

# 경로적분법을 이용한 효율적인 옵션 가격결정에 관한 연구

김 동 석<sup>1</sup>  
현 정 순<sup>2</sup>  
황 원 준<sup>3</sup>

## < 초 록 >

옵션의 가격을 결정하는 방법으로는 무차익거래 조건하에서 무위험 포트폴리오를 구성하여 얻어진 편미분방정식(PDE)의 해를 구하는 방법과 파인만-각 식(Feynman-Kac formula)으로 알려진 미래 손익구조(payoff)에 대한 현재 기대값을 구하는 방법이 있다. 현재 기대값을 구하기 위해서는 기초자산이 따르는 무위험(risk-neutral) 확률과정의 전이확률값(transitional probability; Green's function)을 알아야 하는데, 양자물리학(quantum mechanics)에서 널리 쓰이는 경로적분법(path Integrals)은 일반적인 확률과정에 대한 전이확률값을 계산할 수 있게 해준다. 가우스 경로적분(Gaussian path integrals)의 경우는 폐쇄형 해(closed form solution)를 얻을 수 있으며, 좀 더 복잡한 경로적분의 경우에는 몬테카를로 시뮬레이션이나 이산화 기법(discretization scheme)을 이용한 효율적인 수치 해법을 제공해 준다. 본 연구에서는 경로적분법을 적용하여 옵션의 가격을 결정하는 방법과 그 특징들을 살펴본다. 특히, 경로적분법에 의한 수치해법이 옵션 손익구조의 비선형성과 이산화(discretization) 과정에 기인하여 발생하는 수치해법상의 가격계산 오차를 크게 줄일 수 있을 뿐만 아니라, 특이옵션(exotic options)과 다자산 옵션(multi-asset options)의 경우에도 적용 가능하여 옵션 가격을 계산하는데 있어서 기존의 방법들보다 일반적인 방법임을 보인다.

<sup>1,2</sup> KAIST 테크노 경영대학원 교수

<sup>3</sup> KASIT 테크노 경영대학원 경영공학과

## I. 서론

무차익거래(no-arbitrage) 조건하에서 무위험 포트폴리오(riskless portfolio)를 구성하여 얻어진 블랙-숄즈 PDE로부터 옵션의 가격을 결정하는 방법이 1973년 'Black-Sholes'에 의해 처음으로 제시되었다. 블랙-숄즈 방정식의 폐쇄형 해는 잘 알려져 있으나 실무에서 복잡한 파생상품의 가격을 계산하고자 할 때 일부 특수한 옵션을 제외하고는 폐쇄형 해를 구하기가 어렵기 때문에 대부분의 경우 수치적인 해법을 사용한다. 옵션의 가격을 계산하기 위한 수치적 방법은 크게 격자모형(lattice model), 유한차분법(finite difference method) 그리고 몬테카를로 시뮬레이션이 있으며 여러가지 다양한 옵션에 대해 보다 정확하고 효율적인 수치해법을 개발하려는 노력이 있어왔다.

지금까지도 많은 실무자들이 격자모형과 FDM을 사용하고 있지만, 이 방법들로부터 옵션의 가격을 계산할 시에 두 가지 종류의 오차가 발생하게 된다. 첫번째는 이산화하는 과정에서 생기는 오차로, 이는 격자(lattice)나 그리드(grid) 사이의 간격을 더 작게 나눔으로써 오차를 줄일 수 있으나 그만큼 더욱더 많은 계산 시간을 필요로 하게 된다. 다른 하나의 오차는 경계조건이나 초기조건의 비선형성 혹은 불연속성에 기인하여 발생하는 오차이다. 초기조건의 불연속성 문제는 FDM으로 옵션가격을 계산시 만기 손익구조의 비선형성으로 인해 손익분기옵션(at the money options)에서 오차가 생기는 현상으로 김동석(2000)등에 의해서 언급되었다. 이 문제점을 해결하기 위해 TTL(Three time level)이나 손익분기점 근처에서 그리드를 작게 나누는 수정된 Crank-Nicholson 방법 등이 제시되었으나 초기조건이 미분가능해야 하는 FDM의 특성상 근본적인 문제를 해결하지는 못하였다. (이 논문에서 경로적분법이 이러한 문제들에 훨씬 자유로움을 보일 것이다.) 또한, 여러 종류의 경계조건(boundary conditions)을 갖는 특이 옵션의 경우는 경계조건에 의한 오차가 생기게 되는데, 예를 들어 배리어 옵션(barrier options)의 경우 경계조건과 격자 사이의 위치에 따라 계산 오차가 다르게 나타난다(Boyle, 1994). 이러한 문제점 들을 수정하기 위해 격자의 위치를 배리어에 맞게 조절하거나 AMM(adaptive mesh model) 등을 이용한 방법 등이 제시되었다(Derman, 1995; Figlewski, 1999)

또, 최근에는 격자 모형이나 FDM과 다른 접근법으로 구적법(quadrature method)을 이용한 옵션가격 결정 방법이 Andricopoulos(2003)등에 의해 제시되었다. 이 방법은 Feynman-Kac식으로 표현된 블랙-숄즈 방정식의 해를 구적법을 이용하여 수치 적분하는 과정인데 그 원리는 다중격자(multinomial lattice) 모형과 비슷하다. 이 모형의 특징은 시간축의 그리드를 우리가 원하는 시기에 나눌 수 있으며 노드의 위치를 임의로 정할 수 있어서 이산-이동-배리어 옵션(discrete moving barrier options)과 같은 옵션을 다룰 때 장점을 보이고 또, 위에서 말한 오차들과 계산 시간도 크게 개선될 수 있다는 점이다. 하지만 아시안 옵션(asian options)과 같이 연속된 시간 동안의 가격에 의해 손익구조가 결정되는 옵션의 경우에는 계산시간이 급격히 늘어나게 될 것이며 다자산 옵션(multi-asset options)

에 대해서도 이론적인 논의가 이루어지지 않았다.

우리가 이 논문에서 제시할 경로적분법을 이용한 수치해법은 구적법에 의한 옵션 가격 결정 방법을 포함하는 좀 더 포괄적인 방법이라고 할 수 있다. 경로 적분법은 R. Feynman(1965)에 의해 처음 소개되어 현대 물리학에서 많이 사용되는 중요한 이론으로 양자(quantum)<sup>4</sup> 역학계가 가질 수 있는 두 상태 간의 모든 가능한 경로(path)들을 측도(measure)로 평균값을 구하는 방법이다. 수학에서는 Wiener 측도 혹은 Wiener 적분으로도 알려져 있다. 처음 경로적분법을 파생상품의 가격결정에 적용한 연구는 Dash(1988, 1989)에 의해 이루어 졌으며, Linetsky(1998)가 경로적분(path integral frame)하에서 경로의존형 옵션의 경우에 폐쇄형 해를 구할 수 있음을 보임으로써 좀 더 재무학계에 알려지게 되었다. 또한, Baaquie(1997, 2004)는 추계적 변동성(stochastic volatility)을 가지는 유럽형 옵션과 이자율모형에 적용하였다. 이 밖에도 Kleinert(2002)는 수익율이 Levy 분포를 따를 경우에 경로적분법으로 옵션의 가격을 근사하여 구하는 방법을 처음 소개하였다. 경로적분의 수치해법을 옵션 가격결정에 적용한 예는, 이산화 방법으로는 FFT(Fast Fourier Transform)를 함수적분(functional integral)에 응용한 Eydeland(1994)의 논문이 시초가 되었으며, 몬테카를로 경로적분을 이용한 연구로는 Makivic(1995), Rosa-clot(1999), Bornett(2006)이 있다.

경로적분법은 기초자산이 따르는 보다 현실에 가까운 확률과정(real stochastic process)에 대해서도 근사식을 이용하거나 수치 해법을 통해 전이확률값(transitional probability) 또는 Green' function을 구할 수 있으며, 경로-의존 옵션(path-dependent option)이나 다자산 옵션에 대해서도 적용이 가능하다.

이 연구에서는 경로적분의 수치해법에 초점을 맞추어 경로적분이 기존의 격자 모형이나 FDM이 가져오는 오차들을 크게 개선할 수 있을 뿐만 아니라, 구적법을 포함하는 보다 일반적으로 적용 가능한 수치해법임을 보일 것이다.

본 연구의 구성은 다음과 같다. 다음 장에서는 우선 경로적분법의 전반적인 이론을 설명하고, 가장 간단한 유럽형 옵션에 대해 경로적분법을 적용한 예제와 배리어 옵션, 아시안 옵션과 같은 경로의존형 옵션에 적용하여 해를 구하는 과정을 살펴볼 것이다. 제 3장에서는 본 연구에서 사용할 이산화 수치해법의 알고리즘을 설명하고 이자율 옵션이나 여러가지 특이 옵션(exotic options)들에 어떻게 적용시킬지 설명할 것이다. 제 4장에서는 앞의 수치해법을 이용하여 유럽형 옵션, 디지털 옵션 그리고 배리어 옵션의 경우에 대해서 기존의 방법들과 계산 오차를 비교해 보고 경로적분법이 안정적이고 빠르게 해를 얻을 수 있음을 보일 것이다. 마지막으로 제 5장에서는 본 연구의 요약 및 결론을 제시할 것이다.

