

모멘트를 이용한 금융자산가격결정모형의 진단 및 검정*

김 봉 준 (서울대학교)**

< 요약 >

본 연구는 기초자산(FF25 포트폴리오와 T-bill)의 균형가격산정함수(pricing kernel)집합의 모멘트 하한을 차수별로 도출한 후, 이를 이용하여 기존의 이론적 모형을 진단하고 검정한다. 또한 모멘트 진단 및 검정 결과를 비교하는 기준(benchmark)으로 Hansen-Singleton의 optimal GMM검정과 Hansen-Jagannathan(H-J)의 distance 검정을 실시한다. 그리고 세 개의 검증 결과를 상호 비교 분석한다. 분석 결과는 다음과 같다.

첫째, 본 연구의 모멘트 진단 및 검정은 H-J 검증의 사전적 진단 및 검증으로 H-J 검증과 상호 보완적으로 사용될 수 있다. 이론적으로 모멘트 검증은 H-J 검증에 대해 필요조건 관계에 있는데, 실증결과는 이러한 관계를 잘 보여준다.

둘째, 기초자산으로부터 도출된 모멘트의 하한은 대칭축에서 멀어질수록 체증적으로 증가한다. 그리고 이러한 현상은 고차 모멘트로 갈수록 심해진다. 또한 모멘트의 차수가 높아짐에 따라 곡률이 점점 감소하여 9차 모멘트의 경우 거의 사라진다. 모멘트 하한의 이러한 성질은 이론적 가격산정함수의 기대값의 중요성을 말해준다. 즉, 이론적 가격산정함수의 기대값이 모멘트 하한의 대칭축에서 멀어질수록 모멘트 하한을 통과하기가 점점 더 어려워진다. 본 연구에서 상정한 모형들 중에서도 이론적 가격산정함수의 기대값이 대칭축에서 이미 상당히 떨어져 있는 경우에는 모멘트 지체 현상이 이내 나타났고, 다변량 부등식 검증에서 기각되었다. 필요조건을 위배하였으므로 HJ 검증에서도 기각되었다.

핵심 단어 : Hansen-Jagannathan Optimal GMM test, Hansen-Singleton Distance test, Joint test, Multivariate Inequality restrictions test, Hansen-Jagannathan Bound, Minimum moment bound

* 본 연구와 관련하여 유익한 조언을 해주신 서울대 경영학과 조재호 교수님, 서울대 경제학과 안동현 교수님에게 감사드립니다.

** 연락담당 저자. 주소: 서울시 관악구 신림9동 산56-1 서울대학교 경영대학 58동 413호, 151-914; E-mail: bongjunkim1@hanmail.net Tel: 02)880-8252.

1. 서론

Sharpe and Litterman가 자본자산가격결정모형(CAPM)을 발표하였을 때 사람들은 이 모형을 통해 금융자산의 균형가격을 결정할 수 있을 것이란 기대를 하였다. 그러나 검증 결과 이 모형은 실제 금융자산의 가격과 그 괴리가 심하였고 특히 주식시장의 이상현상(anomaly)들을 제대로 설명하지 못했다. 이후 이 모형의 현실 설명력을 놓고 학자들간에 열띤 논쟁이 일어났으나 여전히 뚜렷한 답은 없는 상태이다. 이에 대해 Fama and French(1992,JF)는 모형의 이상현상을 일으키는 요인들을 직접 위험 결정 변수로 가져옴으로써 이의 해소를 시도하였다. 그는 주가지수 수익률 외에 Size 포트폴리오 수익률과 book-to-market 포트폴리오 수익률을 추가적으로 가격산정함수(pricing kernel)에 도입하면 이러한 현상들이 설명될 수 있다고 주장하였다. 그러나 이는 이상현상과 상관관계가 높은 수밖에 없는 포트폴리오를 가격산정함수의 변수로 직접 도입한 당연한 결과로써 사용된 샘플을 벗어난 검정(out-of sample test)에서 기각되기 쉽다. 그리고 Ross(1976,JET)는 차익거래개념(no arbitrage principle)을 이용하여 다 요인(multi-factor) 모형을 개발한다. 그러나 이는 요인이 무엇인지 구체적으로 명시하지 않음으로써 검증 시 연구자에게 자의적인 해석의 여지를 제공한다. 그리고 Lucas(78,EMA)는 거시경제모형의 소비함수에서 출발하여 균형이론을 통해 금융자산가격결정모형(CCAPM)을 개발하는데 이 역시 검증결과 현실과 잘 부합하지 못하였다. 이의 가장 큰 이유는 소비 시계열 자료는 안정적인 경향이 있는 반면 주식 및 금융자산의 수익률은 경기변동에 민감하고 불안정한 경향이 있어 양자 간에 상관관계가 낮을 수밖에 없는 현실때문이었다. 이것은 이후 주식 프리미엄 퍼즐(equity premium puzzle)의 하나로 불리며 많은 연구자들로 하여금 이의 해소를 위한 갖가지 시도를 불러 일으켰으나 역시 시원한 답은 찾지 못하고 있다. 최근에는 Ferson and Harvey(1999,JF)의 도구변수를 이용한 조건부 모형과 Cochrane(1996,JPE)의 실물투자에 기초한 모형들이 개발되었다. Ferson and Harvey는 가격산정함수를 위험 변수(risk factor)와 정보 집합을 대변하는 도구 변수의 함수로 본다. 일반적으로 도구 변수의 도입은 가격산정함수를 구성하는 변수의 수를 늘리게 되어 모델의 설명력을 제고시키는 효과가 있다. 그러나 도구변수의 선정과 관련하여 연구자에게 자의적인 선택의 여지를 제공한다. 한편 Cochrane 모형은 가격산정함수를 실물투자수익률의 함수로 본다. 이 모형은 실물 투자의 개념을 금융자산 가격 결정에 접목시키고 있다. 이외에도 연속시간(continuous time) 모형으로 Merton(1973,EMA)의 ICAPM, Breeden(1979, JFE)의 CCAPM이 있는데 실증검증에 있어서 전자는 상술한 APT와, 후자는 Lucas의 CCAPM과 비슷한 문제를 지닌다. 이상과 같이 시장 이상 현상 및 주식 프리미엄 퍼즐을 해결하기 위해 많은 모형들이 개발되고 다양한 시도들이 이루어지고 있지만 아직 어느 모형이나 혹은 시도도 위 두 가지 수수께끼에 대해 명쾌한 설명은 제공해주지 못하고 있다. 이러한 상황에서 이 문제에 대한 새로운 돌파구가 제시되었는데 Hansen의 두 논문(1991 JPE ; 1997, JF)이 그것이다. Hansen(91)은 기존의 모형들이 계속 기각되는 것에 대해서 새로운 접근법을 제시하였는데 그것은 비유적으로 표현하면 이상 현

상이 일어나는 사건 현장으로 가서 사건의 단서들을 잡아내고 거기서부터 차근차근 다시 시작해 보자는 제안이었다. 즉, 기존의 접근방법이 연역적 사유를 먼저 하고 그 결과로 도출된 모형을 시장 자료를 토대로 검증하는 식이었다면 이제는 반대로 현실적인 시장 자료로부터 균형가격산정함수가 갖추어야 할 요건들을 찾아보고 이를 토대로 이론적 모형의 진단 및 모색을 다시 해 보자는 것이다. 즉, 기초자산의 가격을 시장 가격과 일치시켜주는 균형가격산정함수들은 현실의 비완비시장(incomplete market)하에서 무수히 많이 존재하기 마련인데, 이 중 최소 모먼트 값을 다양한 차수에 대해 구하여, 그 결과를 기존의 이론적 모형의 진단 및 새로운 모형의 개발에 참고하자는 것이다.

