두 가지 통화 선물을 이용한 삼각 헤지(Triangular Hedge) 연구

김 훈 용 (동덕여자대학교)

조 진 형 (세종대)

두 가지 통화 선물을 이용한 삼각 헤지(Triangular Hedge) 연구

김 훈 용*, 조 진 형**

<목 차>

Ⅰ. 서론
Ⅱ. 헤지 비율 및 헤지 효과성
Ⅲ. 헤지 효과성 비교 및 최적 헤지 비율의 단순화
Ⅳ. 결론

<요약>

A국 기업이 C화에 대한 노출을 헤지하고자 한다. A화로 가격이 표시된 C화 선물이 상장되어 있어서, C화에 대한 노출을 C화 선물로 헤지하는 기존의 헤지 방법을 “직접 헤지”라고 이름 짓자. 현실 세계에는 제한된 종류의 선물들만이 상장되어 있으므로, 직접 헤지가 가능하지 않을 경우가 많다. 본 논문은 이 경우에 활용할 수 있는 헤지 방법인 “삼각 헤지”를 처음으로 개발한다. 본 논문은 A국 기업이 C화에 대한 노출을 헤지하고자 하지만 A화로 가격이 표시된 C화 선물이 상장되어 있지 않을 경우에, 이미 상장되어 있는 B화 선물(가격 표시는 A화/B화)과 C화 선물(가격 표시는 B화/C화)의 두 가지 통화 선물을 동시에 거래함으로써 헤지하는 방법을 개발한다. 본 논문은 첫 부분에서, 헤지 결과의 분산을 최소화하는 최적 헤지 비율(optimal hedge ratio, minimum-variance hedge ratio)을 구한다. 최적 헤지 비율은 회귀 분석으로 간단하게 추정할 수 있다. 다음으로 본 논문은 환율이 기하학적 브라운 운동(geometric Brownian motion)을 따른다는 가정 하에, 삼각 헤지의 헤지 효과성(hedge effectiveness)이 최선의 대안인 직접 헤지와 동일하다는 결과를 제시하고, 회귀 분석이 필요없는 누구나 쉽게 활용할 수 있는 최적 헤지 비율을 찾아낸다. 현재 제한된 종류의 통화 선물만이 상장되어 있으므로, 본 논문의 결과를 활용할 수 있는 경우는 많다.

---

* 동덕여자대학교
** 세종대학교

Ⅰ. 서론

본 논문은 두 가지의 통화 선물을 이용하여 환 위험을 헤지하는 방법을 개발한다.[1)]

두 가지의 통화 선물을 이용하여 환 위험을 헤지해야 하는 경우는 다음과 같다. 한국 기업이 유로화에 대한 노출을 헤지하고자 할 경우를 예로 들자. 유로화 가격을 원화로 표시한 유로화 통화 선물은 어느 거래소에도 상장되어 있지 않다. 이 경우에 한국선물거래소(Korea Futures Exchange)의 미국달러 선물(가격 표시는 원/달러)과 CME(Chicago Mercantile Exchange)의 유로 선물(Euro FX futures, 가격 표시는 달러/유로)을 동시에 거래함으로써 헤지할 수 있다. 차익 거래의 기회가 없는 조건(no-arbitrage condition)이 성립할 경우에, 삼각 차익 거래(triangular arbitrage)에 의해 A, B 및 C화간의 현물 환율($S_{i/j}$=i화로 표시한 j화 한 단위의 가격) 사이에는 $S_{A/C}=S_{A/B}S_{B/C}$의 관계가 성립한다. A국 기업이 C화에 대한 노출을 헤지하고자 하지만 A화로 가격이 표시된 C화 선물이 상장되어 있지 않을 경우에는, 이미 상장되어 있는 B화 선물(가격 표시는 A화/B화)과 C화 선물(가격 표시는 B화/C화)의 두 가지 통화 선물을 동시에 거래함으로써 헤지할 수 있다.

본 논문이 개발하는 헤지 방법을 "삼각 헤지(triangular hedge)"라고 이름을 짓자. 본 논문은 A국 기업이 C화에 대한 노출을 B화 선물(가격 표시는 A화/B화)과 C화 선물(가격 표시는 B화/C화)을 거래함으로써 헤지해야 하는 경우에, 헤지 결과의 분산을 최소화하는 최적 헤지 비율(optimal hedge ratio, minimum-variance hedge ratio)을 구한다. 즉 C화에 대한 노출 금액 한 단위 당 거래해야 하는 B화 선물 및 C화 선물의 거래량인 두 개의 최적 헤지 비율을 찾아낸다. 본 논문은 최적 헤지 비율을 하나의 회귀 분석으로 간단하게 추정할 수 있음을 밝힌다.(제 Ⅱ 장)

A화로 가격이 표시된 C화 선물이 상장되어 있어서, C화에 대한 노출을 C화 선물(가격 표시는 A화/C화)로 헤지하는 기존의 헤지 방법을 "직접 헤지"라고 이름 짓자. 본 논문은 환율이 기하학적 브라운 운동을 따르고 금리 위험이 없다는 가정 하에, 삼각 헤지의 헤지 효과성(hedge effectiveness)이 직접 헤지와 동일함을 밝힌다. 또한 회귀 분석을 할 필요 없이, 누구나 쉽게 구할 수 있는 삼각 헤지의 헤지 비율을 찾아낸다. 즉 기존의 최적 헤지(최소 분산 헤지)를 실제로 수행하려면, 헤지 비율을 구하기 위하여 회귀 분석을 해야 하는 번거로움이 있다. 그러나 본 논문의 삼각 헤지는 최적 헤지 임에도 불구하고 헤지 개시 시점의 현물 환율 및 선물 가격만이 필요하며, 누구나 쉽게 헤지 비율을 구할 수 있는 강점이 있다.(제 Ⅲ 장)

삼각 헤지가 직접 헤지와 동일한 헤지 효과성을 얻을 수 있다는 점은 다음을 시사한다. n 개의 국가와 n 개의 통화가 있을 경우에, 모든 환 노출을 직접 헤지로 헤지할 수 있으려면, $n(n-1)/2$ 종류의 통화 선물이 상장되어 있어야 한다. 그러나 삼각 헤지를 활용하면 1 개의 통화로 가격이 표시된 $(n-1)$ 종류의 통화 선물만 상장되어 있으면, 모든 환 노출을

1) 본 논문은 김훈용 외(2005)를 수정, 연장한 것이다.

헤지할 수 있으며 직접 헤지만큼의 헤지 효과성을 얻을 수 있다.[2)]

본 논문의 삼각 헤지는 앞으로 환 위험 헤지 방법으로 활용될 범위가 넓다. 미국 달러화, 유로화 및 일본 엔화를 비롯한 몇 가지의 주요 통화 간에는 통화 선물이 상장되어 있지만, 그 밖의 통화는 미국 달러화(혹은 한두 가지의 주요 통화) 간에의 통화 선물만이 상장되어 있다. 예를 들면 원화는 미국 달러화 간의 선물인 미국달러 선물(가격 표시는 원/달러)만이 상장되어 있을 뿐이다. 본 논문의 삼각 헤지는 위에 언급한 A화와 C화 중 하나 혹은 모두가 주요 통화가 아닌 경우에 활용할 수 있는 환 위험 헤지 방법이다. 따라서 본 논문의 결과를 활용할 수 있는 경우는 많다.

현물 포지션의 가격 위험을 하나의 선물로 헤지하는 경우의 최적 헤지는 Ederington(1979) 및 Johnson(1960)이 연구하였다. Anderson과 Danthine(1981)은 복수 개의 선물 포트폴리오로 헤지하는 경우를 연구하였으며, DeMaskey(1997)은 이를 실증 분석하였다. 삼각 헤지에 대한 연구는 본 논문이 첫 시도이다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 제 Ⅱ 장은 삼각 헤지의 최적 헤지 비율과 헤지 효과성을 구한다. 또한 헤지를 실행하기 위하여 필요한 최적 헤지 비율을 하나의 회귀 분석으로 추정해 낼 수 있음을 보인다. 제 Ⅲ 장은 환율이 기하학적 브라운 운동(geometric Brownian motion)을 따른다고 가정한다. 삼각 헤지와 직접 헤지의 헤지 효과성이 동일함을 밝히고, 회귀 분석이 필요 없는 더욱 단순화된 최적 헤지 비율을 구한다. 제 Ⅳ 장은 논문을 맺는다.