---

<sup>4</sup> 양자(quantum)은 discrete하다는 의미인데, 여기서는 확률적(stochastic)이라고 이해하면 편하다.

## II. 경로적분법

### 1. 파인만 경로적분(Feynman path integral)<sup>5</sup>

파인만 경로적분식(Feynman path integral formula)은 1942년 Richard Feynman의 박사논문에서 처음 제시되어 지금까지 현대 물리학의 가장 중요한 도구 중 하나가 되었다. 뉴턴의 결정론적 세계관으로 대표되는 고전 물리학에서, 역학계는 라그랑지안(Lagrangian)을 시간에 대해서 적분한 ‘action’ 함수  $A[x(t)]$ 를 최소가 되도록 하는 경로를 따라 움직인다.<sup>6</sup> 이를 ‘Least Action Principle’이라고 하며 아래 식(1)과 같이 나타내어진다. 여기서,  $t$ ,  $x$ ,  $\dot{x}$ 는 각각 시간, 변위, 속도(변위를 시간에 대해 미분한 값)이며, 라그랑지안  $L$ 은 속도  $\dot{x}$ 와 포텐셜(potential)  $V$ 의 함수로 정의된다.

$$A[x(t)] = \int_{t_i}^{t_f} L(x, \dot{x}, t) dt \quad (1.1)$$

$$L(x, \dot{x}, t) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x, t) \quad (1.2)$$

고전 물리학과 달리 확률론적 세계관을 가진 양자 물리학(quantum mechanics)에서는 각 각의 상태들이 가질 수 있는 확률에 대해 관심을 가지며 초기 상태( $x_I$ )에서 나중 상태( $x_F$ )로의 전이 확률(transitional probability) 혹은 커널(kernel)을 통하여 확률적인 기대값들을 구하고자 한다. 전이확률은 슈뢰딩거 방정식(Schrödinger equation)의 Green’ function에 해당하며, 파인만은 ‘Least Action Principle’에 모티브를 얻어 커널을 계산할 수 있는 경로적분법을 제시하였다. 아래 식(2)와 같이 초기 상태와 나중 상태 간의 구간을 작게 쪼개어 모든 가능한 경로들에 대한  $\exp[-A(x)]$ 의 적분값을 커널로 정의한다.

$$K(x_F, t_F | x_I, t_I) = \int_{x_I}^{x_F} D[x(t)] \exp\{-A[x(t)]\} \quad (2.1)$$

$$\int_{x_I}^{x_F} D[x(t)] \exp\{-A[x(t)]\} \stackrel{def}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \dots dx_{N-1} \frac{\exp(-A_{01})}{c_0(\varepsilon)} \dots \frac{\exp(-A_{j,j+1})}{c_j(\varepsilon)} \dots \frac{\exp(-A_{N-1,N})}{c_{N-1}(\varepsilon)} \quad (2.2)$$

$$\varepsilon = \frac{t_F - t_I}{N}, \quad t_j = t_I + j\varepsilon, \quad A_{jj+1} = \int_{t_j}^{t_{j+1}} L dt \quad (2.3)$$

$c_j$ 는 정규화(normalization) 상수이며,  $D[x(t)]$ 는 경로적분 측도로 초기 상태와 나중 상

<sup>5</sup> 경로적분법은 수학이나 재무 이론을 공부한 대부분의 사람들이 몬테카를로 시뮬레이션이나 트리 모형, diffusion eq.을 풀면서 이미 사용하고 있는 개념으로 전혀 새로운 것이 아니므로 이들의 연결 관계를 잘살펴보기 바란다.

<sup>6</sup> 경제학에서는 효용함수를 최대화하기 위해 variational method가 사용되기도 한다.

태 간의 가능한 모든 경로들을 측도로 하는 함수적분(functional integration)이다. 리만 적분(Riemann integral)이 N개로 작게 쪼갠 구간의 면적을 더하고 극한값을 취한 것이라면, 경로적분법은 N개로 나눈 구간에 대한 N-1개의 리만 적분을 무한개로 극한을 취한 것이라고 볼 수 있다. ‘Action functional’,  $A[x(t)]$ 는 라그랑지안  $L$ 에 의해 정해지며 시스템이 갖는 확률과정의 특성을 반영한다. 아래 <그림1>은 경로적분법의 경로를 보여준다.

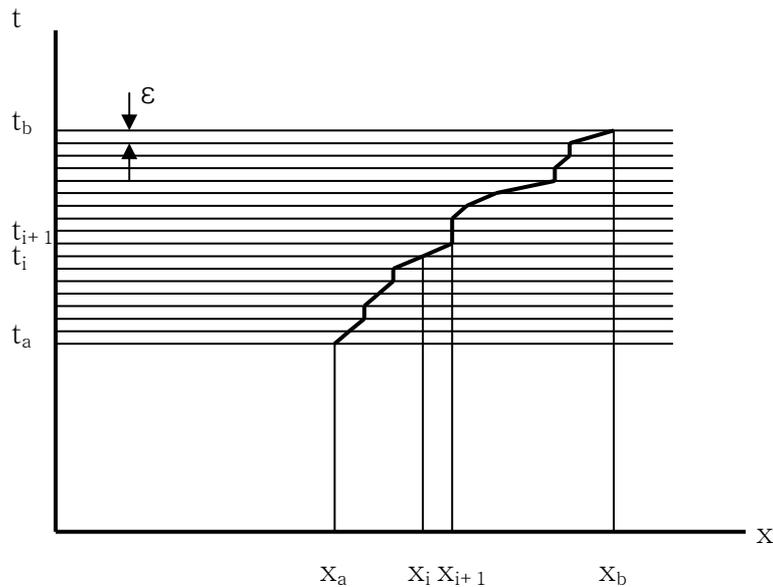
두 상태 a, b 사이의 전이확률값  $K(x_b, t_b | x_a, t_a)$ 은 ‘Champman-Komogorov semigroup property’를 만족하는데 재무이론에서는 이와 같은 성질이 German(1985)에서 논의 되었다

$$K(x_b, t_b | x_a, t_a) = \int_{x_a}^{x_b} D[x] \exp\{-A_{ac}[x(t)] - A_{cb}[x(t)]\} \quad (3.1)$$

$$K(x_b, t_b | x_a, t_a) = \int_{x_c} dx_c K(x_b, t_b | x_c, t_c) K(x_c, t_c | x_a, t_a) \quad (3.2)$$

$$K(x_b, t_b | x_a, t_a) = \int_{x_1} \int_{x_2} \cdots \int_{x_{N-1}} dx_1 dx_2 \cdots dx_{N-1} K(x_b, t_b | x_{N-1}, t_{N-1}) \cdots K(x_i, t_i | x_{i-1}, t_{i-1}) \cdots K(x_1, t_1 | x_a, t_a) \quad (3.3)$$

이제 옵션 가격결정에 경로적분법을 적용하는 방법을 살펴볼 텐데, 두 가지 중요한 질문, 첫째, 기초자산이 가지는 일반적인 확률과정방정식(SDE: stochastic differential equation)에 대하여 ‘kernel’,  $K(x_b, t_b | x_a, t_a)$ 를 어떻게 구할 것인가, 두번째로 어떻게 Feynman-Kac 식을 적분하여 옵션 가격을 계산할 것인가에 대한 답을 찾는 과정이 될 것이다.