그리고 Hansen(1997)은 또 하나의 중요한 방법론을 제시하였는데 그것은 위 논문과 관계는 있지만 그 접근방법은 전혀 상이하다. 즉, 그는 이번에는 모먼트 대신 수익률 공간(return space)에서의 거리(distance) 개념을 사용하여 어떤 이론적 가격산정함수가 기초자산이 의미하는 균형가격산정함수 집합 속에 들어와 있는 지를 직접 검정할 수 있는 방법론을 제시한다. 재무에서는 일반적으로 수익률의 2차 모먼트가 유한한 L^2 공간을 상정하며, 이 공간에서의 타당한 거리 개념으로는 노름(Norm)을 사용한다. 즉, 수익률은 통계학적 정의로는 확률변수인데 확률변수와 확률변수 사이의 거리를 두 확률변수의 차의 제곱의 기대값에 다시 제곱근을 취한 값으로 정의한다. Hansen은 이를 이용하여 기초자산으로부터 도출된 균형가격산정함수(확률변수)의 집합과 가정된 이론적 가격산정함수(확률변수)사이의 최단거리를 찾아낸다. 그리하여 이 거리가 영이면 그것은 이론적 가격산정함수가 기초자산으로부터 도출된 균형가격산정함수 집합 속에 들어와 있음을 의미하는 것이다. Jagannathan and Wang(1996,JF)은 이 최단거리가 영이라는 귀무가설을 세우고 이를 표본추출오차(sampling error)를 고려하여 검정하게 되는데 이것이 Hansen-Jagannathan 최소거리 검정(minimum distance test)이라고 불리는 것이다. 이것이 이론적 모형을 검정하는 주된 방법론이 된 것은 이러한 이론적 정합성 외에도 이 최단거리가 갖고 있는 경제적 의미 때문이다. 즉, 이 최단거리는 한 확률변수와 확률변수 집합사이의 최단거리(직교거리)라는 이론적인 개념인 동시에 그것은 이론적 가격산정함수가 초래할 수 있는 최대 가격 오차란 경제적 개념을 지닌다. 다시 말해, 이 최단거리는 모형이 내포하는 이론적 가격산정함수로 기초자산 및 그들의 포트폴리오를 가격 산정할 때 생길 수 있는 이론가와 실제가의 최대 오차를 의미한다. 보수적인 투자자라면 어떤 이론적 모형을 쓸 때 이러한 수치에 관심이 많을 것이며, 이것을 통해 다양한 모형들 간에 우열의 비교를 해 볼 수도 있을 것이다¹. 이러한 매력으로 인해 Hansen-Jagannathan 최소 거리 검정은 Hansen(1982)의 최적(optimal) GMM 검정에 비해 추정치의 표준편차가 더 큼에도 이론적 모형의 검증 방법으로 애용되고 있다. 그렇다면 Hansen이 제시한 위 두 방법론의 관계는 어떠한가? 이미 앞에서 간헐적으로 설명하였으나 직관적 이해를 돕기 위해 다시 한번 다음과 같은 예를 들어보자. 우리 반에 있는 학생

¹ Hansen-Singleton의 최적(optimal) GMM 검정은 검정통계량 계산시 가격오차에 대한 가중치(weighting matrix) 부여가 모형에 의존하게 되기 때문에 이런 비교가 불가능하다.

개개인을 기초자산의 균형가격산정함수라고 해보자. 언급했듯 기초자산의 불확실성을 규정 짓는 차원의 수에 비해 기초자산의 수가 더 작으면 이 기초자산의 균형가격을 알려주는 가격산정함수는 무수히 많이 존재하게 된다. 그러나 논의의 편의상 기초자산의 균형가격산정함수는 우리 반의 학생들 뿐이라고 하자. 이제 키를 2차 모멘트라고 하고 우리 반에서 키가 가장 작은 사람을 뽑아 그 사람의 키를 우리반의 최소 키라고 하자. 그리고 다시 이번에는 앉은키를 3차 모멘트라고 하고 앉은키가 가장 작은 사람을 뽑아 그 사람의 앉은키를 우리반의 최소 앉은키라고 하자. 그리고 마지막으로 몸무게를 4차 모멘트라고 하고 몸무게가 가장 적게 나가는 사람을 뽑아 그의 몸무게를 우리 반의 최소 몸무게라고 하자. 그 외 가슴둘레 등 모멘트의 차수를 계속 늘려가며 이런 작업을 계속할 수 있겠으나 일단 4차 모멘트까지만 조사한다고 하자. 그리고 이제 어떤 한 이론적 가격산정함수를 한 학생이라고 해보자. 그런데 그 학생이 자신 역시 우리반의 성원 즉, 기초자산의 균형가격산정함수 집합에 속하는 원소라고 주장한다면 이를 어떻게 검증할 수 있을까? 그 첫번째는 이미 구해둔 바 있는 최소 키, 최소 앉은키, 최소 몸무게를 이용하는 것이다. 즉, 이 학생의 키, 앉은키 그리고 몸무게를 조사해서 모두 이 최소값을 넘는 지 살펴 보는 것이다. 그래서 하나라도 넘지 못하면 그것은 이 학생이 우리반의 성원이 아니라는 증거가 되는 것이다. 물론 다 넘는다고 해서 반드시 우리반의 성원이라고 단정 지을 수는 없다. 그 이유는 우리 반 성원의 모든 특징들(확률변수로는 모든 모멘트)을 조사하여 비교해 본 것은 아니기 때문이다. 물론 설사 모든 모멘트를 조사하였고, 이 학생이 이 하한들을 전부 다 초과하였다고 하더라도 결과는 마찬가지이다. 즉, 이것은 우리반 학생들을 대상으로 최소 키, 최소 앉은키, 최소 몸무게 등을 그 학생의 학번(identity)에 상관 없이 뽑은 것으로 아무리 특성의 범주를 늘려나간다 하더라도 그것은 역시 우리 반 성원이기 위한 필요 조건일 뿐이다. 따라서 이 중 하나라도 미달하면 그것은 우리 반 성원이 아니라는 확실한 증거가 되지만 다 통과 한다 하더라도 우리 반 성원이라고 단정 지을 수는 없다. 그러나 이러한 방법론은 우리 반 학생(기초자산의 균형가격산정함수)이 되기 위해서 갖추어야 할 우리 반 성원의 필요조건적인 특성에 대한 정보를 제공한다. 이에 반해 Hansen(1997)은 확률변수사이의 해석학적 거리 개념을 도입하여 우리반의 성원이라는 것을 충분조건으로 검증할 수 있는 방법론을 제시한다. 그러나 이 방법은 Hansen(1991)과 달리 모형을 기각 시켰을 경우 왜 그것을 기각 시켰는지 그 원인에 대한 진단은 해주지 않는다. 이렇듯 두 방법론은 상호 보완적이며, 이러한 맥락에서 본 연구의 방향은 다음과 같다. 첫째, 기초자산이 암시하는 모멘트 하한을 고차 모멘트²까지 도출해 봄으로써 가격결정함수가 갖추어야 할 모멘트 측면의 특징을 발견한다. 둘째, 이 하한을 진단 도구로 삼아 위에 제시한 지금까지 개발된 이론적 모형들을 진단해 보고 그 결과를 Hansen-Jagannathan 최소 거리 검정 결과와 비교한다. 보다 구체적으로, 경제적 의미가 해석되는 2차에서 4차 모멘트까지 그 하한을 구해서 이를 이론적 가격산정함수의 모멘트

² Hansen(1992)은 2차 모멘트 하한을 도출하였고 이것이 알려진 Hansen-Jagannathan bound이다. 본 연구는 이를 Snow(1991, JF)를 참고하여 9차 모멘트까지 확장한다.