Ⅱ. 헤지 비율 및 헤지 효과성

1. 삼각 헤지

두 기간 모형이다. C화(예: 유로)에 대한 노출을 선물로 매도 헤지(short hedge)하는 경우를 상정한다. 현재의 시점은 0이다. A국(예: 한국)의 기업(혹은 투자자)이 미래 시점 T의 C화 현물 롱 포지션(long position) 한 단위를 헤지하고자 한다. 환 위험 관리의 용어를 사용하여 달리 표현하자면, 시점 T의 C화의 노출(exposure)은 C화 한 단위이다.[3)] 거래할 수 있는 통화 선물은 다음과 같다. A화(예: 원)와 C화(예: 유로)간의 통화 선물은 상장되어 있지 않다. 한편 A화(예: 원)와 B화(예: 달러)간 및 B화(예: 달러)와 C화(예: 유로)간에는 통화 선물이 상장되어 있다. 즉 가격 표시가 A화/B화(예: 원/달러)인 B화(예: 달러) 선물과 가격 표시가 B화/C화(예: 달러/유로)인 C화(예: 유로) 선물만이 상장되어 있다. 이 경우에 삼각 헤지 전략은 다음과 같다. 오늘(시점 0) 만기가 시점 M(T<M)인 B화 선물과 C화 선물을 동시에 거래함으로써 헤지를 개시하고, 시점 T가 되면 시점 0에 거래한 B화 선물과 C화 선물을 동시에 반대 매매(reverse trading, closing out the position)함으로써 헤지를

2) 물론 환율의 확률적 과정 및 금리 위험과 거래 비용이 없다는 제 Ⅲ 장의 가정 하에서 성립하는 결과이다.
3) 단순한 경우인 거래 노출(transaction exposure)의 경우를 상정한다. 보유하고 있는 C화 한 단위를 시점 T에 매도해야 하는 경우가 한 예이다.

마감한다.

C화 노출 한 단위 당 B화 선물 h_1 단위와 C화 선물 h_2 단위를 위의 설명과 같이 거래함으로써 헤지할 경우에, 헤지한 결과(hedged position)의 시점 T의 현금 흐름은 다음과 같다. $h_i, i=1,2$ 의 값은 해당 선물을 매도(매입) 헤지하면 양(음)의 값으로 표현한다.

$$S_T^{A/C} + h_1(F_0^{A/B} - F_T^{A/B}) + h_2(F_0^{A/B} - F_T^{A/B})S_T^{B/C} \qquad (1.1)$$

위의 표현에서

$S_t^{i/j}$= 시점 t의 i화로 표시한 j화의 현물 환율

$F_t^{i/j}$= 시점 t의 i화로 표시된 j화 통화 선물의 가격

$t=0, T$

$i,j=A,B,C$

표현 (1.1)에서 시점 T의 변수들은 리스크를 반영하는 확률 변수(random variable)이고, 시점 0의 변수들은 상수이다. 삼각 헤지는 (1.1)로 표현된 헤지 결과(hedged position)의 현금 흐름의 분산(variance)을 최소화하는 최적 헤지 비율(optimal hedge ratio) (h_1^*, h_2^*)을 구하는 최적화 문제(optimization problem)이다. 즉, 다음과 같다.

$$\underset{(h_1,\, h_2)}{Minimize}\ var[\, S_T^{A/C} + h_1(F_0^{A/B} - F_T^{A/B}) + h_2(F_0^{A/B} - F_T^{A/B})S_T^{B/C}] \qquad (1.2)$$

최적화 문제 (1.2)의 중괄호 속에 표현된 헤지 결과(hedged position)의 현금 흐름에서 상수인 $S_0^{A/C}$를 뺀 후에 $S_0^{A/C}$로 나누고, 두 째 항의 분모와 분자에 $F_0^{A/B}$를 곱하고, 셋 째 항의 분모와 분자에 $F_0^{B/C}S_0^{A/B}$를 곱하면 다음의 표현을 얻는다.

$$\underset{(h_1,\, h_2)}{Minimize}\ var\left[\frac{(S_T^{A/C} - S_0^{A/C})}{S_0^{A/C}} - \frac{F_0^{A/B}}{S_0^{A/C}} h_1 \frac{(F_T^{A/B} - F_0^{A/B})}{F_0^{A/B}} - \frac{F_0^{B/C}S_0^{A/B}}{S_0^{A/C}} h_2 \frac{(F_T^{B/C} - F_0^{B/C})}{F_0^{B/C}} \frac{S_T^{A/B}}{S_0^{A/B}}\right] \qquad (1.3)$$

삼각 헤지는 (1.3)에 표현된 최적화 문제의 해를 구하는 것이다. 표현 (1.3)의 중괄호는 C화 현물 포지션과 이를 헤지하기 위한 B화 선물 포지션 및 C화 선물 포지션으로 구성된 ‘헤지된 포트폴리오’의 수익률이다.[4] 삼각 헤지는 ‘헤지된 포트폴리오’ 수익율의 분산을 최소화하는 헤지 비율 (h_1^*, h_2^*)을 구하는 최적화 문제이다. 헤지 결과의 현금 흐름의 분산을 최소화하는 최적화 문제 (1.2)와 ‘헤지된 포트폴리오’의 수익률의 분산을 최소화하는 최적화 문제 (1.3)의 해 (h_1^*, h_2^*)는 동일하다.

헤지 개시 시점(0)부터 헤지 마감 시점(T)까지 기간(0, T)의 현물 환율 및 선물 가격의 변화율을 다음과 같이 정의하자. 현물 환율 및 선물 가격의 변화율은 현물 외환 롱 포지션 및 선물 롱 포지션의 수익률이기도 하다.

$$s^{i/j} \equiv \frac{S_T^{i/j} - S_0^{i/j}}{S_0^{i/j}} = \text{ 기간(0,T)의 i화로 표시한 j화 현물 환율의 변화율} \qquad (1.4)$$

$$f^{i/j} \equiv \frac{F_T^{i/j} - F_0^{i/j}}{F_0^{i/j}} = \text{ 기간(0,T)의 i화로 표시된 j화 통화 선물 가격의 변화율} \qquad (1.5)$$

위에 정의한 현물 환율 변화율 $s^{i/j}$과 선물 가격 변화율 $f^{i/j}$ 변수로, 표현 (1.3)의 최적화 문제를 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\underset{(h_1, h_2)}{Minimize}\ var\left[s^{A/C} - \frac{F_0^{A/B}}{S_0^{A/C}} h_1 f^{A/B} - \frac{F_0^{B/C} S_0^{A/B}}{S_0^{A/C}} h_2 f^{B/C} (1 + s^{A/B}) \right] \qquad (1.6)$$

표현을 간결하게 하기 위하여, 중괄호 속의 변수들을 다음과 같이 정의하자.

$$s^{A/C} \equiv s \qquad (1.7)$$

$$f^{A/B} \equiv f_1 \qquad (1.8)$$

$$f^{B/C}(1 + s^{A/B}) \equiv f_2 \qquad (1.9)$$

---

4) 총 투자 금액을 개별 자산에 분산하여 투자하는 전형적인 포트폴리오 선택(portfolio choice)은, 총 투자 금액 중 포트폴리오를 구성하는 개별 자산에의 투자 금액의 가중치(weights)의 합이 1이어야 하는 제약 조건이 있다. 본 논문의 ‘헤지된 포트폴리오’는 가중치에 관한 제약 조건이 없다. 삼각 교차 헤지는 무 제약 조건 최적화 문제(unconstrained optimization)이다.

위의 정의를 적용하여 표현 (1.6)을 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\underset{(h_1,\, h_2)}{Minimize}\ var\left[s-\frac{F_0^{A/B}}{S_0^{A/C}}h_1 f_1-\frac{F_0^{B/C}S_0^{A/B}}{S_0^{A/C}}h_2 f_2\right] \qquad (1.10)$$

헤지 결과(‘헤지된 포트폴리오’)의 분산을 최소화하는, 삼각 교차 헤지의 해인 최적 헤지 비율 (h_1^*, h_2^*)는 다음과 같다.(부록 1-A)

$$h_1^*=\frac{S_0^{A/C}}{F_0^{A/B}}\frac{(\rho_{s1}-\rho_{s2}\rho_{12})}{(1-\rho_{12}^2)}\frac{\sigma_s}{\sigma_1}$$

$$h_2^*=\frac{S_0^{A/C}}{F_0^{B/C}S_0^{A/B}}\frac{(\rho_{s2}-\rho_{s1}\rho_{12})}{(1-\rho_{12}^2)}\frac{\sigma_s}{\sigma_2} \qquad (1.11)$$

위의 식에서

$\sigma_s \equiv s$의 표준 편차

$\sigma_k \equiv f_k$의 표준 편차 (1.12)

$\rho_{sk} \equiv$ s와 f_k간의 상관 계수

$\rho_{12} \equiv f_1$과 f_2간의 상관 계수를 나타내며, $k=1,2$의 값을 갖는다.