<그림1> 경로적분법

## 2. 유럽형 옵션(European options)

우선 가장 간단한 블랙-숄즈 모형하에서 유럽형 옵션의 경우부터 살펴보도록 하겠다(블랙-숄즈 모형에 대한 설명은 Hull(2000)과 Duffie(1996)에서 찾을 수 있다). 유럽형 옵션의 만기 손익구조는 식(4)와 같이 만기 T 시점의 기초자산 가격에 의해서만 정해진다.

$$O_F(S_T, T) = F(S_T) \quad (4)$$

블랙-숄즈 모형 안에서 위험 자산은 기하 브라운운동(geometric brownian motion)을 따르며 무위험 이자율  $r$  과 변동성  $\sigma$  , 또 문제를 간단하게 하기 위하여 배당이 없다고 가정한다. 주가를  $x = \ln S$  으로 다시 쓰면,

$$dx = \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dz, \quad dz : \text{Wiener process} \quad (5)$$

와 같이 주어지고 블랙-숄즈 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 O_F}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial O_F}{\partial x} - r O_F = - \frac{\partial O_F}{\partial t} \quad (6.1)$$

$$\mu = r - \frac{\sigma^2}{2} \quad (6.2)$$

$$O_F(e^{x_T}, T) = F(e^{x_T}) \quad (6.3)$$

위 PDE(Cauchy problem)의 유일해는 Feynman-Kac식으로 주어진다(Duffie, 1996; Karatzas, 1992)

$$O_F(S, t) = e^{-r\tau} E_{(t,S)}[F(S_T)], \quad \tau = T - t \quad (7)$$

여기서  $E_{(t,S)}[\cdot]$  는 위험 중립 측도하에서 평균값을 구한 것이다. t시점에서의 초기 자산가격과 만기 T시점의 자산가격에 대해 각각  $x = \ln S$  ,  $x_T = \ln S_T$  라고 하면, 이 평균값은 다음 경로적분식으로 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} O_F(S, t) &= e^{-r\tau} E_{(t,S)}[F(S_T)] \\ &= e^{-r\tau} \int_{-\infty}^{\infty} F(e^{x_T}) K^\mu(x_T, T | x, t) dx_T \\ &= e^{-r\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{x(t)=x}^{x(T)=x_T} F(e^{x_T}) e^{-A_{BS}[x(t')]} Dx(t') \right) dx_T \end{aligned} \quad (8)$$

여기서,  $A_{BS}[x(t')]$  는 경로  $\{x(t'), t \leq t' \leq T\}$  에서 정의된 ‘Black-Scholes action functional’이다.<sup>7</sup> 이 ‘action functional’이 경로적분법에서 가중치(weight function)를 결정하

<sup>7</sup> 여기서 ‘Black-Scholes action functional’이란 용어는 Linetsky(1998)에서 처음 사용하였으며, 주가가 GBM을 따를 때의 ‘Lagrangian’과 ‘action’ 함수를 지칭하는 말이다.  $K^\mu$  는 drift,  $\mu$  가 있는

며 블랙-숄즈 모형의 ‘action functional’과 ‘Lagrangian’은 다음과 같이 주어진다.<sup>8</sup>

$$A_{BS}[x(t')] = \int_t^T L_{BS} dt', \quad L_{BS} = \frac{1}{2\sigma^2} (\dot{x}(t') - \mu)^2, \quad (9)$$

$$\dot{x}(t') = \frac{dx}{dt'}$$

경로적분을 하기 위해서는 우선, 경로들을 이산화(discretization)하여 나타낸다. 만기까지의 기간  $\tau = T - t$ 를  $N$ 개의  $\Delta t$  간격으로 나누면  $t_i = t + i\Delta t$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$  인  $N + 1$ 개의 시간 포인트들이 만들어진다. 자산가격도 이 시간 포인트들에 해당하는  $S_i = S(t_i)$  ( $x_i = x(t_i)$ )로 이산화할 수 있다.

$$\int_t^T \cdots dt' \rightarrow \sum_{i=0}^{N-1} \cdots \Delta t, \quad \dot{x} \rightarrow \frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta t} \quad (10)$$

위 식(10)을 이용하여  $A_{BS}[x(t')]$ 을 이산화된 형태로 다시 쓰면 아래와 같다.

$$A_{BS}(x_i) = \frac{\mu^2 \tau}{2\sigma^2} - \frac{\mu}{\sigma^2} (x_T - x) + \frac{1}{2\sigma^2 \Delta t} \sum_{i=0}^{N-1} (x_{i+1} - x_i)^2 \quad (11.1)$$

$$L = \frac{1}{2\sigma^2} \dot{x}^2 - \frac{\mu}{\sigma^2} \dot{x} + \frac{\mu^2}{2\sigma^2} \quad (11.2)$$

$$A_{BS}[x(t')] = \frac{\mu^2 \tau}{2\sigma^2} - \frac{\mu}{\sigma^2} (x_T - x) + A_0[x(t')] \quad (11.3)$$

$$A_0[x(t')] = \int_t^T L_0 dt', \quad L_0 = \frac{1}{2\sigma^2} \dot{x}^2 \quad (11.4)$$

여기서,  $L_0$ 는  $\mu = 0$ 인 마팅게일 과정(martingale process)의 라그랑지안이며,  $A_0$ 도 이에 해당하는 ‘action functional’이다. 위 식들을 이용하면, 옵션 가격을 나타낸 식(8)은,

$$O_F(S, t) = e^{-r\tau} \int_{-\infty}^{\infty} F(e^{x_T}) e^{(\mu/\sigma^2)(x_T - x) - (\mu^2 \tau / 2\sigma^2)} K(x_T, T | x, t) dx_T \quad (12)$$

$$K(x_T, T | x, t) = \int_{x(t)=x}^{x(T)=x_T} e^{-A_0[x(t')]} Dx(t') \quad (13)$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2 \Delta t} \sum_{i=0}^{N-1} (x_{i+1} - x_i)^2\right) \frac{dx_1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 \Delta t}} \cdots \frac{dx_{N-1}}{\sqrt{2\pi\sigma^2 \Delta t}}$$

과 같이 쓸 수 있다.

식(12)에서  $K(x_T, T | x, t)$ 는  $dx = \sigma dz$  (zero-drift Brownian motion)의 ‘kernel’이다. 식

(13)은 가우시안(Gaussian) 다중 적분이므로 아래 적분식을 이용하도록 한다.

경우이고,  $K$ 는 zero-drift인 경우의 전이확률값이다.

<sup>8</sup> 경로적분에서는 underlying process에 대해 Lagrangian을 구하는 문제가 중요한데, 이 논문에서는 블랙-숄즈 모형만을 다룰 것이므로 논외로 한다. 또, 경로적분 방식을 재무 이론에 사용하는데 대한 타당성에 의문을 제기하는 학자들도 있지만, 양자물리학에서는 경로적분의 수학적 엄밀성에 대한 많은 논의가 있어왔으며, Wick rotation을 통해서 Shrödinger eq.을 diffusion eq.으로 변환할 수 있다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x-z)^2 - b(z-y)^2} dz = \sqrt{\frac{\pi}{a+b}} \exp\left[-\frac{ab}{a+b}(x-y)^2\right] \quad (14)$$

식(14)를 이용하면  $x_1$ 에 대한 적분은,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi\sigma^2\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2\Delta t} \left((x_2-x_1)^2 + (x_1-x_0)^2\right)\right] dx_1 \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(2\Delta t)}} \exp\left[-\frac{(x_2-x_0)^2}{2\sigma^2(2\Delta t)}\right] \end{aligned} \quad (15)$$

과 같다.  $x_1$ 의 적분은  $\Delta t$ 를  $2\Delta t$ 로  $(x_2-x_1)^2 + (x_1-x_0)^2$ 를  $(x_2-x_0)^2$ 로 바꾸게 되는데, 마찬가지로  $x_2$ 에 대한 적분은  $2\Delta t$ 를  $3\Delta t$ 로 그리고  $(x_3-x_2)^2 + (x_2-x_0)^2$ 를  $(x_3-x_0)^2$ 으로 바꾼 결과가 나올 것이다. 이와 같은 방식으로 N-1개의 적분 계산을 하게 되면,

$$K(x_T, T|x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\tau}} \exp\left(-\frac{(x_T-x)^2}{2\sigma^2\tau}\right) \quad (16)$$

우리가 이미 아는 바와 같이, 정상분포(normal density)를 얻을 수 있다. 이  $K(x_T, T|x, t)$

식은 다음 ‘zero-drift diffusion equation’의 초기조건  $K(x_T, T|x, t) = \delta(x_T - x)$ 에서의 해이기도 하다.

$$\frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 K}{\partial x^2} = -\frac{\partial K}{\partial t} \quad (17)$$

또,  $\mu$ 를 포함한 커널  $K^\mu(x_T, T|x, t)$ 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} K^\mu(x_T, T|x, t) &= e^{(\mu/\sigma^2)(x_T-x) - (\mu^2\tau/2\sigma^2)} K(x_T, T|x, t) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\tau}} \exp\left(-\frac{(x_T-x-\mu\tau)^2}{2\sigma^2\tau}\right) \end{aligned} \quad (18)$$

이제 만기 시점의 자산가격에만 의존하는 옵션(path-independent option)의 경우에 시간 t 시점에서의 옵션 가격은 최종적으로,

$$O_F(S, t) = e^{-r\tau} \int_{-\infty}^{\infty} F(e^{x_T}) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\tau}} \exp\left(-\frac{(x_T-x-\mu\tau)^2}{2\sigma^2\tau}\right) dx_T \quad (19)$$

과 같이 나타내어 진다.