값과 비교, 진단 해보고 그 결과를 종합적인 검정통계량으로 연결시킨다. 이때, 이 검증통계량의 귀무가설은 이론적 가격산정함수의 모멘트가 기초자산이 암시하는 2차에서 4차까지의 모멘트 하한을 모두 상회한다는 것이다. 그리고 이 검증 결과를 보다 정확한 검사인 Hansen-Jagannathan 최소 거리 검증 결과와 비교해 봄으로써 상술한 Hansen의 두 관념적 사유가 일치성 및 논리적 일관성을 보이는지 고찰한다. 마지막으로 Hansen- Singleton(1982,EMA)의 최적 GMM 검증을 추가하여 상술한 3가지 검증의 power를 비교한다. 셋째, 적당한 유의수준(1%)에서 Hansen-Jagannathan 거리 검정을 통과한 모형만을 대상으로 해당 추정치들의 경제적 의미를 분석한다. 넷째, 세번째와 관련하여 모멘트를 이용한 이론적 가격 함수의 진단 및 검정은 기본적으로 다변량 부동산 제약을 검증하는 것이며, Wolak(1987,JASA)은 정규성(stationary) 가정 하에서 이를 검증할 수 있는 방법론을 제시하였다. 그의 방법론이 본 연구에 어떻게 응용될 수 있는지, 그리고 실제 검정통계량 및 p-value의 값은 차수별 모멘트 격차들과 어떤 관계를 보이는 지, 기타 이 검증과 관련된 계량경제학적 이슈에 대해서 살펴본다. 이하 본 논문의 구성은 다음과 같다. 2절에서는 기초자산이 암시하는 균형가격산정함수 집합에서 모멘트 하한을 어떻게 뽑아내는지, 그리고 이를 이용한 이론적 가격산정함수의 진단은 다변량 부동산 제약일 진데 이를 어떻게 하나의 검정통계량으로 연결시키는지 그 방법론을 설명한다. 그리고 이 모멘트 검정의 준거 검정으로서 Hansen- Singleton의 optimal GMM 검정과 Hansen-Jagannathan의 최소거리 검정이 어떻게 도출되는 지 설명한다. 그리고 연구를 위해 선정한 이론적 모형들인 NULL, CAPM, FF3, CCAPM, 그리고 Cochrane의 모형에 대해서 설명한다. 3절은 기초자산으로 사용한 Fama and French 25 포트폴리오와 미국 재무성 채권(Treasury bill), 이론적 모형들에 사용된 자료, 기타 사용된 자료들에 대해 설명한다. 그리고 2절에 제시한 방법론들이 본 연구에 실제로 어떻게 적용되는 지 그 구체적 추정방법을 설명한다. 4절은 진단 및 검증 결과를 제시하고 이의 경제적 의미를 분석한다. 5절은 결론이다.

2. 모형의 설계

이하에서는 균형 가격산정함수 집합에서 최소 모멘트 값을 어떻게 도출할 지 그리고 이것을 이용하여 이론적 가격산정함수를 진단하고 이를 표본 추출 오차(sampling error)를 고려한 검정통계량으로 연결시키는 방법에 대해 설명한다. 그리고 이의 준거 검정으로서 Hansen and singleton(1982,EMA)의 optimal GMM 검정과 Hansen and Jagannathan(1997,JF; 1996,JF)의 최소 거리 검정(minimum distance test)에 대해서 설명한다.

2.1 근본적 자산 평가 원칙(Fundamental Valuation Theorem)

재무적 자산 가치 평가의 원칙은 미래현금흐름의 현재가치이다. 즉 어떤 자산에서 예상되는 미래현금흐름을 그 현금흐름의 불확실성을 고려한 적당한 할인율로 할인한 현재가치의 합계로서 static(two period) 모형에서는 다음과 같이 표현된다.

$$P_t = \frac{E[P_{t+1}]}{1 + IRR} \quad (1)$$

여기서 IRR은 시장가격과 자산의 미래현금흐름의 기대값이 주어진 상태에서 역산되므로 이 식은 항등식을 의미하며, 이것은 시장가격이 암시하는 자산의 연평균 기대수익률이다. 그렇다면 이제 반대로 자산 가격을 시장가격을 모르는 상태에서 이론적으로 결정하려면 어떻게 해야 할까? 위 식에서 보듯이 두 가지를 알아야 하는데 하나는 미래현금흐름의 분포이고 그리고 또 하나는 미래 현금흐름의 분포의 불확실성이 시장에 의해 적절히 평가된 위험 프리미엄(risk premium)이 포함된 기대수익률(할인율)이다. 결국 어떤 자산의 미래 현금 흐름의 기대값이 주어진 상태에서, 이것의 불확실성이 시장에 의해서 적절히 평가된 균형 기대수익률만 알면 시장 균형가격과 똑같은 가격을 이론적으로 얻어낼 수 있다. 문제는 이 시장 균형 기대수익률을 어떻게 이론적으로 규명할 수 있는느냐이다. 재무 이론의 지금까지의 역사는 이것을 규명하는 것이었다. 다음의 근본 정리가 이에 대한 실마리를 제공한다.

$$\begin{aligned} P_t &= \pi^d(\tilde{P}_{t+1}) = E[\tilde{P}_{t+1} \cdot \tilde{d}_{t+1}] \\ \Leftrightarrow 1 &= \pi^d(\tilde{R}_{t+1}) = E[\tilde{R}_{t+1} \cdot \tilde{d}_{t+1}] \end{aligned} \quad (2)$$

이것은 해석학의 rietz representation theorem을 재무에 적용시킨 것으로 무차익거래원칙(no arbitrage principle)이 잘 지켜지는 시장에서는 반드시 성립하는 정리이다. 그리고 Harrison and Kreps(1979, JET)는 무차익거래 가격이 곧 시장 균형 가격임을 보인 바 있다. 따라서 기초자산의 시장 균형가격과 이 정리를 이용하여 연립방정식 체계를 구축하고 이를 풀어 도출되는 균형가격산정함수 d(stochastic discount factor)는 기초자산 및 그들의 포트폴리오의 시장 균형 가격을 위 등식에 의거 알려준다. 그러나 현실의 비완비시장(incomplete market)하에서 이 연립방정식 체계는 under-identified system이 되어 이의 해는 무수히 많이 존재하게 된다. 보다 구체적으로, 이 연립방정식 체계의 등식의 개수는 기초자산의 수(N)인 반면 풀어야 할 미지수인 d 벡터의 차원은 샘플기간(T)이 되어 등식을 모두 만족하는 d 벡터의 해집합(균형가격산정함수 집합)은 무한집합이 된다³. 이제 이 가격산정함수 집합을 이용해서 균형기대수익률을 도출하는 식은 다음과 같다. 위 (2)식을 다시 쓰면,

³ 물론 이것은 two period 소비 모형을 전제로 할 때의 얘기이다. 실제 다기간 혹은 연속시간 모형에서는 포트폴리오를 재구축(rebalancing)할 수 있기 때문에 시장을 완비시키기 위해 필요한 자산의 수가 가격 경로 상의 최대 분기 수, 혹은 brownian motion의 수가 된다.

$$1 = E[\tilde{R}_{t+1} \cdot \tilde{d}_{t+1}] = \text{cov}(\tilde{R}_{t+1} \cdot \tilde{d}_{t+1}) + E[\tilde{R}_{t+1}] \cdot E[\tilde{d}_{t+1}]$$

$$\therefore E^d[\tilde{R}_{t+1}] = \frac{1}{E[\tilde{d}_{t+1}]} \cdot (1 - \text{cov}(\tilde{R}_{t+1} \cdot \tilde{d}_{t+1})) = (1 + r_f) \cdot (1 - \text{cov}(\tilde{R}_{t+1} \cdot \tilde{d}_{t+1})) \quad (3)$$

위 식 후반부는 기초자산에 무위험 자산이 포함되어 있다면 무위험 자산 역시 가격 산정할 수 있어야 하므로 가격산정함수의 기대값은 곧 무위험자산의 가격이 됨을 의미한다. 결국 이 식으로부터 우리는 균형가격산정함수만 알 수 있으면 보다 정확하게는 균형가격산정함수와 해당 자산간의 공분산만 알 수 있으면 해당 자산에 대한 균형 기대 수익률을 알 수 있게 되고, 주어진 미래 현금흐름의 분포를 통해 절대 균형가격도 구해낼 수 있다. 그리고 이것은 시장이 효율적인 한 실제 시장가격과 정확히 일치할 것이다⁴.