(1.11)에 표현된 최적 헤지 비율을 최적화 문제의 목적 함수인 표현 (1.10)의 var[·] 속의 헤지 비율에 대입하면, 삼각 헤지를 할 경우에 부담하게 되는 분산(variance)인 σ_T^2를 구한다. 이는 다음과 같다.

$$\sigma_T^2=\left(1-\frac{\rho_{s1}^2+\rho_{s2}^2-2\rho_{s1}\rho_{s2}\rho_{12}}{1-\rho_{12}^2}\right)\sigma_s^2 \qquad (1.13)$$

기존의 정의인 헤지 효과성(ex ante hedge effectiveness)은 헤지를 안 할 때의 분산 (σ_{nh}^2)과 헤지를 할 때의 분산 (σ_h^2)을 비교할 경우에, 헤지함으로써 분산을 줄일 수 있는 정

도를 측정한다. 즉 헤지 효과성(ex ante hedge effectiveness) H_E는

$$H_E \equiv \frac{\sigma^2_{nh} - \sigma^2_h}{\sigma^2_{nh}} \tag{1.14}$$

로 정의되며, H_E 는 헤지함으로써 분산을 몇 %를 줄일 수 있는 가를 소수점으로 나타낸 값이다.

삼각 헤지의 헤지 효과성 H_T는 다음과 같이 구한다. 정의 (1.14)의 σ^2_{nh}에 σ^2_s를 대입하고, σ^2_h에는 (1.13)에 구한 σ^2_T를 대입한다. 그 결과는 다음과 같다.

$$H_T = \frac{\rho^2_{s1} + \rho^2_{s2} - 2\rho_{s1}\rho_{s2}\rho_{12}}{1-\rho^2_{12}} \tag{1.15}$$

삼각 헤지의 최적 헤지 비율은 아래의 회귀 분석으로 간단하게 추정할 수 있으며, 회귀 분석의 결정 계수인 R^2가 (1.15)에 구한 헤지 효과성 H_T이다.

즉, 현물 환율 $S_t^{(A/C)}$, $S_t^{(A/B)}$ 및 선물 가격 $F_t^{(A/B)}$, $F_t^{(B/C)}$의 과거 시계열 데이터를 사용하여, 환율 및 선물 가격 변화율 간의 회귀식인

$$s = \gamma_0 + \gamma_1 f_1 + \gamma_2 f_2 + e \tag{1.16}$$

의 기울기 계수(slope coefficient) γ_1과 γ_2을 최소 자승법(OLS, ordinary least square)으로 추정하면, 그 추정치는 다음과 같다.(부록 1-B)[5]

$$\begin{aligned} \widehat{\gamma}_1 &= \frac{(\rho_{s1} - \rho_{s2}\rho_{12})}{(1-\rho^2_{12})} \frac{\sigma_s}{\sigma_1} \\ \widehat{\gamma}_2 &= \frac{(\rho_{s2} - \rho_{s1}\rho_{12})}{(1-\rho^2_{12})} \frac{\sigma_s}{\sigma_2} \end{aligned} \tag{1.17}$$

기울기 계수 추정치와 최적 헤지 비율 간의 관계는 위의 식 (1.11)과 같으므로, $\widehat{\gamma}_1$ 에 $\frac{S_0^{A/C}}{F_0^{A/B}}$ 를 곱하여 h_1^*을 구하고, $\widehat{\gamma}_2$에 $\frac{S_0^{A/C}}{F_0^{B/C} S_0^{A/B}}$ 를 곱하여 h_2^*를 구하면 된다. 즉,

5) 데이터 관측의 시간 간격(observation interval)은 헤지 기간(헤지 개시부터 마감까지의 기간)과 일치하여야 한다.

$$h_1^* = \frac{S_0^{A/C}}{F_0^{A/B}} \widehat{\gamma}_1$$

$$h_2^* = \frac{S_0^{A/C}}{F_0^{B/C} S_0^{A/B}} \widehat{\gamma}_2 \qquad (1.18)$$

2. 직접 헤지

“직접 헤지”는 A화로 가격이 표시된 C화 통화 선물이 상장되어 있다는 점을 제외하곤, 헤지를 하는 상황에 대한 모형은 앞의 제 1 절의 삼각 헤지와 동일하다. 직접 헤지의 최적 헤지 비율 및 헤지 효과성은 이미 널리 알려진 결과이지만, 제 Ⅲ 장의 전개에 필요한 주요 사항만을 요약한다.

C화(예: 유로)에 대한 노출을 선물로 매도 헤지(short hedge)하고자 한다. 현재의 시점은 0이다. A국(예: 한국)의 기업(혹은 투자자)이 미래 시점 T의 C화 현물 롱 포지션(long position) 한 단위를 헤지하고자 한다. 가격 표시가 A화/C화(예: 원/유로)인 C화(예: 유로) 선물이 상장되어 있다. 직접 헤지 전략은 다음과 같다. 오늘(시점 0) 만기가 시점 M(T<M)인 C화 선물을 거래(매도)함으로써 헤지를 개시하고, 시점 T가 되면 시점 0에 거래한 C화 선물을 동시에 반대 매매(reverse trading, closing out the position)(매입)함으로써 헤지를 마감한다.

C화 노출 한 단위 당 C화 선물 h_3 단위를 위의 설명과 같이 거래함으로써 헤지할 경우에, 헤지한 결과(hedged position)의 시점 T의 현금 흐름은 다음과 같다. h_3 의 값은 해당 선물을 매도(매입)헤지하면 양(음)의 값으로 표현한다.

$$S_T^{A/C} + h_3(F_0^{A/C} - F_T^{A/C}) \qquad (2.1)$$

위의 표현에서

$S_t^{A/C}$= 시점 t의 A화로 표시한 C화의 현물 환율

$F_t^{A/C}$= 시점 t의 A화로 표시된 C화 통화 선물의 가격

$t = 0, T$

표현 (2.1)에서 시점 T의 변수들은 리스크를 반영하는 확률 변수(random variable)이고, 시점 0의 변수들은 상수이다. 직접 헤지는 (2.1)로 표현된 헤지 결과(hedged position)의 현금 흐름의 분산(variance)을 최소화하는 최적 헤지 비율(optimal hedge ratio) h_3^*, 을 구하는 최적화 문제(optimization problem)이다. 즉, 다음과 같다.

$$\underset{h_3}{Minimize}\ var[\,S_T^{A/C} + h_3(F_0^{A/C} - F_T^{A/C})\,] \tag{2.2}$$

최적화 문제 (2.2)의 중괄호 속에 표현된 헤지 결과(hedged position)의 현금 흐름에서 상수인 $S_0^{A/C}$를 뺀 후에 $S_0^{A/C}$로 나누고, 두 째 항의 분모와 분자에 $F_0^{A/C}$를 곱하면 다음의 표현을 얻는다.

$$\underset{h_3}{Minimize}\ var\left[\frac{(S_T^{A/C} - S_0^{A/C})}{S_0^{A/C}} - \frac{F_0^{A/C}}{S_0^{A/C}}\,h_3\,\frac{(F_T^{A/C} - F_0^{A/C})}{F_0^{A/C}}\right] \tag{2.3}$$

표현 (2.3)의 중괄호는 C화 현물 포지션과 이를 헤지하기 위한 C화 선물 포지션으로 구성된 '헤지된 포트폴리오'의 수익률이다. 직접 헤지는 '헤지된 포트폴리오' 수익율의 분산을 최소화하는 헤지 비율을 구하는 최적화 문제이다. 헤지 결과의 현금 흐름의 분산을 최소화하는 최적화 문제 (2.2)와 '헤지된 포트폴리오'의 수익률의 분산을 최소화하는 최적화 문제 (3.3)의 해 h_3^*는 동일하다.

