.095.8	sell	2003-01-30	(35.03)
2003-02-06	2003-02-13	10.106	10.108.9	sell	2003-02-06	(12.93)
2003-02-13	2003-02-20	10.085	10.081.3	buy	2003-02-13	27.77
2003-02-20	2003-02-27	10.090	10.088.9	buy	2003-02-20	7.43
2003-02-27	2003-03-06	10.139	10.142.1	sell	2003-02-27	53.03
2003-03-06	2003-03-13	10.115	10.138.7	sell	2003-03-06	3.57
2003-03-13	2003-03-20	9.956	9.975.0	sell	2003-03-13	163.97
2003-03-20	2003-03-27	10.062	10.074.3	sell	2003-03-20	(99.13)
2003-03-27	2003-04-03	10.113	10.128.8	sell	2003-03-27	(54.33)
2003-04-03	2003-04-10	10.113	10.117.8	sell	2003-04-03	11.17
2003-04-10	2003-04-17	10.110	10.110.3	sell	2003-04-10	7.72
2003-04-17	2003-04-24	10.109	10.114.6	sell	2003-04-17	(4.13)
2003-04-24	2003-05-02	10.125	10.124.0	buy	2003-04-24	(9.23)
2003-05-02	2003-05-09	10.161	10.163.6	sell	2003-05-02	39.33
2003-05-09	2003-05-15	10.166	10.162.4	buy	2003-05-09	1.30
2003-05-15	2003-05-22	10.200	10.204.3	sell	2003-05-15	41.65
2003-05-22	2003-05-29	10.190	10.200.4	sell	2003-05-22	4.07
2003-05-29	2003-06-05	10.212	10.211.4	buy	2003-05-29	(10.83)
2003-06-05	2003-06-12	10.219	10.212.5	buy	2003-06-05	0.83
2003-06-12	2003-06-19	10.218	10.218.5	sell	2003-06-12	5.83
2003-06-19	2003-06-26	10.197	10.207.2	sell	2003-06-19	11.47
2003-06-26					2003-06-26	30.57
					합 계	234.06

단, 채권가격은 쿠폰을 제외한 clean price임.

실질 채권가격은 거래일의 시장 종가 기준임.

현금흐름 = 현재가격 + 쿠폰 - repo이자 또는 현재가격 - 쿠폰 + repo이자

<그림 4 : 국채 선물거래에서 실질가격과 예측가격 비교>



위의 그림 4는 거래 대상기간 중 국채선물의 실질가격과 모형에 의한 기대 예측 이론가격을 추계적으로 나타낸다. 그 결과 앞의 현물 채권 거래에서와 같이 대체적으로 예측가격의 추세가 실질가격의 추세와 일치되고 있다. 그러나 국채현물거래에서와 같이 예측가격과 시장가격과의 괴리가 거의 전 구간에서 존재하고 있다. 표6은 모형에 의해서 산출된 평균 선도금리와 기대 국채선물 이론가를 나타낸다.

<표 6 : 모형에 의한 평균 선도금리 및 기대 선물이론가 산출표>

거래일	예측일	국채선물	바스켓종류	평균선도금리	가상채권가격
2003-01-08	2003-01-16	KTB 303 (2003/3/19)	국고 2-2	4.832%	108.80
			국고 2-4		
			국고 2-7		
				평균선도금리	가상채권가격
2003-01-16	2003-01-30	KTB 303 (2003/3/19)	국고 2-2	4.854%	108.73
			국고 2-4		
			국고 2-7		
				평균선도금리	가상채권가격
2003-01-30	2003-02-13	KTB 303 (2003/3/19)	국고 2-2	4.777%	108.96
			국고 2-4		
			국고 2-7		
				평균선도금리	가상채권가격
2003-02-13	2003-02-27	KTB 303 (2003/3/19)	국고 2-2	4.822%	108.83
			국고 2-4		
			국고 2-7		
				평균선도금리	가상채권가격
2003-02-27	2003-03-13	KTB 303 (2003/3/19)	국고 2-2	4.765%	108.99
			국고 2-4		
			국고 2-7		
				평균선도금리	가상채권가격
2003-03-27	2003-04-10	KTB 306 (2003/6/18)	국고 2-7	4.519%	109.71
			국고 2-10		
			국고 2-11		
				평균선도금리	가상채권가격
2003-04-10	2003-04-24	KTB 306 (2003/6/18)	국고 2-7	4.590%	109.51
			국고 2-10		
			국고 2-11		
				평균선도금리	가상채권가격
2003-04-24	2003-05-09	KTB 306 (2003/6/18)	국고 2-7	4.630%	109.39
			국고 2-10		
			국고 2-11		
				평균선도금리	가상채권가격
2003-05-09	2003-05-22	KTB 306 (2003/6/18)	국고 2-7	4.503%	109.76
			국고 2-10		
			국고 2-11		