2.2 모먼트 하한(the greatest lower bound of moments)의 도출

균형가격산정함수 집합은 기초자산으로부터 무차익거래 원칙에 의거 연립방정식 체계를 구축하고 이를 만족하는 해집합을 구한 것으로 우리에게 기초자산 및 그들의 포트폴리오의 시장 균형 상대가격 즉 시장 균형 기대수익률에 대한 정보를 알려준다. 그렇다면 이 집합의 특성을 규명해보는 것은 의미 있는 작업일 수 있으며, Hansen(1992)은 이 중 2차 모먼트의 최소값을 찾아내는 방법을 개발하였고, Snow(1991)는 모든 모먼트에 대해서 그것을 일반적으로 찾아내는 방법을 개발하였다. 따라서 여기서는 Snow의 방법론에 대해 설명한다. 먼저 비완비시장하에서 식 (2)는 다음과 같이 표현된다.

$$1 = E[d \cdot R_p], \quad d \in D = \{d \mid 1 = E[d \cdot R_i], \quad i = 1, 2, \dots, N\}, \quad R_p \in \text{Span}(N) \quad (4)$$

이제 이 식에 Hölder 부등식을 적용하면,

$$1 = E[d \cdot R_p] \leq E[|d \cdot R_p|] \leq \|d\|_\alpha \cdot \|R_p\|_\beta = (E[d^\alpha])^{1/\alpha} \cdot (E[R_p^\beta])^{1/\beta}$$

$$(E[d^\alpha])^{1/\alpha} \geq 1 / (E[R_p^\beta])^{1/\beta} \quad (5)$$

$$(E[d^\alpha]) \geq \left(1 / (E[R_p^\beta])^{1/\beta} \right)^\alpha, \text{ where } \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$$

(5)의 부등식은 균형가격산정함수 집합(D)의 모든 원소에 대해 그리고 기초자산으로 구성된 모든 포트폴리오에 대해 성립해야 하므로 다음의 등식이 성립한다.

$$\text{Inf}_{d \in D} (E[d^\alpha]) = \text{Sup}_{w \text{ s.t. } w'1=1} \left(1 / (E[(w' R_i)^\beta])^{1/\beta} \right) \quad (6)$$

이제 이 등식을 통해 균형가격산정함수 집합(D)의 모먼트 최소값을 찾는 추상적인 문제가 β 노름(norm)이 최소가 되는 포트폴리오를 찾는 구체적(feasible) 문제로 전환된다.

⁴ 그렇지 않을 경우 그것은 차익거래기회가 존재함을 의미한다. 물론 거래 비용등 시장마찰요인은 없다고 가정한다.

2.3 모멘트 하한을 통한 이론적 가격 산정함수의 진단 및 검정

Snow가 제시한 방법론을 이용하면 다양한 무위험자산의 가격(가격산정함수의 기대값)에 따라 모멘트 하한을 도출할 수 있다. 무위험자산의 가격을 하나로 고정시키지 않는 것은 실질이자율을 정확히 알 수 없기 때문이다. 즉, 실질이자율은 명목이자율에서 시장 기대인플레이션율을 뺀 것인데 후자는 시장의 기대치로써 이를 정확히 추정하기는 어렵다. 따라서 이하에서는 실질이자율에 적당한 범위(buffer)를 주고 각 이자율(가격산정함수의 기대값)마다 모멘트 하한을 도출하게 된다. 이렇게 구한 각 차수의 하한들은 상술했듯 모든 이론적 모형이 내포하는 가격산정함수의 진단에 사용될 수 있다. 그러나 실제의 진단은 모두 샘플을 이용하여 이루어지고 다변량 부등식 제약(진단)이 되기 때문에 이를 고려하여 하나의 검정통계량으로 표현할 필요가 있다. Wolak(1987,JASA)이 이에 대한 방법론을 제시한다. 우선 어떤 이론적 가격산정함수를 y 라 하자. 그리고 위의 방법을 이용하여 도출한 모멘트 하한을 보고 이 이론적 가격산정함수의 기대값에 상응하는 하한을 찾아서 이를 d^{*k} 라 하자. 여기서 k 는 모멘트의 차수를 의미한다. 그리고 이론적 가격 산정함수(y)에서 상응하는 모멘트 하한(d^{*k})을 뺀 확률변수를 다음과 같이 $\tilde{\theta}$ 로 정의하자.

$$\tilde{\theta} = \begin{pmatrix} \tilde{\theta}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\theta}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{y}_t^2 - d_t^{*2} \\ \vdots \\ \tilde{y}_t^{p+1} - d_t^{*p+1} \end{pmatrix} \quad (7)$$

그렇다면 이의 기대값(모수)과 이의 표본유사(sample analogue)는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E[\tilde{y}_t^2 - d_t^{*2}] \\ \vdots \\ E[\tilde{y}_t^{p+1} - d_t^{*p+1}] \end{pmatrix}, \quad \bar{\theta} = \begin{pmatrix} \left(\sum_{t=1}^T \theta_1(t) \right) / T \\ \left(\sum_{t=1}^T \theta_2(t) \right) / T \\ \vdots \\ \left(\sum_{t=1}^T \theta_p(t) \right) / T \end{pmatrix} \quad (8)$$

이제 샘플평균($\bar{\theta}$)이 대수적으로 다변량 정규분포를 따른다는 가정 하에 Wolak이 제시한 검정 통계량은 다음과 같다.

$$\bar{\theta} \stackrel{asym}{\sim} MVN(\theta, \Omega) \Rightarrow W = \underset{\theta}{Min} (\bar{\theta} - \theta)' \Omega^{-1} (\bar{\theta} - \theta) \quad (9)$$

$s.t. H_0 : \theta \geq 0$

여기서 Ω 는 샘플평균($\bar{\theta}$)의 분산으로서 Newey-West방법으로 추정되며, 귀무가설 ($\theta \geq 0$)은 이론적 가격산정함수의 각각의 모멘트($E[\tilde{y}^k]$)가 모두 상응하는 최소 하한(d^{*k})을 넘는

다는 것이다. 그리고 검정통계량의 귀무가설 분포(null distribution)는 χ^2 분포의 가중 평균이 되는데, 이는 다음과 같은 몬테칼로 시뮬레이션 방법을 통해 구할 수 있다.

$$\Pr(W \geq c) = \sum_{k=0}^p (\Pr[\chi_k^2 \geq c] \cdot w(p, p-k, \Omega))$$

or

$$\Pr(W \geq c) = \sum_{k=1}^p (\Pr[\chi_k^2 \geq c] \cdot w(p, p-k, \Omega)) \quad (\text{for } c > 0)$$

$$\Pr(W = 0) = w(p, p, \Omega) \quad (\text{for } c = 0)$$
(10)