유럽형 콜옵션의 경우에 만기수익구조가  $\max(e^{x_T} - K, 0)$ 이며, 식(19)에 대입하여 계산해

보면 아래 결과를 얻을 수 있다.<sup>9</sup>

$$C(S, t) = SN(d_2) - e^{-r\tau} KN(d_1),$$

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + \mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}, \quad d_2 = d_1 + \sigma\sqrt{\tau} \quad (20)$$

### 3. 경로의존형 옵션(path-dependent options)

좀 더 복잡한 경로의존형(path-dependent) 옵션으로 넘어가보도록 하자. 경로의존형 옵션은 만기의 수익구조(payload)가 만기의 자산 가격에 의해서만 정해지는 것이 아니라 가격 경로  $\{S(t'), t \leq t' \leq T\}$ 에 의해서 결정되며, 만기 수익구조에 가중평균 가격을 이용하는 Asian 옵션, 최대나 최소 가격을 이용하는 look-back 옵션, 가격이 미리 정해진 선(barrier)을 넘어가는지에 의해 만기수익구조가 정해지는 배리어 옵션 등과 더 복잡한 특이옵션들이 OTC에서 거래되고 있다. 경로의존형 옵션의 수익구조를 함수  $F$ 로 쓰면 다음과 같다.

$$O_F(T) = F[S(t')] \quad (21)$$

이 함수를 이용해 현재 옵션의 가격을 Feynman-Kac식으로 적으면,

$$O_F(S, t) = e^{-r\tau} E_{(t,S)}[F[S(t')]]$$

$$= e^{-r\tau} \int_{-\infty}^{\infty} F[e^{x(t')}] K^\mu(x_T, T | x, t) dx_T \quad (22)$$

$$= e^{-r\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{x(t)=x}^{x(T)=x_T} F[e^{x(t')}] e^{-A_{BS}[x(t')]} Dx(t') \right) dx_T$$

이고, 식(12)와 비교해보면  $F[e^{x(t')}]$ 가 경로에 의한 함수이므로 적분식 밖으로 나오지 못하는 것을 알 수 있다. 이 함수  $F$ 를 경로적분식 밖으로 나올 수 있게 하기 위해 다음과 같은 테크닉을 사용해보도록 하자(Dash, 1993, 1989).

함수  $F$ 를 만기 가격과 경로에 의존하는 함수  $I$ 로 나누면 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$F[e^{x(t')}] = F(e^{x_T}, I), \quad I = I[e^{x(t')}] \quad (23)$$

식(23)을 Dirac-delta 함수를 이용하여 나타내기 위하여 새로운 변수  $\lambda$ 를 사용하면,

$$F(e^{x_T}, I) = \int_R \delta(\lambda - I) F(e^{x_T}, \lambda) d\lambda \quad (24)$$

과 같이 쓸 수 있고, 다음으로 Dirac-delta 함수를 푸리에 적분(Fourier integral) 형태로 쓰면,

$$F(e^{x_T}, I) = \int_R F(e^{x_T}, \lambda) F_\lambda^{-1}[\exp(-ipI)] d\lambda$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_R \int_R \exp(ip(\lambda - I)) F(e^{x_T}, \lambda) dp d\lambda \quad (25)$$

<sup>9</sup> 앞에서 유럽형 옵션의 경우 계산이 많고, 또 이미 알고 있는 결과를 도출해 내었는데, 이는 경로적분을 적용하는 과정을 보여주기 위함이고 경로적분의 장점은 뒤에서 볼 수 있겠다.

이 된다. 옵션 가격을 나타내는 식(22)에 대입하면,

$$O_F(S, t) = e^{-r\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \int_R F(e^{x_T}, \lambda) e^{(\mu/\sigma^2)(x_T - x) - (\mu^2\tau/2\sigma^2)} P(x_T, \lambda, T|x, t) d\lambda dx_T \quad (26)$$

과 같다. 여기서,  $P$ 는  $x_T$ 와  $\lambda$ 의 'joint probability density'이며, 커널  $K_{I,p}(x_T, T|x, t)$ 의 역푸리에 변환(inverse Fourier transform)으로 주어진다.

$$\begin{aligned} P(x_T, \lambda, T|x, t) &= F_{\lambda}^{-1}[K_{I,p}(x_T, T|x, t)] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_R \exp(ip\lambda) K_{I,p}(x_T, T|x, t) dp \end{aligned} \quad (27)$$

$$K_{I,p}(x_T, T|x, t) = \int_{x(t)=x}^{x(T)=x_T} \exp(-A_0 - ipI) Dx(t') \quad (28)$$

식(28)에서 함수  $I$ 를 식(29)와 같이 시간에 대한 적분 형태로 쓸 수 있다면,

$$I = \int_t^T v(x(t'), t') dt' \quad (29)$$

$K_{I,p}(x_T, T|x, t)$ 에서  $A_0$ 와 같이 시간 적분식으로 묶을 수 있으며 아래와 같은 꼴로 나타내어진다.

$$K_{V,p,v}(x_T, T|x, t) = \int_{x(t)=x}^{x(T)=x_T} \exp\left(-\int_t^T (L_0 + V) dt'\right) Dx(t') \quad (30)$$

$$V(x, t) = ipv(x, t) \quad (31)$$

위 식처럼 나타내면  $K_{V,p,v}(x_T, T|x, t)$ 이 'killing rate',  $V(x, t)$ 를 갖는 'zero-drift Brownian motion'의 전이확률과 같음을 알 수 있다(Karlin, 1981). 경로에 따라 옵션 가격이 어떻게 결정되는지를 나타내는 함수  $I$ 를 알면 위 식(26)의 값을 구할 수 있다.

만기까지 자산가격의 기하평균값을 취하는 아시안 옵션의 경우는 식(31)에서 포텐셜에 해당하는  $V(x, t)$ 이  $x$ 의 일차식에 비례하는 형태로 주어지므로  $K_{V,p,v}(x_T, T|x, t)$ 의 적분식이 가우시안 형태로 나오고, 폐쇄형 해를 구할 수 있다(Linetsky, 1998; Matacz, 2002). 산술평균값을 취하는 경우는  $V(x, t)$ 이  $e^x$ 에 비례하는 형태를 가지며 이 경우 폐쇄형 해가 존재하지 않지만 양자역학에서 많이 쓰이는 WKB 근사식을 이용해 계산해 볼 수 있다.

배리어 옵션의 경우에는 함수  $I$ 가 적분 가능한 함수 형태로 주어지지 않기 때문에 위의 접근 방법으로 구하기 어려우며, Baaquie(2004)가 제시한 방법으로 전이확률값을 계산할 수 있다. 이 값은 'reflection principle'에 의해 구해진 결과와 같으며 Rubinstein(1991)과 같은 배리어 옵션의 가격을 보여준다.

Knock-out형 배리어 옵션의 경우를 더 살펴보자. 만기까지의 연속된 시간 동안 자산가격이 배리어를 넘어가는지를 모니터링하는 연속 배리어 옵션과 달리 미리 정해진 시간에서만 모

니터하는 ‘discrete barrier’ 옵션의 경우에 커널  $K_B(x_T, T|x, t)$  는 ‘semi-group property’에 따라 다음과 같이 쓸 수 있다. 시간  $t_B$  에서 자산가격을 모니터 하는 ‘down-and-out discrete’형 배리어 옵션일 때,

$$K_B(x_T, T|x, t) = \int_{\ln B}^{\infty} K(x_T, T|x', t_B)K(x', t_B|x, t)dx' \quad (32)$$

과 같고, 시간  $t_{B_1}$ ,  $t_{B_2}$  에서 자산가격을 모니터 할 경우는,

$$K_B(x_T, T|x, t) = \int_{\ln B_2}^{\infty} \int_{\ln B_1}^{\infty} K(x_T, T|x'', t_{B_2})K(x'', t_{B_2}|x', t_{B_1})K(x', t_{B_1}|x, t)dx'dx'' \quad (33)$$

와 같이 적용할 수 있다.

연속 배리어 옵션에 대해서는 위 방법으로 폐쇄형 해를 구하기 보다는 ‘reflection principle’을 이용하면  $K_B(x_T, T|x, t)$  이 다음과 같이 두 개의 정상분포의 합으로 주어지는 것을 알 수 있다.

$$K_B(x_T, T|x, t) = K(x_T, T|x, t) - K_B^{(image)}(x_T, T|x, t) \quad (34)$$

$$K_B(x_T, T|x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\tau}} \left( \exp\left\{-\frac{(x_T - x)^2}{2\sigma^2\tau}\right\} - \exp\left\{-\frac{(x_T + x - 2b)^2}{2\sigma^2\tau}\right\} \right) \quad (35)$$

### III. 경로적분의 수치적 해법

#### 1. 경로적분의 효율적 수치 해법

경로적분의 수치해법을 옵션 가격결정에 적용하는 방법은 크게 이산화(discretization) 방법과 몬테카를로(Monte-Carlo) 방법이 있다. 이산화 방법으로는 FFT를 함수적분(functional integral)에 응용하여 효율성을 개선시킨 Eydeland(1994)의 논문이 시초가 되었으며, 몬테카를로 경로적분 방법의 연구로는 Makivic(1995)이 ‘standard Metropolis algorithm’을 이용해 처음 시도하였고, Rosa-clot(1999), Bornett(2006)이 좀 더 발전시켜 몇 가지 옵션들에 적용해 보았다.