<표 7 : 국채 선물가격 예측을 통한 국채선물 매매거래의 손익> (단위 : 원)

거래일	거래대상선물	선물현재가	선물예상일	선물예상가	거래전략	거래수익
2003-01-08	KTB303	107.88	2003-01-16	108.8	buy	
2003-01-16	KTB303	108.17	2003-01-30	108.73	buy	290,000
2003-01-30	KTB303	108.69	2003-02-13	108.96	buy	520,000
2003-02-13	KTB303	108.74	2003-02-27	108.83	buy	50,000
2003-02-27	KTB303	109.30	2003-03-13	108.99	sell	560,000
2003-03-27	KTB306	109.11	2003-04-10	109.71	buy	190,000
2003-04-10	KTB306	108.90	2003-04-24	109.51	buy	-210,000
2003-04-24	KTB306	109.08	2003-05-09	109.39	buy	180,000
2003-05-09	KTB306	109.89	2003-05-22	109.76	sell	810,000
2003-05-22	KTB306	110.16	2003-06-05	109.82	sell	-270,000
2003-06-05	KTB306	110.69	2003-06-17	110.04	sell	-530,000
2003-06-17		110.57				120,000
총수익						1,710,000

단. 선물현재가는 거래일 지표종목의(거래량기준) 증가 평균임.
 선물예상일은 거래대상 선물의 2주후의 예상가임.
 국채선물 거래이익은 한 계약거래시 1 tick당 10,000원임.
 국채선물거래는 1계약 투자를 기준으로 함.

표7은 해당 거래일에 예측된 선물이론가를 거래일의 실질 선물가격과 비교하여 매매 전략을 취한 결과이다. 표7에 의하면 총 11회의 거래에서 8회의 수익창출과 3회의 손실이 발생되었으며 선물 1 계약을 기준으로 1,710,000원, 약 1.7% 정도의 수익이 창출되었음을 알 수 있다. 국채선물 거래에서도 현물 거래와 마찬가지로 모형을 통해 시장거래자가 6개월 정도의 장기 투자에서 적절한 수익을 창출 할 수 있음을 알 수 있다.

국채선물 헤지 거래의 실증분석을 위한 대상기간은 2003/1/8부터 2003/6/5일까지로 한다. 동 기간 동안의 헤지 거래는 전반기에 KTB303(만기일 : 2003/3/19)과 후반기에 KTB306(만기일 : 2003/6/18)에 대해 각 5차례의 헤지 거래를 실시한다. 본래 헤지 거래는 보유 현물채권 포트폴리오에 대해 해당선물을 매도함으로써 이루어지는 것이 보통이나 본 연구에서는 해당 국채선물 매도와 그 선물에 대한 바스켓 현물을 산출된 헤지 비율에 따라 매입(매도) 함으로써 헤지 거래의 성과를 분석하고자 한다.

아래의 표8은 국채 현물, 선물가격 예측을 통한 헤지 거래의 성과 분석표이다. 그 결과는 헤지 거래의 성과가 거의 없는 것으로 나타나고 있다. 헤지 포지션이 단순 국채선물 매도 포지션보다 특히 더 큰 포지션 변동성을 나타내고 있어 헤지 거래는 유효하지 않은 것으로 판단된다. 시장의 일시적인 충격기간 전후인 3/13과 4/10에 헤지 포지션의 변동이 훨씬 크게 나타난 것을 알 수 있다.