여기에서 $c (\in R^+)$ 는 주어진 유의수준에 상응하는 임계점(critical value)이고, $\chi_{k=0}^2$ 은 원점의 미세근방에서만 1의 확률을 갖는 point mass이다. 식(10)의 가중치(w) 역시 몬테칼로 시뮬레이션 방법을 이용하여 구할 수 있는데, 식(11)에서 보듯이 θ^* 를 다변량 정규 분포로부터 계속 생성해가며 $\tilde{\theta}$ 의 해집합을 충분히 축적해둔 후, 이 중 $(p-k)$ 개의 양수가 나온 횟수를 총 시행횟수로 나눈 값이 자유도 k 의 χ^2 분포에 걸리는 가중치($w(p, p-k, \Omega)$)이다.⁵

$$\begin{aligned} & \underset{\tilde{\theta}}{\text{Min}} (\theta^* - \tilde{\theta})' \cdot \Omega^{-1} \cdot (\theta^* - \tilde{\theta}) \\ & \text{subject to } \tilde{\theta} \geq 0 \\ & \theta^* \sim MVN(0, \Omega) \end{aligned}$$
(11)

그러나 시뮬레이션 방법에 의해 귀무가설 분포를 도출하는 것은 수치해석의 한계로 인해 진정한 분포와 괴리될 수 있다. 특히 정확한 w 의 계산은 그 자체만으로도 이 검정과 관련하여 중요한 계량경제학적 이슈이다. 이에 대해 Kodde and Palm(1986,EMA)은 Perlman(1969,AMS)을 응용하여 w 의 계산을 요구하지 않으면서도 적당한 유의수준 하에서 부등식 제약을 검증할 수 있는 표를 개발하였다.⁶ 이 표에 있는 임계값(c)들은 모두 표에 주어진 유의수준(α)과 자유도(df)하에서 다음의 등식을 푼 해들이다.

$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot \Pr[\chi^2(df-1) \geq c] + \frac{1}{2} \cdot \Pr[\chi^2(df) \geq c]$$
(12)

이 표를 이용하는 방법은, 일단 이 표에서 제시된 유의수준(α)중 임의의 하나를 선정하고 다음 두 등식을 만족시키는 C_l 과 C_u 를 표를 이용하여 찾는다.⁷

$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot \Pr[\chi^2(0) \geq c_l] + \frac{1}{2} \cdot \Pr[\chi^2(1) \geq c_l]$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot \Pr[\chi^2(p-1) \geq c_u] + \frac{1}{2} \cdot \Pr[\chi^2(p) \geq c_u]$$
(13)

⁵ 한편 Wolak(1987, JASA)은 $p=4$ 까지 가중치의 해석해를 제공하고 있다. 두 방법 다 적용해 본 결과 그 차이는 무시할만한(negligible) 수준이며 본 연구는 해석해를 이용한다.

⁶ 본 논문의 <APPENDIX>에 필요한 부분만 발췌하여 수록하였다.

⁷ 실제 Wolak의 검증은 보다 일반적인 등식 및 부등식 제약이 혼재할 경우의 검증이다. 그러나 여기서 등식 제약의 수(q)를 0으로 놓으면 식(13)이 도출된다.

여기서 p 는 부등식 제약의 수이며 $\chi^2(0)$ 는 원점의 미세근방에서 확률 1을 갖는 point mass 이다. 좀 더 쉽게 설명하면 표에서 자유도(df) 기준으로 1행은 고정시키고, 부등식 제약의 수(p)에 해당하는 행을 찾아 상정한 유의수준(α)에 해당하는 C_1 과 C_u 를 찾으면 된다. 그리하여 계산된 검정통계량(W)이 C_1 보다 작으면 귀무가설을 기각시키지 못하고, C_u 보다 크면 귀무가설을 기각시키는 결정을 유의수준(α)로 내린다. 그러나 만약 검정통계량(W)이 이 사이에 들어올 경우에는 현재의 유의수준으로는 통계적 판단을 유보하고, 표에 주어진 다른 유의수준(α)으로 옮겨가며 통계적 판단이 가능한 경우를 찾으면 된다. Kodde and Palm의 표는 다변량 부등식 제약의 검증 시 그 자체만으로도 좋은 판단 자료이며, 위 몬테칼로 시뮬레이션에 의해 귀무가설 분포를 직접 도출할 경우 이의 좋은 준거 분포 자료로 사용될 수 있을 것이다.

2.4 Hansen–Singleton의 Optimal GMM 검정

Hansen(1982)은 전통적인 회귀분석(ordinary least square) 방법론과는 달리 모먼트 성질을 이용하는 새로운 검정 방식을 제시하였다. 이는 이론으로부터 만족하여야 할 모먼트 등식을 귀무가설로 설정하고 이것이 모수로부터 벗어나는 정도를 표본 유사(sample analogue)로 측정하여 가설을 검증하는 방식이다. GMM의 매력은 모먼트 등식의 도출이 MM(method of moment)과 달리 일반적으로 도출될 수 있다는 것과, 기존의 OLS나 MLE(Maximum Likelihood estimation)와 달리, 분포의 가정을 요구하지 않는다는 것이다. 본 연구의 근본적 자산평가원칙 역시 재무 이론으로부터 나온 일반적인 모먼트 등식이며, 이 등식을 검증함에 있어서 어떠한 분포의 가정도 필요하지 않다. 그럼에도 GMM 추정량은 대수적으로 정규분포로 가고, MLE만큼의 효율성(efficiency)이 있음이 알려져 있다⁸. 우선 이론적인 metric을 구하면,

$$\underset{\theta}{\text{Min}} E[m(\theta)]' \cdot V_m^{-1} \cdot E[m(\theta)] \quad (14)$$

그리고 이에 대한 표본유사(sample analogue)를 구하면,

$$J = \underset{\theta}{\text{Min}} \bar{m}(\theta)' \cdot \text{Var}(\bar{m}(\theta))^{-1} \cdot \bar{m}(\theta) \quad (15)$$

여기서 표본평균의 분산 ($\text{Var}(\bar{m}(\theta))$)에 대한 일치추정량은 Newey–West 방법으로 구한다. 여기서 추정량 θ 는 표본평균 ($\bar{m}(\theta)$)과 가중치행렬 ($\text{Var}(\bar{m}(\theta))^{-1}$) 양쪽 다에 걸쳐있으므로, 서로 변갈아가면서 수렴할 때까지 최적화를 반복하게 된다. 이렇게 하여 나온 추정량 $\hat{\theta}$ 은 대수적으로 다음과 같은 분포를 따름이 알려져 있다.

$$\sqrt{T} \cdot (\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{\text{asym}} MVN(0, T \cdot \Omega)$$

$$(\text{consistent}) \hat{\Omega} = \left[\left(\frac{\partial \bar{m}(\hat{\theta}_k)}{\partial \hat{\theta}_k'} \right)' \cdot \hat{V}_m(\hat{\theta})^{-1} \cdot \left(\frac{\partial \bar{m}(\hat{\theta}_k)}{\partial \hat{\theta}_k'} \right) \right]^{-1} \quad (16)$$

마지막으로 모든 모먼트 요건이 만족된다는 귀무가설($H_0 : E[m(\theta)] = 0$)하에 검정통계량은 다

⁸ 그러나 GMM의 유한 표본 성질(finite sample property)은 유의수준(size)이나 감별력(power)에 있어서 모수(true value)와 괴리가 심함이 알려져 있다.

음과 같다.

$$J(\hat{\theta}_G) = \bar{m}(\hat{\theta}_G)' \cdot \hat{V}_m(\hat{\theta}_G)^{-1} \cdot \bar{m}(\hat{\theta}_G) \stackrel{con}{\sim} \chi^2(p) \quad (17)$$

여기서 p 는 제약식의 개수(모멘트 등식의 개수)이다.