앞에 기술한 제 1 절의 정의 (1.4)와 (1.5)를 따르면, 표현(2.3)의 최적화 문제를 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\underset{h_3}{Minimize}\ var\left[s^{A/C} - \frac{F_0^{A/C}}{S_0^{A/C}}\,h_3 f^{A/C}\right] \tag{2.4}$$

표현을 간결하게 하기 위하여, 다음과 같이 정의하자.

$$f^{A/C} \equiv f_3 \tag{2.5}$$

위의 정의와 함께 제 1 절의 정의 (1.7)을 적용하면, 표현 (2.4)을 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$Minimize\ var\left[s - \frac{F_0^{A/C}}{S_0^{A/C}} h_3 f_3\right] \qquad (2.6)$$

$$h_3$$

헤지 결과(‘헤지된 포트폴리오’)의 분산을 최소화하는, 직접 헤지의 해인 최적 헤지 비율 h_3^*는 다음과 같다.6)

$$h_3^* = \frac{S_0^{A/C}}{F_0^{A/C}} \rho_{s3} \frac{\sigma_s}{\sigma_3} \qquad (2.7)$$

위의 표현에서 ρ_{s3} 및 σ_3의 정의는 제 1 절의 정의 (1.12)를 따른 것이다. 직접 헤지의 헤지 효과성 H_D는 다음과 같다.7)

$$H_D = \rho_{s3}^2 \qquad (2.8)$$

Ⅲ. 헤지 효과성 비교 및 최적 헤지 비율의 단순화

본 장은 제 Ⅱ 장에서 구한 삼각 헤지와 직접 헤지의 헤지 효과성을 비교한다. 이를 위하여 아래의 세 가지를 가정한다. 이러한 가정 하에서 삼각 헤지와 직접 헤지의 헤지 효과성이 모두 1로서 서로 동일함을 밝힌다. 또한 헤지 비율을 구하기 위하여 회귀 분석을 할 필요가 없으며, 쉽게 얻을 수 있는 헤지 개시 시점의 현물 환율과 선물 가격만으로 삼각 헤지의 최적 헤지 비율을 구할 수 있음을 밝힌다.

[가정 1] 현물환 및 선물 거래의 거래 비용이 없다.
[가정 2] 현물 환율은 기하학적 브라운 운동(geometric Brownian motion)을 따른다.
[가정 3] 선물 만기까지의 기간(0,M)동안 각국의 무위험 이자율은 불변이다.

이자율은 환율에 영향을 주는 경제 변수들 중의 하나이다. 이자율이 불변이라는 [가정 3] 하에서 미래 균형 현물 환율의 불확실성을 반영한 것이 [가정 2]이다. [가정 1]에 의하여, 차익 거래의 기회가 없기 위한 조건(no-arbitrage condition)이 현물환 및 선물 시장에서 성립한다. 이를 구체화 한 것이 아래의 관계 (3.1)~(3.3)이다.

현물 환율 간에는, 차익 거래 기회가 없기 위한 조건(no-arbitrage condition)인 삼각 차익 거래(triangular arbitrage)에 의하여 다음의 관계가 성립한다. 기간(0,M)의 모든 시점 t에서,

---

6) 널리 알려진 결과이므로 증명은 생략한다.
7) 널리 알려진 결과이므로 증명은 생략한다.

$$S_t^{A/B} S_t^{B/C} = S_t^{A/C} \tag{3.1}$$

통화 선물 가격 간에도, 차익 거래 기회가 없기 위한 조건(no-arbitrage condition)인 삼각 차익 거래(triangular arbitrage)에 의하여 다음의 관계가 성립한다.

$$F_t^{A/B} F_t^{B/C} = F_t^{A/C} \tag{3.2}$$

현물 환율과 통화 선물 가격 간에 차익 거래의 기회가 없기 위한 조건(no-arbitrage condition)이 통화 선물의 이론 가격을 제시하는 보유 비용(cost-of-carry) 모형이며, 이는 다음과 같다.

$$F_t^{i/j} = S_t^{i/j} e^{(r_i - r_j)(M-t)} \tag{3.3}$$

위의 식에서

$r_i \equiv$연속 복리로 표현한 i국의 무위험 이자율

$i, j = A, B, C$이다.

표현을 간결하게 하기 위하여 다음을 정의 한다.

$$S^{A/B} \equiv S_1, \qquad S^{B/C} \equiv S_2, \qquad S^{A/C} \equiv S_3 \tag{3.4}$$

$$F^{A/B} \equiv F_1, \qquad F^{B/C} \equiv F_2, \qquad F^{A/C} \equiv F_3 \tag{3.5}$$

(가정 2)는 다음과 같이 구체화한다.(앞 장의 ρ 및 σ와의 혼동을 피하기 위하여, 본 장의 모수들에는 *를 붙여서 구분한다.)

$$\begin{aligned} dS_1 &= \mu_1^* S_1 dt + \sigma_1^* S_1 dz_1 \\ dS_2 &= \mu_2^* S_2 dt + \sigma_2^* S_2 dz_2 \end{aligned} \tag{3.6}$$

짧은 기간 δt동안의 변화량 δS_i $i=1,2$는 다음과 같다.

$$\delta S_1 = \mu^*_1 S_1 \delta t + \sigma^*_1 S_1 \varepsilon_1 \sqrt{\delta t}$$

$$\delta S_2 = \mu^*_2 S_2 \delta t + \sigma^*_2 S_2 \varepsilon_2 \sqrt{\delta t} \tag{3.7}$$

위의 표현에서 ε_i는 표준 정규 분포 $\Phi_i(0,1)$로부터의 무작위 표본이다. dz_1와 dz_2간의 상관 계수 ρ^*_{12}는 ε_1과 ε_2간의 상관 계수로 정의된다. 즉,

$\rho^*_{12} \equiv dz_1$와 dz_2간의 상관 계수 (3.8)

μ^*_i와 σ^*_i는 상수이다. μ^*_i는 환율 변화율의 기대치이며, σ^*_i는 변동성(volatility)이다.

본 장의 전개는 다음과 같다. [가정 2]는 S_1과 S_2에 대한 확률적 과정(stochastic processes)만을 외생적으로 구체화한 것이다(exogeneously specified). 이로부터, 차익 거래의 기회가 없기 위한 조건(no-arbitrage conditions)들인 관계 (3.1) ~ (3.3)을 이용하여, $S_3, F_1, F_2,$ 및 F_3의 확률적 과정을 구한다. 다음 단계로 제 Ⅱ 장에서 구한 헤지 효과성을 비교하기에 필요한 상관 계수들을 구한다. 이를 이용하여 헤지 효과성을 비교하고, 최적 헤지 비율을 단순화 한다.

선물 가격과 현물 환율간의 관계인 (3.3)과 현물 환율의 확률적 과정(stochastic process)에 대한 가정 (3.6)으로부터, 이토의 보조 정리(Ito's lemma)를 이용하여 선물 가격에 대한 확률적 과정을 구하면 다음과 같다.(부록 2)

$$dF_1 = [\mu^*_1 - (r_A - r_B)] F_1 dt + \sigma^*_1 F_1 dz_1$$

$$dF_2 = [\mu^*_2 - (r_B - r_C)] F_2 dt + \sigma^*_2 F_2 dz_2 \tag{3.9}$$

표현 (3.9)은 현물 환율과 같이, 선물 가격도 기하학적 브라운 운동(geometric Brownian motion)을 따른다는 사실을 나타낸다.