이는 앞서 살펴 본 바와 같이 모형에 의해 산출된 미래의 기대 이론채권가격과 기대 이론선물가격의 예측력이 정확하지 않았음을 보여주는 것과 같은 결과이며 또한, 시장 거래자들이 모형에 의한 미래의 채권 현물, 선물가격 예측을 통해 헤지 거래의 성과를 볼 수 없는 것으로 분석된다. 이는 PS 모형이 정확한 가격 예측을 필요로 하는 헤지 거래보다 방향성 예측을 이용한

투자 거래 전략에 더 유용한 모형임을 보여주고 있다.

표 8 : 국채 현물, 선물가격 예측을 통한 헤지 비율 및 거래 결과 (단위 : 원)

〈헤지비율〉				〈거래결과〉		
거래일	선물매도	채권매수	매수비율	거래일	헤지 포지션 손익	선물매도 포지션 손익
2003-01-08	KTB303	국고2-2	0.85	2003-01-16	31,696,147	-29,000,000
		국고2-4	1.89			
		국고2-7	-1.74			
2003-01-16	KTB303	국고2-2	2.18	2003-01-30	106,048,800	-52,000,000
		국고2-4	-2.52			
		국고2-7	1.35			
2003-01-30	KTB303	국고2-2	0.68	2003-02-13	-47,765,323	-5,000,000
		국고2-4	2.19			
		국고2-7	-1.87			
2003-02-13	KTB303	국고2-2	9.47	2003-02-27	581,199,762	-56,000,000
		국고2-4	-30.12			
		국고2-7	21.64			
2003-02-27	KTB303	국고2-2	8.95	2003-03-13	-1,917,648,150	211,000,000
		국고2-4	-32.36			
		국고2-7	24.41			
2003-03-27	KTB306	국고2-7	-19.38	2003-04-10	68,517,612	21,000,000
		국고2-10	12.50			
		국고2-11	7.88			
2003-04-10	KTB306	국고2-7	-8.3	2003-04-24	76,346,054	-18,000,000
		국고2-10	4.2			
		국고2-11	5.1			
2003-04-24	KTB306	국고2-7	-0.7	2003-05-09	85,549,976	-81,000,000
		국고2-10	-1.7			
		국고2-11	3.4			
2003-05-09	KTB306	국고2-7	-13.6	2003-05-22	302,956,162	-27,000,000
		국고2-10	9.7			
		국고2-11	4.9			
2003-05-22	KTB306	국고2-7	0.40	2003-06-05	-16,027,329	-53,000,000
		국고2-10	-1.90			
		국고2-11	2.50			

단, 채권 매수비율에서 음의 표시는 해당 채권을 매도함을 의미한다.

V. 결론

본 논문에서는 대표적인 균형 이자율 모형인 CIR 2요인 모형을 이용하여 우리나라 채권시장의 지표채권인 국채의 금리 기간구조를 살펴보고 이 모형을 바탕으로 이자율 예측을 통하여 국채 현물, 선물, 헤지 거래의 실효성을 분석하고 있다. 그 결과 다음과 같은 사실을 알 수 있다.

PS모형은 채권가격에 대한 닫힌 해(Closed form solution)를 도출 할 수 있으므로 무차익거래 모형과 같이 복잡한 과정 없이 미래의 채권가격을 쉽게 계산 할 수 있다는 이점이 있다. 모형을 이용한 우리나라 국채 이자율 기간구조의 적합성 측정에서 만기가 3년 이하인 채권에 대해서는 양호한 결과를 보이고 있으나 만기 5년의 기간에서는 이론금리와 실제금리간의 괴리가 커지는 것을 알 수 있다.