2.5 Hansen–Jagannathan(H–J) 최소거리 검정(minimum distance test)

Hansen(1992)은 어떤 수익률(확률변수)이 수익률 집합 속에 들어와 있는지를 해석학적 거리 개념을 이용하여 검증할 수 있는 방법론을 제시한다. 그것은 상술한 최적 GMM에서 가중치 행렬을 기초자산 수익률의 비중심 공분산행렬(non-centralized covariance matrix)의 역행렬로 고정시킨 후 최적화를 한 번만 한 것이다. 구체적으로 설명하면 다음과 같다. 우선 이론적인 metric은 다음과 같이 표현된다.

$$\underset{\theta}{Min} E[m(\theta)]' \cdot V_m^{-1} \cdot E[m(\theta)] \quad (18)$$

여기서 V_m^{-1} 는 $E[m(\theta)]$ 에 주어지는 가중치 행렬(weighting matrix)로써 기초자산 수익률의 비중심 공분산 행렬의 역행렬이다. 따라서 식(18)에 대한 표본유사(sample analogue)는,

$$HJ(\theta) = \delta^2(\theta) = \underset{\theta}{Min} \bar{m}(\theta)' \cdot E[RR']^{-1} \cdot \bar{m}(\theta) \quad (19)$$

여기서 θ 는 가중치 행렬이 고정된 상태에서 표본평균($\bar{m}(\theta)$)에만 걸려있으므로 최적 GMM과 달리 한 번만 최적화가 이루어진다. 이렇게 하여 도출된 추정량 $\hat{\theta}$ 은 그 표준편차가 MLE의 그것에는 못 미치나, 대수적으로 다음과 같은 분포를 따름이 알려져 있다.

$$\sqrt{T} \cdot (\hat{\theta} - \theta) \stackrel{asym}{\rightarrow} MVN(0, T \cdot Var(\hat{\theta})^{-1}) \quad (20)$$

마지막으로 모든 모멘트 요건이 만족된다는 가정($H_0 : E[m(\theta)] = 0$)하에 H-J 검증통계량은 다음과 같다.

$$T \cdot HJ(\hat{\theta}_{HJ}) = T \cdot (\bar{m}(\hat{\theta}_{HJ})' \cdot E[RR']^{-1} \cdot \bar{m}(\hat{\theta}_{HJ})) \stackrel{con}{\sim} \sum_{j=1}^{p-k} \gamma_j \cdot \chi^2(1) \quad (21)$$

여기서 p 는 제약식의 개수, k 는 추정량(θ)의 차원이다.⁹

2.6 이론적 자산 평가 모형

본 연구의 검증을 위해서 선정한 이론적 모형은 월별 수익률 기준으로 3개, 분기별 수익률 기준으로는 6개이다. 월별수익률 기준으로는 NULL, CAPM, FF3 factor를 사용하고, 분기별 수익률 기준으로는 위 모형 외에 CCAPM, Cochrane의 모형을 추가한다. 검증 방법은 이들이 내포하는 가격산정함수를 선형 함수로 바꾼 후 상술한 세 가지 검증을 실시한다. 검증을 위한 각 모

⁹ 추정량의 공분산 행렬인 $Var(\hat{\theta})$ 과 귀무가설 분포의 가중치인 γ_j 에 대해서는 3절의 구체적 추정 방법에서 설명한다. 이것에 대해 알기 위해서는 모멘트 제약($H_0 : E[m(\theta)] = 0$)에 대한 구체적 내용이 전제되어야 하기 때문이다.

형의 가격산정함수를 구체적으로 살펴보면 다음과 같다.

2.6.1 비조건부 모형(unconditional model)

Null model은 상수항(one vector)만 있는 모형이다. CAPM의 가격산정함수는 상수항(C)과 시장 포트폴리오의 초과수익률(R_{vw})의 선형함수이다. FF 3 factor 모형의 가격산정함수는 상수항(C)과 시장포트폴리오의 초과수익률(R_{vw}), size 포트폴리오의 수익률(SMB), book-to-market 포트폴리오의 수익률(HML)로 구성된다. 여기서 SMB와 HML은 NYSE, AMEX, NASDAQ상의 주식을 매년 말 size와 book-to-market ratio 기준으로 정렬하여 각각 두개의 그룹(small, big) 및 3개의 그룹(high, medium, low)으로 나눈 후, (small-big) 포트폴리오 및 (high-low) 포트폴리오의 buy and strategy 수익률을 관측하고, 이를 반복하는 식으로 시계열 자료를 구축한 것이다. 이것은 시장 이상현상을 역이용하는 포트폴리오 전략으로서 book-to market effect와 size effect와 관련된 위험의 시장가격을 알려준다. CCAPM의 경우 원칙적인 가격산정함수는 $\beta \cdot u'(c_{t+1})/u'(c_t)$ 로써 대표적 개인(the agent of representative economy)의 소비의 시점간 대체율(IMRS ; Inter-temporal marginal rate of substitution)과 주관적 할인율(subjective discount rate)의 곱이다. 따라서 구체적인 효용함수가 주어져야 이의 구체적 형태를 알 수 있으며, 재무에서 즐겨 쓰는 HARA 계열의 대표적 효용함수인 power utility function($u(c_t) = (c_t^{1-\gamma} - 1)/(1-\gamma)$)을 사용할 경우 CCAPM의 가격산정함수는 다음과 같이 표현된다.

$$\beta \cdot (\tilde{c}_{t+1} / c_t)^{-\gamma} = \beta \cdot \tilde{g}_{t+1}^{-\gamma} \quad (22)$$

즉, 가격산정함수는 소비성장률(\tilde{g}_{t+1})의 비선형 함수 꼴로 표현된다. 본 연구는 식 (22) 대신 상수항(C)과 비내구재 소비의 성장률(CG)의 선형함수를 가격산정함수로 사용한다. 따라서 원칙적인 CCAPM이 아닌 이의 선형함수 꼴(linearized CCAPM)을 검증하는 것이다. Cochrane(1996)은 실물 생산 부문의 투자 수익률이 자산 가치 결정에 영향을 끼친다는 가설 하에 실물 투자 수익률을 위험요소(risk factor)로 하는 비선형 함수 모형을 개발한다. 본 연구는 linearized CCAPM의 경우와 마찬가지로 이에서 위험요소만 추출하여 선형 가격산정함수를 구축한다. 즉, 상수항(C)과 실물투자수익률의 대용 지표로써 실물투자 성장률 자료인, 비주택 투자의 성장률(GNR)과 주택투자의 성장률(GR)을 사용한다.

2.6.2 조건부 모형(conditional model)

식 (2)의 근본적 자산 평가 원칙은 상당히 제약적인 가정이 들어가 있다. 즉, 자산 평가를 하는 그 시점의 정보집합의 역할을 전혀 고려하지 않는다. 따라서 이를 고려하는 보다 일반적인 자산평가원칙은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} P_t &= E[\tilde{P}_{t+1} \cdot \tilde{d}(t+1) | \Omega_t] \\ \Leftrightarrow 1 &= E[\tilde{R}_{t+1} \cdot \tilde{d}(t+1) | \Omega_t] \end{aligned} \quad (23)$$

이 식이 의미하는 바는 현재 시점의 정보를 최대한 활용하여 어떤 자산의 가치를 평가한다는 것이며 이는 현실의 모습과 일치한다. 따라서 현실의 정보집합(Ω_t)을 온전히 대표하는

도구변수를 Z_t 라 하면 식(23)이 맞다면 다음의 따름정리(corollary) 역시 성립한다.

$$E[(\tilde{R}_{t+1} \cdot \tilde{d}(t+1|t) - 1) \cdot \tilde{Z}_t] = 0 \quad (24)$$

즉, 자산 평가가 현재의 정보집합을 최대한 효율적으로 활용하여 이루어진다면, 가격 오차(pricing error)는 현재의 정보집합을 대표하는 도구변수와는 독립이어야 한다.¹⁰ 이것이 H-S 및 H-J 검증시 사용되는 정보 집합까지 고려한 모멘트 요건으로서 식(24)를 다시 쓰면,

$$E[(\tilde{R}_{t+1} \tilde{Z}_t) \cdot \tilde{d}(t+1|t) - \tilde{Z}_t] = 0 \quad (25)$$