이 논문에서 구현한 이산화 방법을 Eydeland(1994)에 기초하여 설명하고자 한다. 우리 논문에서는 좀 더 일반적인 경우에 적용할 수 있는 식으로 기술하였으며 특이옵션의 경우에 어떻게 적용할 수 있는지도 알아 보겠다.

옵션의 만기손익구조가 함수  $F[S(t')]$ 로 주어질 때, 옵션의 현재 가격은 식(21)과 같이 주어진다. 무위험 이자율  $r$ 과 변동성  $\sigma$ 가 일정하고, 주가  $S$ 가 GBM을 따른다고 가정하면, 새로운 변수  $\xi(S)$ 를 정의하여 옵션의 가격을 아래 식(39)처럼 쓸 수 있다. 경로적분 측도  $D[x(t)]$ 의 정의에 따라 자연스럽게 이산화된 형태로 표현된다.

$$\xi(S) = (\ln S - \ln S_0) / \sigma \quad (36)$$

$$d\xi = \left( \frac{\mu}{\sigma} - \frac{1}{2} \sigma \right) dt + dz \quad (37)$$

$$\begin{aligned} O_F(S, t) &= e^{-r\tau} E_{(t,S)}[F[S(t')]] \\ &= e^{-r\tau} \int_{-\infty}^{\infty} F[e^{x(t')}] K^\mu(x_T, T|x, t) dx_T \\ &= e^{-r\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{x(t)=x}^{x(T)=x_T} F[e^{x(t')}] e^{-A_{BS}[x(t')]} Dx(t') \right) dx_T \\ &= e^{-r\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left( -\frac{\mu^2 \tau}{2\sigma^2} + \frac{\mu}{\sigma^2} (x_T - x) - \frac{1}{2\sigma^2 \Delta t} \sum_{i=0}^{N-1} (x_{i+1} - x_i)^2 \right) \times \\ &\quad \frac{dx_1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 \Delta t}} \cdots \frac{dx_{N-1}}{\sqrt{2\pi\sigma^2 \Delta t}} dx_T \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} O_F(\xi, t) &= \lim_{N \rightarrow \infty} e^{-r\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} F[\xi(t')] p^1(\xi^1 | \xi^0) p^2(\xi^2 | \xi^1) \cdots \\ &\quad \times p^N(\xi^N | \xi^{N-1}) d\xi^1 d\xi^2 \cdots d\xi^{N-1} d\xi^N \end{aligned} \quad (39)$$

$$p^k(\xi^k | \xi^{k-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t^k - t^{k-1})}} \exp\left[ -\frac{(\xi^k - \xi^{k-1} - (\mu/\sigma - \sigma/2)\Delta t)^2}{2(t^k - t^{k-1})} \right] \quad (40)$$

위에서  $p^k(\xi^k | \xi^{k-1})$ 는 N개의 일정한 시간 간격으로 이산화된 시간  $t = t^k = t + k\Delta t$

( $k = 0, 1, \dots, N$ )에서의 전이확률값이고,  $\xi^k = \xi(t^k)$ 를 나타낸다.

우리가 사용할 수치해법은  $F[\xi(t')]$ , ( $t \leq t' \leq T$ )의 형태에 따라 조금씩 다른 접근 방식이 필요한데 예를 들어 설명해보도록 하겠다. 우선, 함수  $F[\xi(t')]$ 가,

$$F[\xi(t')] = f(\xi_T) e^{-I[\xi(t')]} \quad (41)$$

$$I[\xi(t')] = \int_t^T V(\xi(t'), t') dt' \quad (42)$$

의 형태로 주어진다고 가정해보자.  $F[\xi(t')]$ 가 만기 자산가격에만 의존하는 함수  $f(\xi_T)$ 와 경로에 의해 정해지는 함수  $I[\xi(t')]$ 의 곱으로 나뉘어지는 경우로, 식(5)가 주가가 아니라 이자율 프로세스라면 이자율 파생상품이 이 형태에 해당된다.

적분 식(42)를 'trapezoidal rule'에 따라 근사시키면,

$$I[\xi(t')] \cong \frac{1}{2}V(\xi^0, t^0)\Delta t + V(\xi^1, t^1)\Delta t + \dots + V(\xi^{N-1}, t^{N-1})\Delta t + \frac{1}{2}V(\xi^N, t^N)\Delta t \quad (43)$$

이 되고, 식(39)에 대입하면,

$$O_F(\xi, t) = e^{-r\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi_T) e^{-\frac{1}{2}V(\xi^0, t^0)\Delta t - V(\xi^1, t^1)\Delta t - \dots - V(\xi^{N-1}, t^{N-1})\Delta t - \frac{1}{2}V(\xi^N, t^N)\Delta t} \\ \times p^1(\xi^1 | \xi^0) p^2(\xi^2 | \xi^1) \dots p^N(\xi^N | \xi^{N-1}) d\xi^1 d\xi^2 \dots d\xi^{N-1} d\xi^N \quad (44)$$

이 된다. 이를 다시 쓰면 아래 식(45)와 같다.

$$O_F(\xi, t) = e^{-r\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi_T) e^{-\frac{1}{2}V(\xi^0, t^0)\Delta t} p^1(\xi^1 | \xi^0) e^{-V(\xi^1, t^1)\Delta t} p^2(\xi^2 | \xi^1) \times \dots \\ \times e^{-V(\xi^{N-1}, t^{N-1})\Delta t} p^N(\xi^N | \xi^{N-1}) e^{-\frac{1}{2}V(\xi^N, t^N)\Delta t} d\xi^1 d\xi^2 \dots d\xi^{N-1} d\xi^N \quad (45)$$

위 계산은 N개의 적분을 포함하고 있는데, 시간 축과 변수  $\xi$  축의 노드 개수가 각각 N, M개라고 할 때  $M^2N$ 에 비례하는 연산과정을 필요로 한다. 하지만 Eydeland(1994)에서는 FFT를 이용하여 계산에 필요한 연산과정이  $MN(\log_2 M)$ 에 비례하도록 개선하였다.

식(45)를 ‘quadrature’ 방식으로 나타내보도록 하자. 시간 축과 변수  $\xi$  축을 일정한 간격의 N, M개의 노드로 나눈 그리드(grid),  $\{\xi_j^k\}$  ( $j=1, \dots, M, k=1, \dots, N$ )에 대해서 연산을 하면, (<그림2>참조) 식(45)식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$O_F = \delta_0^T \cdot D^0 \Pi^1 D^1 \cdot D^1 \Pi^2 D^2 \dots D^{N-1} \Pi^N D^N \cdot \Sigma^N \quad (46)$$

$$D^k = \begin{bmatrix} e^{-\frac{1}{2}V(\xi_1^k, t^k)\Delta t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{-\frac{1}{2}V(\xi_M^k, t^k)\Delta t} \end{bmatrix} \quad (47)$$

$$\Pi_{ij}^k = p^k(\xi_j^k | \xi_i^{k-1}) \quad (48)$$

$$\delta_0^T = e^{-r\tau} (00 \dots 1 \dots 0) \quad , \quad \Sigma_j^N = f(\xi_j^N) \quad (49)$$

여기서,  $D^k$ 는 경로의존 함수  $I[\xi(t')]$ 에 대한 연산자이고,  $\Pi^k$ 는 전이확률의 이산화행렬이다. 그리고  $\delta_0^T$ 는 시작 시간 t에서의 자산가격 위치와 할인율을 포함한 행렬, 그리고  $\Sigma^N$ 는 만기시점의 자산가격에 의한 함수  $f(\xi_T)$ 에 대한 적분을 나타낸다.