현물 환율 간의 관계 (3.1)을 다음과 같이 다시 쓴다.

$$S_3 = S_1 S_2 \tag{3.10}$$

현물 환율간의 관계인 (3.10)과 현물 환율의 확률적 과정에 대한 가정인 (3.6)으로부터, 이토의 보조 정리(Ito's lemma)를 이용하여 현물 환율 S_3에 대한 확률적 과정을 구하면 다음과 같다.(부록 3)

$$dS_3=(\mu^*_1+\mu^*_2+\rho^*_{12}\sigma^*_1\sigma^*_2)S_3dt+\sigma^*_1S_3dz_1+\sigma^*_2S_3dz_2 \tag{3.11}$$

선물 가격 간의 관계 (3.2)를 다음과 같이 다시 쓴다.

$$F_3=F_1F_2 \tag{3.12}$$

선물 가격 간의 관계인 (3.12)와 위의 (3.9)에 구한 선물 가격에 대한 확률적 과정으로부터, 이토의 보조 정리(Ito's lemma)를 이용하여 선물 가격 F_3에 대한 확률적 과정을 구하면 다음과 같다.(부록 4)

$$dF_3=[\mu^*_1+\mu^*_2-(r_A-r_C)+\rho^*_{12}\sigma^*_1\sigma^*_2]F_3dt+\sigma^*_1F_3dz_1+\sigma^*_2F_3dz_2 \tag{3.13}$$

가정 (3.6)과 지금까지 구한 환율 및 선물 가격의 확률적 과정 (3.9), (3.11), 및 (3.13)을 다음과 같이 다시 쓴다.

$$\frac{dS_1}{S_1}=\mu^*_1dt+\sigma^*_1dz_1 \tag{3.14}$$

$$\frac{dS_2}{S_2}=\mu^*_2dt+\sigma^*_2dz_2 \tag{3.15}$$

$$\frac{dF_1}{F_1}=[\mu^*_1-(r_A-r_B)]dt+\sigma^*_1dz_1 \tag{3.16}$$

$$\frac{dF_2}{F_2}=[\mu^*_2-(r_B-r_C)]dt+\sigma^*_2dz_2 \tag{3.17}$$

$$\frac{dS_3}{S_3}=(\mu^*_1+\mu^*_2+\rho^*_{12}\sigma^*_1\sigma^*_2)dt+\sigma^*_1dz_1+\sigma^*_2dz_2 \tag{3.18}$$

$$\frac{dF_3}{F_3}=[\mu^*_1+\mu^*_2-(r_A-r_C)+\rho^*_{12}\sigma^*_1\sigma^*_2]dt+\sigma^*_1dz_1+\sigma^*_2dz_2 \tag{3.19}$$

삼각 헤지의 헤지 효과성인 위의 표현 (1.15)를 옮겨 적는다.

$$H_T = \frac{\rho_{s1}^2 + \rho_{s2}^2 - 2\rho_{s1}\rho_{s2}\rho_{12}}{1-\rho_{12}^2} \tag{3.20}$$

(3.20)에 포함된 모수들은 다음과 파악한다. (3.16)과 (3.18)에 구한 S_3와 F_1의 확률적 과정을 이용하여, 다음의 단계를 거쳐 ρ_{s1}를 구한다.

$$cov\left(\frac{dS_3}{S_3}, \frac{dF_1}{F_1}\right) = cov(\sigma_1^* dz_1 + \sigma_2^* dz_2, \sigma_1^* dz_1)$$
$$= \left(\sigma_1^{*^2} + \rho_{12}^* \sigma_1^* \sigma_2^*\right)\delta t \tag{3.21}$$

$$var\left(\frac{dS_3}{S_3}\right) = var(\sigma_1^* dz_1 + \sigma_2^* dz_2)$$
$$= (\sigma_1^{*2} + \sigma_2^{*2} + 2\rho_{12}^* \sigma_1^* \sigma_2^*)\delta t \tag{3.22}$$

$$\rho_{s1} = \frac{cov\left(\frac{S_{3,T}-S_{3,0}}{S_{3,0}}, \frac{F_{1,T}-F_{1,0}}{F_{1,0}}\right)}{std\left(\frac{S_{3,T}-S_{3,0}}{S_{3,0}}\right) std\left(\frac{F_{1,T}-F_{1,0}}{F_{1,0}}\right)}$$
$$= \frac{(\sigma_1^{*2} + \rho_{12}^* \sigma_1^* \sigma_2^*)T}{\sqrt{(\sigma_1^{*2} + \sigma_2^{*2} + 2\rho_{12}^* \sigma_1^* \sigma_2^*)T}\,\sigma_1^* \sqrt{T}}$$

$$= \frac{(\sigma_1^{*2} + \rho_{12}^* \sigma_1^* \sigma_2^*)}{\sqrt{(\sigma_1^{*2} + \sigma_2^{*2} + 2\rho_{12}^* \sigma_1^* \sigma_2^*)}\,\sigma_1^*} \tag{3.23}$$

같은 단계를 거쳐 ρ_{s2}을 구하면 다음과 같다.[8)]

$$\rho_{s2} = \frac{(\sigma_2^{*2} + \rho_{12}^* \sigma_1^* \sigma_2^*)}{\sqrt{(\sigma_1^{*2} + \sigma_2^{*2} + 2\rho_{12}^* \sigma_1^* \sigma_2^*)}\,\sigma_2^*} \tag{3.24}$$

(3.14)와 (3.15)에 의하여

---

8) 이토의 보조 정리에 의하여, 식 (1.9)의 s와 f_2 간의 상관 계수는 s와 $f^{B/C}$ 간의 상관 계수와 같다.

$$\rho_{12}=\rho_{12}* \tag{3.25}$$

이다.

(3.23)~(3.25)에 구한 ρ_{s1}, ρ_{s2} 및 ρ_{12}를 (3.20)의 모수들에 대입하면, 삼각 헤지의 헤지 효과성

$$H_T=1 \tag{3.26}$$

이다.

(3.18)과 (3.19)에 보인 바와 같이 $\frac{dS_3}{S_3}$와 $\frac{dF_3}{F_3}$의 위너 과정(Wiener processes) 부분($\sigma_1^* dz_1+\sigma_2^* dz_2$)은 서로 동일하므로

$$\rho_{s3}=1 \tag{3.27}$$

이다. 따라서 직접 헤지의 헤지 효과성

$$H_D=1 \tag{3.28}$$

이다.

(3.23)~(3.25)에 구한 ρ_{s1}, ρ_{s2} 및 ρ_{12}를 삼각 헤지의 최적 헤지 비율 (1.11)의 모수들에 대입하면, 최적 헤지 비율은 다음과 같다.

$$h_1^*=\frac{S_0^{A/C}}{F_0^{A/B}}$$

$$h_2^*=\frac{S_0^{A/C}}{F_0^{B/C}S_0^{A/B}} \tag{3.29}$$

(3.18)과 (3.19)에 보인 바와 같이 $\frac{dS_3}{S_3}$와 $\frac{dF_3}{F_3}$의 위너 과정(Wiener processes) 부분은 서로 동일하므로

$$\sigma_s=\sigma_3 \tag{3.30}$$

이다. 관계 (3.27)과 (3.30)을 직접 헤지의 최적 헤지 비율 (2.7)에 적용하면, 최적 헤지 비율은 다음과 같다.

$$h_3^* = \frac{S_0^{A/C}}{F_0^{A/C}} \tag{3.31}$$

최적 헤지 비율을 직관적으로 설명하기 위하여, 이자율이 동일하고 선물의 만기 M이 헤지 마감 시점 T와 동일한 특별한 경우를 예를 들자. $r_A = r_B = r_C$로 이자율이 동일하면, 현물 환율과 선물 가격은 동일하다[보유 비용 모형 (3.3)]. 환율 및 선물 가격이 다음과 같은 예를 들자.[삼각 차익 거래 조건 (3.1)과 (3.2)이 성립하는 예이다.]

$$S_0^{A/B} = F_0^{A/B} = 1000\text{원/달러},\ S_0^{B/C} = F_0^{B/C} = 1.3\text{달러/유로},\ S_0^{A/C} = F_0^{A/C} = 1300\text{원/유로} \tag{3.32}$$

이 경우에 삼각 헤지의 최적 헤지 비율 (3.29)는 다음과 같다. $h_1^* = 1.3$이며, $h_2^* = 1$이다. 즉 C(유로)화 현물 1 단위의 롱 포지션을 헤지하기 위하여, 오늘 B(달러)화 표시 C(유로)화 선물 1 단위와 A(원)화 표시 B(달러)화 선물 1.3 단위를 매도하고, 시점 T가 되면 반대 매매를 하면 된다.[9] 설명은 다음과 같다. 만약 C(유로)화 현물 1 단위의 롱 포지션을 헤지하기 위하여, 오늘 B(달러)화 표시 C(유로)화 선물 1 단위만을 1.3달러/유로에 매도한다면, 이로써 B(달러)화 1.3 단위에 대한 노출(롱 포지션)이 T에 생기게 된다. 이를 헤지하기 위해서는 A(원)화 표시 B(달러)화 선물 1.3 단위를 오늘 동시에 매도해 놓아야 한다.

위 예의 경우에 직접 헤지의 최적 헤지 비율 (3.31)은 1 이다.

지금까지 본 장에서 구한 주요 결과를 설명하면 다음과 같다.