여기서 도구변수 \tilde{Z}_t 는 상수항(one vector)과 가변도구변수로 정의된 \tilde{I}_t vector(matrix)로 구성된다. 이 식이 의미하는 바는 가격산정함수($\tilde{d}(t+1|t)$)는 기초자산(\tilde{R}_{t+1})을 잘 평가하여야 할 뿐만 아니라, 이를 가변도구변수(\tilde{I}_t)로 스케일 조정한 포트폴리오¹¹의 수익률($\tilde{R}_{t+1} \tilde{I}_t$) 역시 잘 평가하여야 한다는 것이다. 그리고 이때 전자의 균형 가격은 one vector이고, 후자의 균형 가격은 가변도구변수의 비조건부 기대값($E[\tilde{I}_t]$)이 된다. 그렇다면 이 가격산정함수($\tilde{d}(t+1|t)$)를 어떻게 구축하면 이 모멘트 요건들을 모두 만족시킬 수 있을까? 이에 대해 Ferson and Harvey(1991)는 가변도구변수를 가격산정함수에도 도입하자는 아이디어를 제시하였다. 즉, 식(25)의 가격산정함수($\tilde{d}(t+1|t)$)가 의미하는 바는 t시점에서 바라 본 t+1시점의 가격산정함수로서 조건부 확률변수이다. 따라서 t시점의 정보집합이 어떻게든 그 다음 시점의 가격산정함수(stochastic discount factor) 결정에 영향을 줄 것이다. 그 결과 가격산정함수는 위험요소($\tilde{f}(t+1|t)$)와 가변도구변수(\tilde{I}_t)의 함수로 나타날 것이다. 본 연구는 이러한 논리에 따라 조건부 모형을 구축하며, 함수 꼴은 선형 함수를 가정한다. 즉, 위 비조건부 모형(가격산정함수)의 모든 위험 요소들을 상정한 각 도구변수로 스케일 조정하여 조건부 모형(가격산정함수)을 구축한다. 구체적으로, 그림 2는 본 연구에서 도구변수로 선정한 산업생산지수(IP)와 실질 국민총생산(real GNP), 그리고 Ludvigson의 web-site에서 가져온 1인당 총자산 대비 총소비 지출액 비중(CAY)에 대한 샘플기간동안의 시계열자료를 보여주고 있다.¹² 산업생산지수와 국민총생산 시계열 자료는 trend component를 함유하므로, 이를 제거 시키고 cyclical component만 나타내기 위해 Hodrick and Prescott(1997)의 filtering 방법을 사용한다.¹³ 그 결과 그림에서 보듯이 산업생산지수와 실질 GNP 지수는 비슷한 시계열 패턴을 보인다. 반면, CAY 지수는 국민 개개인의 총자산 대비 총소비 비중의 평균적인 시계열 변화를 의미하는데, 일종의 소비 성향 개념으로 분모를 소득 대신 개인의 총자산으로 놓고 이에 대한 총소비 비중의 평균적인 시계열 변화를 본 것이다. 이것은 위 지표들과 달리 나름대로 독자적인 패턴을 보인다. 이상과 같은 도구변수를 이용하여 비조건부 모형의 가격산정함수식에 나오는 위험 요소들을 모두 스케일 시킨다. 예를 들어 조건부

¹⁰ 정확하게는 독립보다는 약한 요건인 내적이 0 즉, 상관계수가 0이지만 하면 된다.

¹¹ 이를 managed portfolio라고 한다.

¹² 이 외에 1월 효과(January effect)를 알려주는 더미 변수가 도구변수(조건부변수)로 추가된다.

¹³ 옵션으로 들어가는 평활계수(smoothing parameter)는 Hodrick and Zhang을 참고하여 산업생산지수의 경우 6400, GNP의 경우 1600을 주었다.

CAPM은 상수항(one vector), 시장포트폴리오의 초과수익률항, 그리고 도구변수와 이들을 교차시킨 교차항($f_{t+1} \cdot I_t$)으로 조건부 가격산정함수를 구성한다. 따라서 조건부 가격산정함수의 설명 변수의 수는 비조건부 가격산정함수의 그것의 2배가 된다. 도구변수를 하나만 교차시키는 것은 해당 도구변수가 정보집합의 충분한 도구변수라는 암묵적인 가정을 하는 것이다. 따라서 이 조건부변수(도구변수)들 중에서 어느 것이 비조건부 모형과 결합하여 기초자산에 대한 가격 오차를 가장 줄여주는 지 살펴본다. 한편 표2는 조건부 변수로 선정된 위 도구 변수들의 정보 예측력을 보여 준다. 도구 변수가 정보 집합의 대표 변수로 선정되려면 그것이 미래 자산수익률에 대해 어느 정도 예측력을 보여야 할 것이다. 표 2를 보면 독립 변수를 해당 도구변수로, 종속변수를 한 기 후의 시장 지수 수익률로 놓고 회귀 분석을 실시한 결과가 제시되어 있다. 모든 계수가 적당한 유의수준에서 유의함을 알 수 있다. 그러나 설명력(R^2)은 IP와 GNP의 경우 그렇게 높아 보이지는 않으며, CAY의 경우는 10% 정도의 설명력을 보인다.

3. 자료 및 구체적 추정방법

기초자산으로는 Fama and French 25 포트폴리오와 미국 1개월 만기 재무성 채권을 사용하였으며 전자는 French의 web site를 참고하였고 후자는 CRSP를 이용하였다. 그 외 모형에 위험요소(risk factor)로 사용된 거시 경제 변수들은 Global Insight를 이용하였다. 진단 및 검증이 월별 기준과 분기별 기준 둘로 나누어 이루어지기 때문에 수익률(증가율) 자료 역시 둘로 나누어 추출되었다. 자료의 기간(sample period)은 1952년부터 1997년까지이다.

3.1 기초자산

Fama and French 25 포트폴리오는 NYSE, AMEX, NASDAQ에 상장된 모든 주식을 사이즈 기준과 자기자본의 장부가치 대비 시장가치 기준으로 5행 5열 포트폴리오를 구축한 후 그것을 매년 동일 기준으로 다시 짜면서 buy and hold strategy를 구사할 때의 수익률의 시계열적 변화를 관측한 것이다. 표 1의 패널 1을 보면 자기자본의 크기(size)가 작아질수록 그리고 자기자본의 시장가치 대비 장부가치 비중(book-to-market ratio)이 높아질수록(회계학적 자본 가치에 비해 저평가된 주식일수록) 수익률 평균이 커지는 현상을 관측할 수 있는데 이것은 시장이 효율적이라면 나타날 수 없는 현상으로 이상현상(anomaly)이라고 불린다. 본 연구는 여기서 상정한 모형들 중에서 어떤 모형이 이러한 이상 현상을 일으키는 포트폴리오 집합을 가장 잘 설명하는 지 살펴본다. 그림 2는 26개의 기초자산 수익률의 비중심화(noncentral) 공분산 행렬의 역행렬을 분석한 것이다. 이 역행렬은 H-J 검증통계량의 가중치 행렬(weighting matrix)으로써 이를 eigenvalue-decomposition하여 그 eigenvalue-vector를 체크한 후, 가장 큰 두개의 eigenvalue 값에 상응하는 eigenvector들을 찾아서 구성 포트폴리오별로 도시한 것이다. 이것이 의미하는 바는 H-J 검증통계량이 도출될 때, 각 포트폴리오의 가격 추정오차에 어느 정도의 가중치가 걸리는 지 알려준다. H-J 검증통계량 계산시 이 가중치 행렬이 모형에 따라서 변화하지는 않는다는 것은 전술한 바와 같다. 그러나 되도록이면 모든 포트폴리오

에 골고루 가중치가 걸리면 좋을 것이다. 그림 2를 보면 포트폴리오 14와 15에 특히 많은 가중치가 부여되지만 다른 포트폴리오에도 상당히 고른 가중치가 부여됨을 알 수 있다. 이를 통해서 본 연구의 H-J 검정이(특히 분기별 기준에서) 모든 포트폴리오를 특별히 차등하지 않고 있으며, 따라서 H-J 추정량은 이 모든 포트폴리오를 골고루 다 잘 평가할 수 있는 추정치를 찾아 갈 것으로 예상된다.