여기서 주목할 것은,  $\Pi^k$ 이 ‘Toeplitz’ 행렬이기 때문에 FFT를 사용하여 효율적으로 연산을 할 수 있다는 점이다.  $\Pi^k$ 를 행렬식으로 써보면 아래 식(50)과 같다. 또,  $\Pi^k$ 의 ‘circular matrix’,  $C_{2M \times 2M}$ 에 대해  $C_{2M \times 2M} \tilde{V}_{2M \times 1}$ 의 처음 M개 원소는 행렬  $\Pi_{M \times M} V_{M \times 1}$ 와 같

$$\Pi = \begin{bmatrix} \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_{M-2} & \pi_{M-1} \\ \pi_1 & \pi_0 & \pi_1 & & & \vdots \\ \pi_2 & \pi_1 & \pi_0 & & & \\ \vdots & \pi_2 & & \ddots & & \pi_2 \\ & & & & \ddots & \pi_1 \\ \pi_{M-1} & \pi_{M-2} & \cdots & & \pi_1 & \pi_0 \end{bmatrix} \quad (50)$$

다( $\tilde{v}_{2M \times 1} = \begin{bmatrix} v_{M \times 1} \\ 0_{M \times 1} \end{bmatrix}$ ). 이 경우, FFT를 이용해서 다음과 같이  $C_{2M \times 2M} \tilde{v}_{2M \times 1}$  를 구할 수 있다

(Papoulis, 1977).

$$C\tilde{v} = \text{Re}[F^{-1}(F(c_1) \cdot F(\tilde{v}))] \quad (51)$$

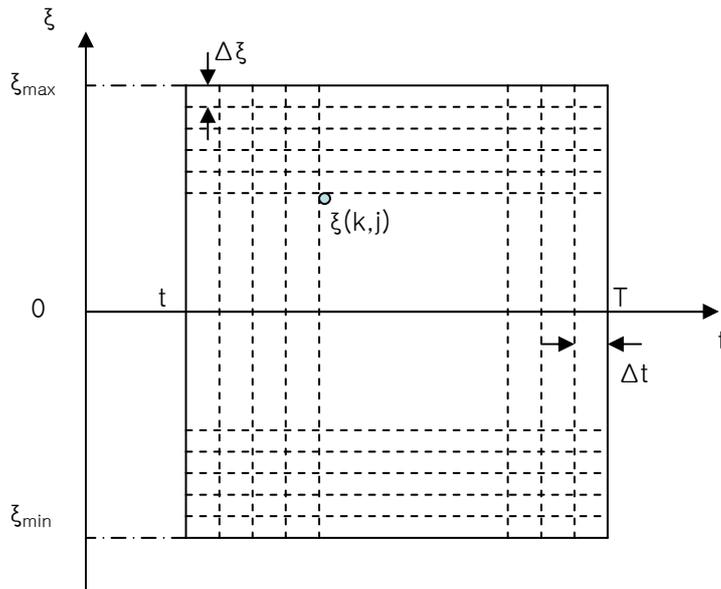
F와  $F^{-1}$ 은 각각 FFT와 역FFT 연산자이고,  $c_1$ 은 행렬  $C$ 의 처음 행이다.  $\Pi$ 에 대한  $c_1$ 행렬은 다음과 같다.

$$c_1 = [\pi_0 \ \pi_1 \ \cdots \ \pi_{M-1} \ 0 \ \pi_{M-1} \ \pi_{M-2} \ \cdots \ \pi_1] \quad (52)$$

이와 같은 방법으로 효율적으로 식(45)의 적분값을 구할 수 있으며,  $\mu(\xi, t)$ 가 상수가 아니고 행렬  $\Pi$ 가 'Toeplitz' 행렬이 안될 때는 보간 연산자  $L$ 를 이용하여 'Toeplitz' 행렬로 변환 시켜줄 수 있다.

$$O_F = \delta_0^T \cdot L^0 D^0 \Pi^1 D^1 \cdot L^1 D^1 \Pi^2 D^2 \cdots L^{n-1} D^{n-1} \Pi^n D^n \cdot \Sigma^n \quad (53)$$

이제 함수  $F[\xi(t')]$ 이 다른 형태를 갖는 옵션들에 대해서 이 방법을 어떻게 적용 시킬지 살펴보자.



<그림2> 변수  $\xi$ 와 시간의 그리드(grid)

## 2. 다른 적용 예제들

### (1) 유럽형 옵션

유럽형 옵션의 경우는  $F[\xi(t')] = f(\xi_T)$  이 되는 경우다.  $D^k = 1_{M \times M}$  이고 따라서,

$$O_F = \delta_0^T \cdot \Pi^1 \cdot \Pi^2 \cdots \Pi^N \cdot \Sigma^N = \delta_0^T \cdot \Pi^{all} \cdot \Sigma^N \quad (54)$$

과 같이 되는데, 우리가 일반적으로 알고 있는 ‘quadrature integration method’가 이에 해당된다. Andricopoulos(2003)는 ‘quadrature method’를 옵션 가격을 계산하는데 적용하면서 ‘Simpson’s rule’을 적용하였다. 유럽형 옵션과 같이 경로에 의존하지 않는 경우에는 ‘Simpson’s quadrature rule’이나 다른 ‘quadrature rule’을 이용하여 정확도와 수렴성등을 어느 정도 향상 시킬 수 있겠으나, 경로에 의존하는 옵션들의 경우에는 계산량을 증가시키게 되고 위의 FFT를 이용한 방법을 사용할 수 없다.

### (2) 배리어 옵션

배리어 옵션의 경우는 배리어에서  $V(\xi_B(t'), t')$  가 무한대가 된다. 즉,  $F[\xi_{B>}(t')] = 0$  이 되는데 이를 식(46) 방식으로 표현하면,

$$O_F = \delta_0^T \cdot \Pi_{B_1} \cdot \Pi_{B_2} \cdots \Pi_{B_N} \cdot \Sigma^N \quad (55)$$

$$\Pi_{B_k} = \Pi^k + B_k \quad (56)$$

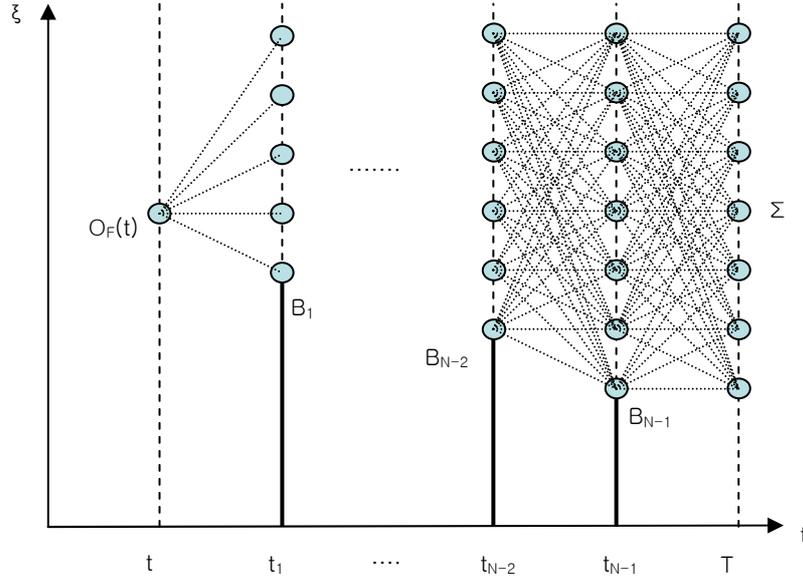
과 같이 된다. 여기서,  $\Pi_{B_k}$  는 k시점에서의 배리어에 의한 효과,  $F[\xi_{B>}(t')] = 0$  를 포함시킨 연산자이다.<sup>10</sup> N을 크게 하여 시간 간격을 줄이면 연속적인 시간에 대하여 모니터링하는 배리어 옵션에 대한 결과를 얻을 수 있으며, Andricopoulos(2003)에서 제시한 ‘discrete-moving-barrier options’에 대해서도 같은 원리로 적용 가능하다. 이해를 돕기 위해 식(55)의 연산과정을 <그림3>에 개략도로 나타내었다.

### (3) 아시안 옵션

아시안 타입의 옵션에서 산술평균 아시안 옵션의 경우는  $F[\xi(t')] = f(\xi_T, \frac{1}{N} \sum_k S(t^k))$ ,

기하평균 아시안 옵션의 경우는  $F[\xi(t')] = f(\xi_T, e^{\frac{1}{N} \sum \ln S(t^k)})$  와 같이 주어진다. 식(41)과 같이 경로에 의존하는 부분을 분리해낼 수 없기 때문에 다음과 같이 ‘joint distribution density’,  $p^k(U^k, S^k)$  를 도입해보자. 산술평균 아시안 옵션의 경우에,

<sup>10</sup>  $\Sigma^N$  를 배리어에 대하여 조정할 수도 있으나, 식(56)과 같은 방식이 더 직관적으로 명확하다.