본 장은 선물의 만기까지의 기간(0, M)동안 이자율이 변화하지 않는다고 가정하였다. 불변 이자율을 가정하였기 때문에, 현물 환율 S_i 및 선물 가격 F_i의 확률적 과정의 위너 과정(Wiener process) 부분($\sigma_i^* dz_i$ 항)이 동일하다[(3.14)~(3.19)]. 따라서 S_i와 F_i의 변화율 간의 상관 계수는 1이다.

A국 기업이 C화 현물 환율$(S_3 \equiv S^{A/C})$의 위험을 해당 선물$(F_3 \equiv F^{A/C})$로 헤지하는 직접 헤지의 경우에, 현물 환율과 선물 가격의 변화율 간의 상관 계수(ρ_{s3})가 1이므로, 헤지 효과성이 1인 완전 헤지(perfect hedge)가 이루어진다.

직접 헤지가 완전 헤지가 되는 바에 대한 부연 설명은 다음과 같다. 본 논문에서 헤지

9) 만기 M과 헤지 마감 시점 T가 일치하는 예이므로, 반대 매매를 하지 않고 만기 시에 현물 인도를 하더라고 헤지 결과는 변하지 않는다.

마감 시점에서의 베이시스 리스크(basis risk) 자체는 0이 아니다. 설혹 현물 환율과 선물 가격의 변화율 간의 상관 계수(ρ_{s3})가 1이더라도 만약 현물(노출 포지션) 대 선물을 1:1로 거래하는 단순 헤지(naive hedge strategy)를 한다면, 베이시스 리스크를 부담하게 되고 완전 헤지는 이루어지지 않는다.[10] 직접 헤지는 헤지 결과 현금 흐름의 분산을 최소화하는 최적 헤지 비율[식 (3.31)]을 선택하는데, 그러한 선택의 결과로 분산이 0이 되기 때문에 완전 헤지가 되는 것이며, 헤지 효과성은 1인 것이다.

삼각 헤지도 헤지 효과성이 1인 완전 헤지가 이루어진다. 설명은 다음과 같다. 현물 환율($S_3 \equiv S^{A/C}$)에 대한 위험은 현물 환율($S^{A/B}$)에 대한 위험과 현물 환율($S^{B/C}$)에 대한 위험으로 구성된 것이다.[즉 식 (3.18)이 보이는 바와 같이, ($S_3 \equiv S^{A/C}$)의 위너 과정(Wiener process) 부분은 $\sigma_1^* dz_1 + \sigma_2^* dz_2$이다.] 삼각 헤지는 $S^{A/B}$의 위험($\sigma_1^* dz_1$)을 $F^{A/B}$로 헤지하고, $S^{B/C}$의 위험($\sigma_2^* dz_2$)을 $F^{B/C}$로 헤지하는 두 개의 헤지로 구성되어 있다. 각각 헤지의 헤지 효과성이 1이므로[11], 삼각 헤지의 헤지 효과성은 1이다.

이를 회귀식 (1.16)으로 설명하면 다음과 같다.

$$s = \gamma_0 + \gamma_1 f_1 + \gamma_2 f_2 + e$$

의 기울기 계수의 추정치 $\widehat{\gamma_1}$와 $\widehat{\gamma_2}$는 모두 1이 된다. 결정 계수 R^2는 1이 된다. $\widehat{\gamma_1}$와 $\widehat{\gamma_2}$가 모두 1이므로, 식 (1.17)에 의해 최적 헤지 비율은 표현 (3.29)로 단순화되는 것이다. 부연 설명하면 다음과 같다. 위 문단에 설명한 바와 같이, 종속 변수 s는 불확실성 부분(위너 과정 부분)만을 보자면, $s_1 + s_2$와 동일한 것이다. $s_1(s_2)$과 $f_1(f_2)$간의 상관 계수는 1이므로, $\widehat{\gamma_1} = 1$ $\widehat{\gamma_2} = 1$이 되며, $R^2 = 1$이 되는 것이다.

Ⅳ. 결론

10) 현물 대 선물을 1:1로 거래하는 단순 헤지(naive hedge strategy)를 한다면, 헤지 결과의 현금 흐름(즉 실효 가격, effective price)은 $S_T + (F_0 - F_T) = F_0 + b_T$이다. $var[S_T + (F_0 - F_T)] = var(S_T) + var(F_T) - 2\rho std(S_T) std(F_T)$. 상관 계수가 1이더라도 $std(S_T)$와 $std(F_T)$가 동일하지 않으면, $var[S_T + (F_0 - F_T)]$는 0이 아니다. 즉 완전 헤지가 이루어 지지 않는다.

11) 식 (3.14)~(3.17)을 보자. $S^{A/B}$와 $F^{A/B}$의 위너 과정 부분은 $\sigma_1^* dz_1$로 서로 동일하다. 따라서 $S^{A/B}$와 $F^{A/B}$의 변화율 간의 상관 계수는 1이며, $S^{A/B}$의 위험을 $F^{A/B}$(B화 선물)로 헤지하면 헤지 효과는 1이다. [마찬 가지로 $S^{B/C}$와 $F^{B/C}$의 위너 과정 부분은 $\sigma_2^* dz_2$로 서로 동일하다. 따라서 $S^{B/C}$와 $F^{B/C}$의 변화율 간의 상관 계수는 1이며, $S^{B/C}$의 위험을 $F^{B/C}$(C화 선물)로 헤지하면 헤지 효과는 1이다..]

거래소에 상장된 후 유동성이 큰 선물만이 금융 상품으로 살아남게 되므로, 제한된 종류의 선물만이 상장되어 있는 현실은 앞으로도 바뀌지 않을 것이다. 본 논문은 선물이 상장되어 있지 않아서 직접 헤지를 할 수 없는 경우에, 두 가지 선물로 헤지하는 삼각 헤지를 처음으로 개발하였다.

제 Ⅱ 장은 삼각 헤지의 최적 헤지 비율을 구하고, 최적 헤지 비율을 회귀 분석으로 추정할 수 있음을 밝혔다.

제 Ⅲ 장은 금리가 불변이고, 환율이 기하학적 브라운 운동(geometric Brownian motion)을 따른다는 가정을 한 후, 삼각 헤지의 헤지 효과성이 직접 헤지를 할 경우와 동일함을 밝혔다. 또한 회귀 분석이 필요 없이, 헤지 개시 시점의 현물 환율 및 선물 가격만으로 쉽게 계산할 수 있는 단순한 최적 헤지 비율을 구하였다.

제 Ⅲ 장에서 구한 단순한 헤지 비율은 제 Ⅲ 장의 가정이 성립할 경우에는 충분히 활용할 가치가 있다. 헤지 개시부터 마감까지의 헤지 기간이 짧아서, 금리가 불변이라는 가정과 현물 환율의 변동성 및 상관 계수[식(3.6) 및 (3.8)의 σ^*_1, σ^*_2 및 ρ^*_{12}]가 불변이라는 가정이 성립한다고 판단되면, 제 Ⅲ 장의 단순한 헤지 비율을 활용한다. 그렇지 않을 경우에는 제 Ⅱ 장의 회귀 분석을 활용해야 한다.

이자율이 불변이라는 가정을 완화하여, 선물의 만기까지의 기간(0, M)동안 이자율이 변화하되 불확실성이 없다고 가정하더라도, 직접 헤지와 삼각 헤지의 헤지 효과성이 모두 1이라는 본 논문의 결과는 달라지지 않을 것이다. 그 이유는 다음과 같다. 확실성하에서 이자율이 변화할 경우에, 선물 가격의 확률적 과정[(3,16), (3.17) 및 (3.19)]의 drift 항은 달라지지만, 위너 과정(Wiener process) 부분($\sigma^*_i dz_i$ 항들)은 영향을 받지 않는다. 따라서 상관계수들은 달라지지 않기 때문이다.

본 논문이 제 Ⅲ 장에 구한 최적 헤지 비율은, 널리 활용될 수 있을 만큼 충분히 쉽고 단순하다. 기존의 최적 헤지 비율은 실제로 수행하려면 회귀 분석을 해서 구해야 하는 번거로움이 있으며, 이 점은 최적 헤지가 널리 활용되기에 장애 요인이다. 본 논문의 최적 헤지 비율은 헤지 개시 시점의 현물 환율 및 선물 가격만으로 쉽게 계산되므로, 누구나 쉽게 구할 수 있는 장점이 있다.

삼각 헤지를 함으로써 직접 헤지 만큼의 헤지 효과성을 얻을 수 있다는 점과 단순화된 최적 헤지 비율 대안이 있다는 점은, 새로운 헤지 방법인 삼각 헤지가 앞으로 실용될 수 있는 가능성을 시사한다.