동 모형은 모수 추정기간(in sample period)과 채권 현물 및 선물 거래 기간 (out of sample period)에 대한 추계적인 이자율과정에서 시장의 일시적인 충격 발생구간을 제외하고는 이론금리와 실질금리의 방향성은 대체적으로 일치하고 있어 모형을 활용하여 채권 현물, 선물거래에서 장기적으로 수익을 창출 할 수 있음을 확인 할 수 있다.

그러나 이자율 예측을 통한 3년 만기 국채 현물, 선물거래와 국채선물 헤지 거래에서 동 모형의 예측가격과 실질가격의 괴리가 일정하게 존재하고 특히, 시장의 일시적인 충격 발생시 모형이 예측과정에서 이를 적절하게 반영을 못하고 있어 모형을 통한 우리나라 국채 이자율 과정에 대한 예측의 실효성을 확인 할 수 없다. 그 결과로 국채선물 헤지 거래에서 헤지 성과가 전혀 없음을 확인 할 수 있다.

결론적으로 PS 모형은 미래의 금리에 대한 예측력에 문제점을 갖고 있음에도 불구하고 신속하고 편리하게 금리의 방향성 및 변동성 등, 채권 거래 전략을 위한 유익한 정보를 줄 수 있었다. 이는 PS 모형이 정확한 가격 예측을 필요로 하는 헤지 거래보다 방향성 예측을 이용한 투자 거래 전략에 더 유용한 모형임을 보여주고 있다.

본 연구의 투자 전략은 투자 기간(investment time horizon)과 이자율의 예측력에 따라 수익이 다를 수 있다. 그러므로 수익을 극대화시킬 수 있는 최적의 투자 기간에 대한 실증적 분석과 더불어 투자 기간 동안 발생할지 모르는 금리의 구조적인 변화(regime shift)를 고려한 다른 모형 등에 대한 연구는 앞으로의 과제로 남겨둔다.

참 고 문 헌

- 장장구, 이정진, “한국 선물거래소의 국채선물의 가격추정“, 2002, 선물연구. 10, pp1-23.
- 김명직, 장국현, “ 이자율 기간구조 추정”, 2000, 재무연구, 13, pp 79- 102.
- 김인준, 김동석, 이상구, 2001, “최우추정법을 이용한 이자율 기간구조 측정 및 채권운용전략”, 2000, 선물연구. 9, pp 243-26.
- 박진우, 최영수, “이자율 기간구조를 이용한 국채선물 이론가격 산정”, 2003, 선물연구, 제 11권, 제 1호, pp101-120.
- 이병근, 현정순, “Heath-Jarrow-Morton 모형을 이용한 우리나라 이자율 기간구조 추정”, 경제분석, 2002, 8권 제2호, pp56-80.
- Cox, J. C., J, E, Ingersoll, and S. A. Ross, “ An Inter-temporal General Equilibrium Model of Asset Prices, “ *Econometrica* 53(a), 1985, 363 -384.
- Cox, J. C., J, E, Ingersoll, and S. A. Ross, “ A Theory of the Term Structure of Interest Rates,” *Econometrica* 53(a), 1985, pp385-408.
- Heath, D., R. Jarrow, and A. Morton, “Bond pricing and the term structure of interest rates : A new methodology for contingent claims valuation,” *Econometrica*, 60, 1992, pp77-106
- Ho, T. S. Y. and S. B. Lee, “Term structure movements and pricing interest rate contingent claim,” *Journal of Finance*, 41, 1986, pp1011-1029.
- Pearson N, D. “Essays on Dynamic Models in Financial Economics,” Ph.D. dissertation, Massachusetts Institute of Technology. 1990.
- Pearson, N. D. and T-S Sun, “Exploiting the Conditional Density in Estimating the Term Structure : An Application to the Cox, Ingersoll, and Ross Model,” *Journal of Finance*, XLIX, No.4, 1994, pp1279-1304
- Vasicek, O., 1977, An equilibrium characterization of the term structure, *Journal of Financial Economics* 5, pp177-188.
- Chen, R-R,, L. Scott. “Maximum Likelihood Estimation for a Multifactor Equilibrium Model of the Term Structure of Interest Rates”, 1993, *Journal of Fixed Income*, pp53-72.