<그림3> Discrete moving barrier option에서 경로적분법의 원리

시간  $t^k$ 에서의 평균값  $U^k$ 는 다음과 같다.

$$U^k = \frac{1}{k} \sum_{l=1}^k S^l \quad (57)$$

$$U^k = \frac{((k-1)U^{k-1} + S^k)}{k} \quad (58)$$

식(58)에 따라  $U^k$ 와  $S^k$ , 두 변수의 'joint distribution density',  $p^k(U^k, S^k)$ 는 다음과 같은 성질을 가진다.

$$p^k\left(\frac{((k-1)U^{k-1} + S^k)}{k}, S^k\right) = \int_{r^{k-1}} p^{k-1}(U^{k-1}, S^{k-1}) \pi(S^k | S^{k-1}) dS^{k-1} \quad (59)$$

$\pi(S^k | S^{k-1})$ 는 전이확률값이다. 식(59)를 이용하면 옵션의 가격은,

$$\begin{aligned} O_F(S, t) &= e^{-r\tau} \int_{U^N, S^N} F(U^N) p^N(U^N, S^N) dU^N dS^N \\ &= e^{-r\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} F(U^N) p^1(U^1, S^1) \pi(S^2 | S^1) \pi(S^2 | S^1) \cdots \\ &\quad \times \pi(S^N | S^{N-1}) dS^1 \cdots dS^{N-1} dS^N \end{aligned} \quad (60)$$

과 같다.  $p^k(U^k, S^k)$ 은  $N \times N$  행렬로 나타내지는데 식(60)을 식(46)과 같은 행렬식으로

나타내려면 식(59)에서  $p^k\left(\frac{((k-1)U^{k-1} + S^k)}{k}, S^k\right)$ 의 행렬을  $p^k(U^k, S^k)$ 의 행렬로 바꿔

주는 연산자  $W$ 가 필요하다. 식(60)은 식(53)과 같은 형태의 'quadrature procedure'가 될 것이다. 위와 같은 방법을 Look-back 옵션에도 적용시킬 수도 있다

### (3) 다자산 옵션과 기타

다자산 옵션과 같이 차원이 높아지는 경우에도 기초자산들의 프로세스를 'covariance matrix'를 포함하는 하나의 식으로 표현할 수 있으며(Linetsky, 1998; Rosa-Clot, 1999), 위와 같이 'quadrature' 방식을 적용할 수 있다. 또한, 기초자산이 이자율인 경우, CIR(Cox-Ingersoll-Ross)이나 Vasicek과 같이 'Affine' 모형들은 변수 변환을 통해서 쉽게 가우시안 형태로 바꿔줄 수 있다.

## IV. 유럽형 옵션, 디지털 옵션, 배리어 옵션에서의 결과

위에서 설명한 이산화 경로적분법의 알고리즘을 가지고 유럽형 옵션, 디지털 옵션, 배리어 옵션의 경우에 대하여, FDM(Crank-Nicholson), 격자모형들과 성과를 비교하여 보았다. 만기손익구조의 비선형성으로 인해 생기는 ATM(at the money) 옵션들의 가격 오차가 어느 정도 개선되는지를 <그림4,5,6>를 통해 확인할 수 있다. 특히, 만기손익(payoff) 함수가 불연속인 디지털 옵션을 선택하여 오차의 원인을 분명히 보여주었다. 계산 시간은 경로적분법에 대한 상대시간을 나타내고, 오차(error)는 세 경우 모두 폐쇄형 해(closed-form solution)가 이미 알려져 있으므로 이에 대한 상대오차(%오차)를 측정하였다. 유럽형 옵션과 디지털 옵션은 모두 경로에 무관한 옵션(path-independent options)이므로 경로적분법에서  $N=1$ 로 놓는다. 이 두 경우 계산 시간에서 엄청난 차이가 있으며, 기존 방법들에서 노드수를 증가시켜도 개선되지 않았던 오차에 대해 자유로움을 알 수 있다.

경로적분법이 경로의존형(path-dependent) 옵션에서도 효율적인지 알아보기 위해 배리어 옵션에 대하여도 테스트를 해보았다. 이 경우 경로적분을 이용한 방법도 FDM이나 격자모형과 같이 시간 노드의 수를 증가시킬수록 정확한 값을 얻을 수 있으므로, 계산 시간과 수렴 속도를 비교해볼 수 있다. Crank-Nicholson과 비교해 보면 앞에서 설명한 FFT를 이용한 계산법이 효율적임을 알 수 있다.

계산 결과로부터 경로적분법과 다른 방법들간의 차이점을 알 수 있다. 배리어 옵션의 경우 배리어 근처에서 생기는 오차를 경로적분법으로 상당히 줄일 수 있는데, 그 이유는 경로적분법이 배리어 근처에서 경로에 대한 정보를 보다 많이 가지고 있기 때문이다. Andricopoulos(2003)이 언급한 것과 같이 'quadrature integration' 방식은 'multinomial lattice'와 유사한 방식을 가지는데 'Binomial tree'는 같은 양의 계산을 하더라도 트리 뒤쪽으로 갈수록 경로에 대한 정보가 더 많기 때문이다.

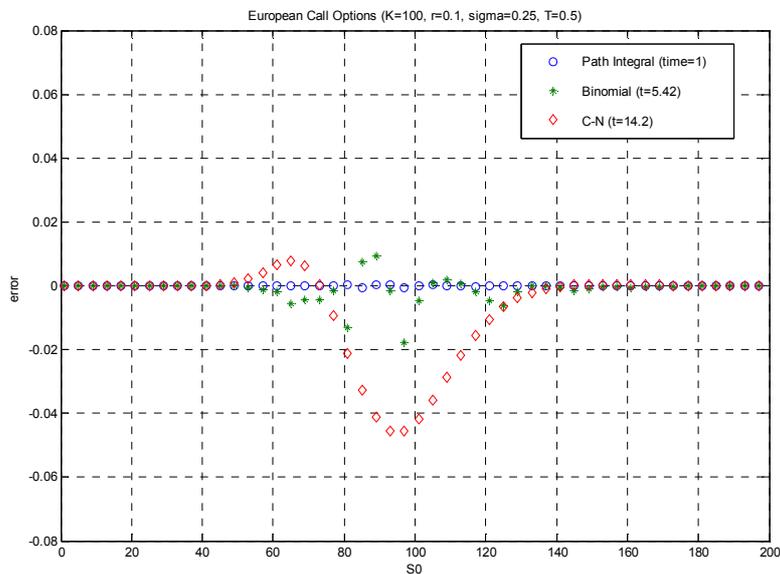
아래에 각 옵션들의 정보와 계산 결과를 실었다.

### 1. 유럽형 옵션(European options)

European vanilla call :  $K=100$ ,  $\sigma=0.25$ ,  $T=0.5$ ,  $r=0.1$ ,  $S_{\max}=600$ .

Method	No.	M	N	Error(%)	Time
Crank- Nicholson	1	200	100	-6.66	50.1
	2	400	200	-6.629	373.2
	3	600	300	-0.030	1080
Binomial	1	.	100	-0.186	11.9
	2	.	200	-0.093	27.92
	3	.	300	0.053	59.76
Path Integral	1	200	1	-0.059	1
	2	400	1	-0.015	1
	3	600	1	-0.006	1

<표1> 유럽형 옵션 성과 비교 (ATM,  $S_0=100$ )



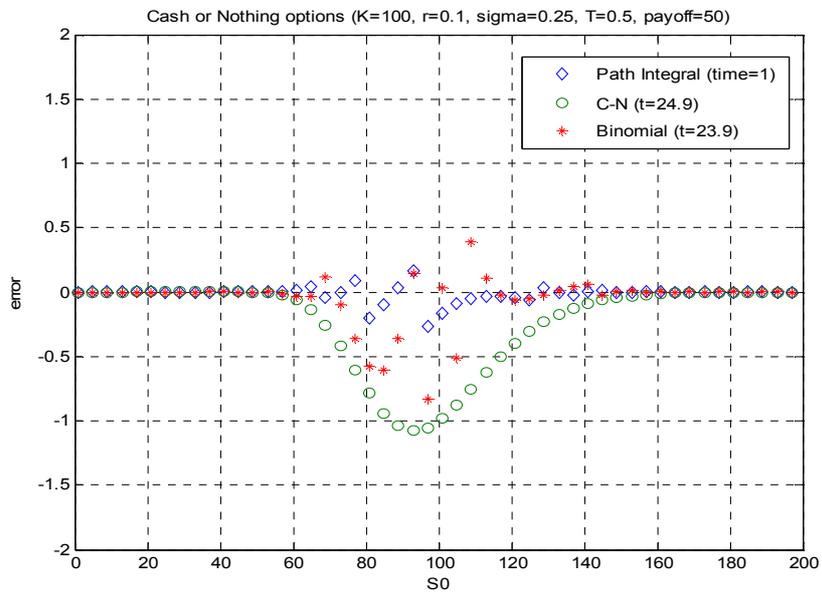
<그림4> 유럽형 옵션 오차 비교

## 2. 디지털 옵션(Digital options)

Cash or Nothing call :  $K=100$ ,  $\sigma=0.25$ ,  $T=0.5$ ,  $r=0.1$ ,  $S_{\max}=600$ ,  $\text{payment}=50$ .