[부록 1-A]

최적화 문제 (1.10)을 옮겨 적는다.

$$\underset{(h_1,\ h_2)}{Minimize}\ var\left[s-\frac{F_0^{A/B}}{S_0^{A/C}}h_1 f_1-\frac{F_0^{B/C}S_0^{A/B}}{S_0^{A/C}}h_2 f_2\right] \qquad \text{(A1.1)}$$

표현을 간결하게 하기 위하여 다음을 정의하자.

$$b_1 \equiv \frac{F_0^{A/B}}{S_0^{A/C}}h_1$$

$$\text{(A1.2)}$$

$$b_2 \equiv \frac{F_0^{B/C}S_0^{A/B}}{S_0^{A/C}}h_2$$

정의 (A1.2)를 적용하여 (A1.1)을 다음과 같이 다시 쓴다.

$$\underset{(b_1,\ b_2)}{Minimize}\ var[s-b_1 f_1-b_2 f_2]$$

$$\underset{(b_1, b_2)}{Minimize}\ \sigma_s^2+b_1^2\sigma_1^2+b_2^2\sigma_2^2-2b_1\sigma_{s1}-2b_2\sigma_{s2}+2b_1 b_2\sigma_{12} \qquad \text{(A1.3)}$$

목적 함수의 b_1 및 b_2에 대한 편미분 값이 0이 되는 조건(first-order conditions)은 다음과 같다.

$$\delta()/\delta b_1 = 2b_1\sigma_1^2-2\sigma_{s1}+2b_2\sigma_{12}=0$$

(A1.4)

$$\delta()/\delta b_2 = 2b_2\sigma_2^2 - 2\sigma_{s2} + 2b_1\sigma_{12} = 0$$

(A1.4)의 두 방정식을 동시에 풀면, 해 (b_1^*, b_2^*)은 다음과 같다.

$$b_1^* = \frac{\sigma_{s1}\sigma_2^2 - \sigma_{12}\sigma_{s2}}{\sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_{12}^2}$$

(A1.5)

$$b_2^* = \frac{\sigma_{s2}\sigma_1^2 - \sigma_{12}\sigma_{s1}}{\sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_{12}^2}$$

$\sigma_{xy} = \rho_{xy}\sigma_x\sigma_y$인 관계($\rho_{xy}$는 상관 계수)를 이용하여 표현 (A1.5)를 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$b_1^* = \frac{(\rho_{s1} - \rho_{s2}\rho_{12})}{(1-\rho_{12}^2)}\frac{\sigma_s}{\sigma_1}$$

(A1.6)

$$b_2^* = \frac{(\rho_{s2} - \rho_{s1}\rho_{12})}{(1-\rho_{12}^2)}\frac{\sigma_s}{\sigma_2}$$

정의 (A1.2)에 의해

$$h_1^* \equiv \frac{S_0^{A/C}}{F_0^{A/B}} b_1^*$$

(A1.7)

$$h_2^* = \frac{S_0^{A/C}}{F_0^{B/C}S_0^{A/B}} b_2^*$$

이다. (A1.6)에 구한 (b_1^*, b_2^*)을 관계 (A1.7)에 대입하면, 본문의 식 (1.11)에 표현된 최적 헤지 비율을 얻는다. Q. E. D.

[부록 1-B]

현물 환율 $S_t^{(A/C)}$, $S_t^{(A/B)}$ 및 선물 가격 $F_t^{(A/B)}$, $F_t^{(B/C)}$의 과거 시계열 데이터를 사용하여, 변화율 간의 회귀식인

$$s=\gamma_0+\gamma_1 f_1+\gamma_2 f_2+e \tag{A1.8}$$

의 기울기 계수(slope coefficient) γ_1과 γ_2을 최소 자승법(OLS, ordinary least square)으로 추정하면, 그 추정치가 위의 본문의 식 (1.17)을 복사한 다음과 같음을 보이고자 한다.[식 (1.17)과 (A1.9)는 동일함.]

$$\begin{aligned}\widehat{\gamma_1}&=\frac{(\rho_{s1}-\rho_{s2}\rho_{12})}{(1-\rho_{12}^2)}\frac{\sigma_s}{\sigma_1}\\ \widehat{\gamma_2}&=\frac{(\rho_{s2}-\rho_{s1}\rho_{12})}{(1-\rho_{12}^2)}\frac{\sigma_s}{\sigma_2}\end{aligned} \tag{A1.9}$$

이를 위하여, 이미 잘 알려진 최소 자승 회귀 분석의 몇 가지 결과를 요약한다.[12)]

$$Y_t=\beta_1+\beta_2 X_{2t}+\beta_3 X_{3t}+\cdots+\beta_k X_{kt}+u_t \quad t=1,\ldots,n \tag{A1.10}$$

위 식은 $k-1$개의 설명 변수를 갖는 회귀 분석 모형이다. 이를 행렬로 표현하면 다음과 같다.

$$y=X\beta+u \tag{A1.11}$$

위 식에서

$$y=\begin{bmatrix} Y_1\\ Y_2\\ \vdots\\ Y_n\end{bmatrix}\quad X=\begin{bmatrix}1 & X_{21} & \cdots & X_{k1}\\ 1 & X_{22} & \cdots & X_{k2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & X_{2n} & \cdots & X_{kn}\end{bmatrix}\quad \beta=\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_k\end{bmatrix}\quad u=\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\\ \vdots\\ u_n\end{bmatrix}$$

β의 추정치를 b로 표현하면, 식 (A1.11)으로부터 잔차의 벡터 e는

$$e=y-Xb \tag{A1.12}$$

로 표현된다. 잔차제곱의 합을 최소화하는 조건(first order condition)인 $\delta(e'e)/\delta b=0$으로부터 정규 방정식(normal equation)

$$(X'X)b=X'y \tag{A1.13}$$

12) Johnston and DiNardo(1997) 제 3 장

를 구한다. 식(A1.12)의 y를 $Xb+e$로 대체하면

$$X'e=0 \tag{A1.14}$$

을 얻는다. 이로부터

$$\bar{e}=\bar{Y}-b_1-b_2\bar{X_2}-\cdots-b_k\bar{X_k}=0 \tag{A1.15}$$

을 얻으며 이를 다시 쓰면 다음의 관계를 얻는다.

$$\bar{Y}=b_1+b_2\bar{X_2}+b_3\bar{X_3}+\cdots+b_k\bar{X_k} \tag{A1.16}$$

최소 자승식

$$Y_t=b_1+b_2X_{2t}+b_3X_{3t}+\cdots+b_kX_{kt}+e_t \quad t=1,\ldots,n$$

에서 식 (A1.16)를 빼면, 표본 평균으로부터의 편차(deviation)인 소문자 변수로 표현된

$$y_t=b_2x_{2t}+b_3x_{3t}+\cdots b_kx_{kt}+e_t \quad t=1,\ldots.,n \tag{A1.17}$$

을 얻는다. 본 논문의 경우 설명 변수가 2 개이므로 식(A1.17)은

$$y=b_2x_2+b_3x_3+e \tag{A1.18}$$

로 표현되며, 정규 방정식(normal equation)

$$\begin{bmatrix} \Sigma x_2^2 & \Sigma x_2x_3 \\ \Sigma x_2x_3 & \Sigma x_3^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \Sigma yx_2 \\ \Sigma yx_3 \end{bmatrix}$$

으로부터 b_2와 b_3의 해를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} b_2&=\frac{\Sigma yx_2\Sigma x_3^2-\Sigma x_2x_3\Sigma yx_3}{\Sigma x_2^2\Sigma x_3^2-(\Sigma x_2x_3)^2}=\frac{\sigma_{y2}\sigma_3^2-\sigma_{23}\sigma_{y3}}{\sigma_2^2\sigma_3^2-\sigma_{23}^2} \\ b_3&=\frac{\Sigma yx_3\Sigma x_2^2-\Sigma x_2x_3\Sigma yx_2}{\Sigma x_2^2\Sigma x_3^2-(\Sigma x_2x_3)^2}=\frac{\sigma_{y3}\sigma_2^2-\sigma_{23}\sigma_{y2}}{\sigma_2^2\sigma_3^2-\sigma_{23}^2} \end{aligned} \tag{A1.19}$$

식 (A1.8)과 (A1.10)을 비교하면 f_1은 x_2에, f_2는 x_3에 상응함을 알 수 있으며, 표현 (A1.9)와 (A1.19)는 동일한 것이다. Q. E. D.

[부록 2]

이토의 보조 정리(Ito's lemma)는 다음과 같다. x가 의 이토 과정(Ito process)

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz \tag{A2.1}$$

을 따르면, x와 t의 함수인 $G(x,t)$는 다음의 이토 과정을 따른다.

$$dG = \left(\frac{\delta G}{\delta x}a + \frac{\delta G}{\delta t} + \frac{1}{2}\frac{\delta^2 G}{\delta x^2}b^2\right)dt + \frac{\delta G}{\delta x}bdz \tag{A2.2}$$

S_1의 확률적 과정 (3.6)을 옮겨 적는다.

$$dS_1 = \mu_1^* S_1 dt + \sigma_1^* S_1 dz_1 \tag{A2.3}$$

현물 환율과 통화 선물 가격 간에 차익 거래의 기회가 없기 위한 조건(no-arbitrage condition)인, 통화 선물의 이론 가격을 제시하는 보유 비용(cost-of-carry) 모형 (3.3)을 옮겨 적는다.

$$F_1 = S_1 e^{(r_A - r_B)(M-t)} \tag{A2.4}$$

(A2.4)로부터 다음을 구한다.

$$\frac{\delta F_1}{\delta S_1} = e^{(r_A - r_B)(M-t)}$$

$$\frac{\delta^2 F_1}{\delta S_1^2} = 0 \tag{A2.5}$$

$$\frac{\delta F_1}{\delta t} = -(r_A - r_B)S_1 e^{(r_A - r_B)(M-t)}$$

(A2.5)에 구한 관계들을 (A2.2)에 대입하면 다음과 같다.

$$dF_1 = \left[e^{(r_A - r_B)(M-t)} \mu_1^* S_1 - (r_A - r_B) S_1 e^{(r_A - r_B)(M-t)} \right] dt + e^{(r_A - r_B)(M-t)} \sigma_1^* S_1 dz \quad \text{(A2.6)}$$

관계 (A2.4)를 (A2.6)에 대입하여 정리하면 다음을 얻는다.

$$dF_1 = \left[\mu_1^* - (r_A - r_B) \right] F_1 dt + \sigma_1^* F_1 dz \quad \text{(A2.7)}$$

동일한 과정을 거쳐, F_2의 확률적 과정을 구한다. Q. E. D.

[부록 3]

일반화된 이토의 보조 정리(generalized version of Ito's lemma)는 다음과 같다. $x_i,\ i=1,..,n$가 의 이토 과정(Ito process)

$$dx_i = a_i(.,x_i,.,t)dt + b_i(.,x_i,.,t)dz_i \quad \text{(A3.1)}$$

$\rho_{ij} \equiv dz_i$와 dz_j 간의 상관 계수

을 따르면, $(x_1,.,x_i,.,x_n,t)$의 함수인 $f(\cdot)$는 다음의 이토 과정을 따른다.

$$df = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\delta f}{\delta x_i} a_i + \frac{\delta f}{\delta t} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\delta^2 f}{\delta x_i \delta x_j} b_i b_j \rho_{ij} \right) dt + \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta f}{\delta x_i} b_i dz_i \quad \text{(A3.2)}$$

현물 환율의 과정 (3.6)을 옮겨 적는다.

$$dS_1 = \mu_1^* S_1 dt + \sigma_1^* S_1 dz_1$$

$$dS_2 = \mu_2^* S_2 dt + \sigma_2^* S_2 dz_2 \quad \text{(A3.3)}$$

삼각 차익 거래(triangular arbitrage)에 의하여, 현물 환율 간에 성립하는 조건(no-arbitrage condition)인 (3.10)을 옮겨 적는다.

$$S_3 = S_1 S_2 \quad \text{(A3.4)}$$

(A3.4)로부터 다음을 구한다.

$$\frac{\delta S_3}{\delta S_1}=S_2$$

$$\frac{\delta S_3}{\delta S_2}=S_1$$

$$\frac{\delta S_3}{\delta t}=0$$

(A3.5)

$$\frac{\delta^2 S_3}{\delta S_1^2}=0$$

$$\frac{\delta^2 S_3}{\delta S_1 \delta S_2}=1$$

$$\frac{\delta^2 S_3}{\delta S_2 \delta S_1}=1$$

$$\frac{\delta^2 S_3}{\delta S_2^2}=0$$

(A3.5)에 구한 관계들을 (A3.2)에 대입하면 다음을 얻는다.

$$dS_3=(\mu^*_1 S_1 S_2+\mu^*_2 S_1 S_2+\rho^*_{12}\sigma^*_1\sigma^*_2 S_1 S_2)dt+\sigma^*_1 S_1 S_2 dz_1+\sigma^*_2 S_1 S_2 dz_2$$
(A3.6)

관계 (A3.4)를 (A3.6)에 대입하여 정리하면 (3.11)을 얻는다. Q. E. D.

[부록 4]

일반화된 이토의 보조 정리(generalized version of Ito's lemma)는 다음과 같다. $x_i,\ i=1,..,n$가 의 이토 과정(Ito process)

$$dx_i=a_i(.,x_i,.,t)dt+b_i(.,x_i,.,t)dz_i \qquad \text{(A4.1)}$$

$\rho_{ij}\equiv dz_i$와 dz_j 간의 상관 계수

을 따르면, $(x_1,.,x_i,.,x_n,t)$의 함수인 $f(\cdot)$는 다음의 이토 과정을 따른다.

$$df = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\delta f}{\delta X_i} a_i + \frac{\delta f}{\delta t} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\delta^2 f}{\delta X_i \delta X_j} b_i b_j \rho_{ij} \right) dt + \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta f}{\delta X_i} b_i dz_i \tag{A4.2}$$

선물 가격의 과정 (3.9)를 옮겨 적는다.

$$\begin{aligned} dF_1 &= [\mu_1^* - (r_A - r_B)] F_1 dt + \sigma_1^* F_1 dz_1 \\ dF_2 &= [\mu_2^* - (r_B - r_C)] F_2 dt + \sigma_2^* F_2 dz_2 \end{aligned} \tag{A4.3}$$

삼각 차익 거래(triangular arbitrage)에 의하여, 선물 가격 간에 성립하는 조건(no-arbitrage condition)인 (3.12)을 옮겨 적는다.

$$F_3 = F_1 F_2 \tag{A4.4}$$

(A4.4)로부터 다음을 구한다.

$$\begin{aligned} \frac{\delta F_3}{\delta F_1} &= F_2 \\ \frac{\delta F_3}{\delta F_2} &= F_1 \\ \frac{\delta F_3}{\delta t} &= 0 \\ \frac{\delta^2 F_3}{\delta F_1^2} &= 0 \\ \frac{\delta^2 F_3}{\delta F_1 \delta F_2} &= 1 \\ \frac{\delta^2 F_3}{\delta F_2 \delta F_1} &= 1 \\ \frac{\delta^2 F_3}{\delta F_2^2} &= 0 \end{aligned} \tag{A4.5}$$

(A3.5)에 구한 관계들을 (A3.2)에 대입하면 다음을 얻는다.

$$dF_3 = \{[\mu_1^* - (r_A - r_B)]F_1F_2 + [\mu_2^* - (r_B - r_C)]F_1F_2 + \rho_{12}\sigma_1\sigma_2F_1F_2\}dt + \sigma_1^*F_1F_2dz_1 + \sigma_2^*F_1F_2dz_2 \tag{A4.6}$$

관계 (A4.4)를 (A4.6)에 대입하여 정리하면 (3.13)을 얻는다. Q. E. D.

참 고 문 헌

김훈용 외, "삼각 헤지의 헤지 효과성 연구", 산업연구, 동덕여자대학교, 제 11 집, 2005

Anderson, R. W., and Danthine, J.-P., "Cross-hedging", Journal of Political Economy 89, pp.1182-1196, 1981

Ederington, L., "The hedging performance of the new futures markets", Journal of Finance 34, pp.157-170, 1979

DeMarskey, A. L., "Single and Multiple Portfolio Cross-Hedging with Currency Futures", Multinational Finance Journal, Vol. 1, No. 1, pp.23-46, 1997

Johnson, L. L., "The theory of hedging and speculation in commodity futures", Review of Economic Studies 27, pp.139-151, 1960

Johnston, J. and DiNardo, J, *Econometric Methods*, McGraw-Hill, chapter 3, 1997