Method	No.	M	N	Error(%)	Time
Crank- Nicholson	1	200	100	-5.838	54.25
	2	400	200	-2.910	427.7
	3	600	300	-1.919	628.3
	4	800	400	-1.443	1661
Binomial	1	.	100	-6.794	13.90
	2	.	200	-4.804	33.24
	3	.	300	-3.922	49.33
	4	.	400	-3.396	61.41
Path Integral	1	200	1	-3.449	1
	2	400	1	-1.721	1
	3	600	1	-1.147	1
	4	800	1	-0.860	1

<표2> 디지털 옵션 성과 비교 (ATM,  $S_0=100$ )



<그림5> 디지털 옵션 오차 비교

### 3. 배리어 옵션(Barrier options)

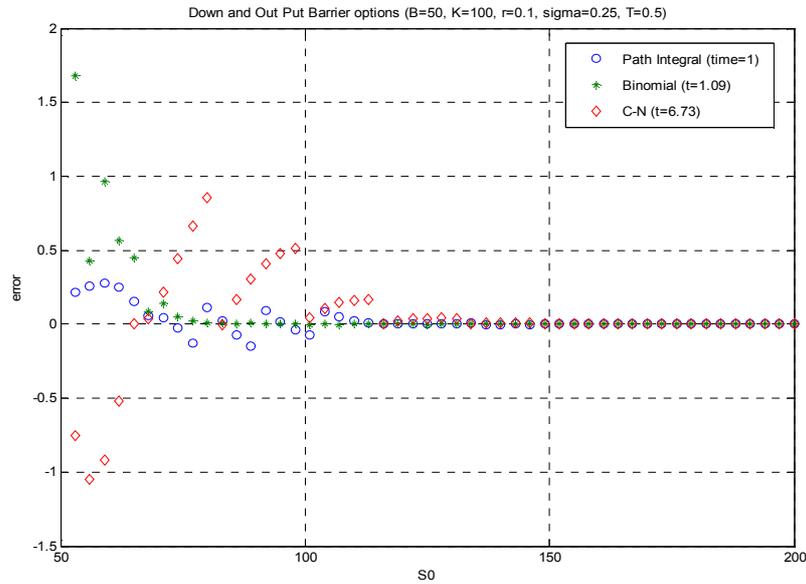
Down and Out put barrier option :  $K=100$ ,  $\sigma=0.25$ ,  $T=0.5$ ,  $r=0.1$ ,  $S_{\max}=600$ ,  $B=50$ .

Method	No.	M	N	Error(%)	Time
Crank- Nicholson	1	200	100	11.78	4.03
	2	400	200	0.940	7.62
	3	600	300	4.545	13.7
	4	800	400	0.953	18.9
Binomial	1	.	100	0.204	0.961
	2	.	200	0.166	0.611
	3	.	300	-0.118	0.739
	4	.	400	0.088	0.809
Path Integral	1	200	100	5.4632	1
	2	400	200	-0.475	1
	3	600	300	1.508	1
	4	800	400	-0.396	1

<표3> Down and Out Put 배리어 옵션 성과 비교 (ATM,  $S_0=100$ )

Method	No.	M	N	Error(%)	Time
Crank- Nicholson	1	200	100	-6.908	4.59
	2	400	200	-7.218	10.4
	3	600	300	-7.276	13.8
	4	800	400	-7.296	16.7
Binomial	1	.	100	20.42	1.12
	2	.	200	7.178	0.856
	3	.	300	5.217	0.699
	4	.	400	6.128	0.730
Path Integral	1	200	100	-13.68	1
	2	400	200	7.687	1
	3	600	300	1.463	1
	4	800	400	-0.734	1

<표4> Down and Out Put 배리어 옵션 성과 비교 (Around the barrier,  $S_0=53$ )



<그림6> Down and Out Put 배리어 옵션 오차 비교

## V. 결론

본 연구에서는 경로적분을 옵션 가격 결정에 적용하는 방법과 그 특성들을 살펴보았다. 특히, 경로적분법에 의한 수치해법이 유한차분법이나 격자 모형이 가져오는 오차의 원인에 영향을 받지 않음을 보이고, 여러가지 형태의 만기손익을 주는 특이 옵션들에 대하여 적용하는 방법들을 논의하였다. 유럽형 옵션이나 디지털 옵션은 물론이고, 배리어 옵션의 경우 배리어 근처에서 생기는 오차를 크게 줄일 수 있음을 알았다. 경로적분법은 확률모형을 다룰 때 보다 직관적이고 보편적인 계산 방법으로, 옵션의 가격을 결정하는 두 가지 접근법, PDE와 Feynman-Kac식에 대한 연결고리를 제공한다. 논문에서 보듯이 경로의존형 옵션의 경우에는 폐쇄형 해를 구하거나 혹은 수치적인 방법으로 옵션 가격을 구할 수 있다.

우리의 연구가 경로적분법의 이산화 수치해법에 국한되었지만, Levy 확률과정과 같이 일반적인 확률과정이나 이자율 모형에 대한 적용 등은 앞으로의 연구과제이며, 재무 이론에 경로적분을 이용한 접근 방법이 많이 이루어지길 바란다.

## 참고문헌

- 김동석, 변석준 (2000), *옵션에 대한 수치해법상의 초기값 불연속성 문제에 관한 연구*, 선물 연구 7호.
- Andricopoulos, D. and M. Widdicks (2003), *Universal Option Valuation Using Quadrature Methods*, J. of Financial Economics.
- Baaquie, B. (1998), *A path integral approach to option pricing with stochastic volatility: some exact result*, J. Phys. I France 7.
- Baaquie, B. (2004), *Quantum Finance: Path Integrals and Hamiltonians for Options and Interests Rates*, Cambridge Univ. Press.
- Bornett, G. (2006), *Pricing Exotic Options in a Path Integral Approach*, Quantitative Finance.
- Boyle, P. and S. Lau (1994) *Bumping Up Against Barrier with the Binomial Method*, J. of Derivatives.
- Cerny, A. (2004), *Introduction to Fast Fourier Transform in Finance*, J. of Derivatives.
- Dash, J. (1988), *Path Integrals and options I*, Merrill Lynch Capital Markets preprint, unpublished.
- Dash, J. (1989), *Path Integrals and options II: one-factor term-structure models*, Merrill Lynch Capital Markets preprint, unpublished.
- Dash, J. (1993), *Path Integrals and options*, SIAM Annual Conference.
- Derman, E., Kani, I, Ergener, D., and Bardham, I. (1995) *Enhanced Numerical Methods for Options with Barriers*, Working Papers, Goldman Sachs.
- Duffie, D. (1996), *Dynamic Asset Pricing*, 2<sup>nd</sup> ed, Princeton Univ. Press.
- Eydeland, A. (1994), *A Fast Algorithm for Computing Integrals in Function Spaces : Financial Applications*, Computational Economics.
- Feynman, R. (1965), *Quantum Mechanics and path Integrals*, McGraw-Hill.
- Figlewski, S. and B. Gao (1999) *The Adaptive Mesh Model: A New Approach to Efficient Option Pricing*, J. of Financial Economics.
- Geman, M. (1985), *Towards a semigroup pricing theory*, J. of Finance 40.
- Grosche, C. and F. Steiner (1998), *Handbook of Feynman path Integrals*, Springer-Verlag.
- Hull, J. (2000), *Options, Futures and Other Derivatives*, 3<sup>rd</sup> ed, Prentice Hall.
- Kac, M. (1980), *Integration in Fuction Spaces and Some of Its Applications*, Lezioni Fermiane, Piza.
- Karatzas, I. and S. Shreve (1992), *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer-

Verlag.

Karlin, S. and H. Taylor (1981), *A Second Course in Stochastic Processes*, Academic Press

Kleinert, H. (2002), *Option Pricing from Path Integral for Non-Gaussian Fluctuations: Natural Martingale and Application to Truncated Levy Distributions*, *Physica A* **312**, 217.

Linetsky, V. (1998), *The path Integral Approach to Financial Modeling and Option Pricing*, *Computational Economics* **11**:129-163.

Linetsky, V. (1999), *Step options: The Feynman-Kac approach to occupation time derivatives*, *Mathematical Finance* **9**, 55-96.

Lyasoff, A. (2004), *Path Integral Methods for Parabolic Partial Differential Equations*, *The Mathematica Journal* **9**:2.

Makivic, M. (1995), *Path Integral Monte Carlo method for valuation of derivative securities: algorithm and parallel implementation*, NPAC Technical Report.

Matacz, A. (2002), *Path Dependent Option Pricing: the path integral partial averaging method*, *J. of computational Finance*.

Otto, M. (1998), *Using Path Integrals to Price interest rate Derivatives*, working paper.

Papuolis, A. (1977), *A Signal Analysis*, McGraw-Hill.

Rosa-Clot, M. and S. Taddei (1999), *A Path Integral Approach to Derivative Security Pricing: I Formalism and Analytical Results*, *International J. of Theoretical and Applied Finance*.

Rosa-Clot, M. and S. Taddei (1999), *A Path Integral Approach to Derivative Security Pricing: II Numerical Methods*, *International J. of Theoretical and Applied Finance*.

Rubinstein, M. and E. Reiner (1991), *On pricing barrier options*, *J. of Derivatives* **5**.