3.2 H-J 추정 및 검증 방법

상술하였듯 H-J 검증은 구체적인 가격산정함수가 전제되어야 하므로, 본 절에서는 H-J 최소거리 검증에 대해서 보다 구체적으로 설명한다. 우선 본 연구가 가정한 이론적 가격산정함수는 다음과 같다.¹⁴

$$y_{t+1} = b' F_{t+1} = b_0 + b_1' f_{t+1} \quad (26)$$

식(26)에서 보듯이 본 연구의 이론적 가격산정함수는 모두 one vector와 각 모형에서 가정된 위험요소와의 선형 결합이다. 편의상 이를 $(k+1)$ factor 모형이라고 부르자. 이 때 k 는 위험요소(risk factor)의 개수이다. 이제 이를 근본적 자산 평가식(식(2) 또는 (25))에 대입하면 식 (3)은 다음과 같이 표현된다.

$$E^y[\tilde{R}_{t+1}] = (1+r_f) + \sum_{j=1}^k q_j \cdot \text{cov}(\tilde{f}_{t+1}^j, \tilde{R}_{t+1}) \quad , \text{where } q_j = -(1+r_f) \cdot b_{1,j} \quad (27)$$

이것은 covariance risk pricing 모형이라고 불리우며, 이때 $\text{cov}(\tilde{f}_{t+1}^j, \tilde{R}_{t+1})$ 는 해당자산의 위험요소와의 공분산을, q_j 는 이의 시장가격을 의미한다. 또한 식 (27)은 다음과 같이 쓸 수도 있다.

$$E^y[\tilde{R}_{t+1}] = (1+r_f) + \beta' \Lambda \quad , \text{where } \beta = \text{cov}(\tilde{f}_{t+1}, \tilde{f}_{t+1}')^{-1} \cdot \text{cov}(\tilde{f}_{t+1}, \tilde{R}_{t+1}') \quad (28)$$

$$\Lambda = -(1+r_f) \cdot \text{cov}(\tilde{f}_{t+1}, \tilde{f}_{t+1}') \cdot b_1$$

이것은 beta risk pricing 모형이라고 불리우며, 이때 β (Beta risk)는 계량경제학적 의미에서 factor에 대한 해당 자산의 민감도를 의미하며, Λ 는 이러한 위험의 시장 가격이다.

위에서 보듯이 모형에 따른 개별 자산의 이론적 기대수익률은 모두 모형이 내포하는 가격산정함수상의 위험요소에 대한 민감도 즉, b_1 이 추정되면 잔여적으로 역시 추정될 수 있다. 먼저 H-J이 제시한 검정 metric은,

¹⁴ 조건부 모형의 경우에는 다음과 같다.

$$y_{t+1} = b_0 + b_1' f_{t+1} + b_2' I_t + b_3' (f_{t+1} \cdot I_t)$$

$$\begin{aligned}
\delta &= \underset{d \in L^2}{\text{Min}} \|y - d\| \\
&\quad \text{s.t. } E[d \cdot R] = l \\
\Leftrightarrow \delta &= \underset{d \in L^2}{\text{Min}} \|y - d\| \\
&\quad \text{s.t. } d \in D = \{d \mid E[d \cdot R] = l\} \\
\Leftrightarrow \delta^2 &= \underset{d \in L^2}{\text{Min}} \underset{\lambda \in R^N}{\text{Sup}} \{E[(y-d)^2] + 2 \cdot \lambda' \cdot (E[d \cdot R] - l)\}
\end{aligned} \tag{29}$$

이때 l 은 기초자산의 시장 균형가격 벡터로서 상대가격 체계 하에서 one vector이다. 이 최적화 프로그램의 해를 $\hat{d}, \hat{\lambda}$ 이라 하면 다음의 식이 성립한다.

$$y - \hat{d} = \hat{\lambda}' R, \text{ where } \hat{\lambda} = E[RR']^{-1} \cdot E[y \cdot R - l] \tag{30}$$

그리고 H-J 최단거리는

$$\begin{aligned}
\hat{\delta} &= \|y - \hat{d}\| = \left(\hat{\lambda}' \cdot E[RR'] \cdot \hat{\lambda} \right)^{1/2} \\
&= \left((E[y \cdot R] - l)' \cdot E[RR']^{-1} \cdot (E[y \cdot R] - l) \right)^{1/2}
\end{aligned} \tag{31}$$

이제 식 (31)에 다시 식 (26)을 대입하여 한번 더 극소화 문제를 풀면, 최종적인 가격산정 함수상의 b 에 대한 추정량을 얻을 수 있다. Hodrick and Zhang(2001)은 선형 가격산정함수 가정하에 이에 대한 해석해를 제공한다. 이를 참고하여, 우선 가격오차벡터 $(E[y \cdot R] - l)$ 에 대한 표본유사를 구하면,

$$g_T(b) = (1/T) \cdot \sum_{t=1}^T (R_t y_t - l) \tag{32}$$

그리고 $E[RR']^{-1}$ 에 대한 표본유사를 W_T 라 하면, b 에 대한 추정량은 다음의 최적화 프로그램의 해이다.

$$\hat{b} = \underset{b}{\text{arg min}} \hat{\delta}^2 = \underset{b}{\text{arg min}} (g_T(b)' \cdot W_T \cdot g_T(b)) \tag{33}$$

이 최적화 문제를 풀기 위해, gradient vector는 주어진 선형 가격산정함수 가정 하에서 다음과 같이 표현된다.

$$D_T = \frac{\partial g_T}{\partial b} = \frac{1}{T} \cdot \sum_{t=1}^T R_t \cdot F_t' \tag{34}$$

이제 식(33)의 최적화 문제를 풀면 b 의 해는,

$$\hat{b}_{HJ} = (D_T' W_T D_T)^{-1} \cdot (D_T' W_T \cdot l) \tag{35}$$

그리고 이의 분산은,

$$\text{Var}(\hat{b}_{HJ}) = (1/T) \cdot (D_T' W_T D_T)^{-1} \cdot D_T' W_T S_T W_T D_T \cdot (D_T' W_T D_T)^{-1} \quad (36)$$

여기서 S_T 는 $[T \cdot \text{Var}(g_T(b))]$ 에 대한 일치 추정량으로서, 가격오차벡터($g_T(\hat{b}_{HJ})$)를 이용하여 Newey-West방법으로 추정된다.¹⁵

그리고 가격오차벡터의 분산은,

$$\begin{aligned} \text{Var}[g_T(\hat{b}_{HJ})] = & \\ (1/T) \cdot [I_N - D_T \cdot (D_T' W_T D_T)^{-1} \cdot D_T' W_T] \cdot S_T \cdot [I_N - D_T \cdot (D_T' W_T D_T)^{-1} \cdot D_T' W_T] & \end{aligned} \quad (37)$$

여기서 I_N 은 $N \times N$ identity matrix이다. 그리고 최소거리 관계에 있는 두 확률변수 즉, 이론적 가격산정함수 집합상의 \hat{y}_{HJ} 과 이의 균형가격산정함수 집합에 대한 projection인 \hat{d}_{HJ} , 그리고 이 둘을 연결시켜주는 라그랑지 승수 $\hat{\lambda}_{HJ}$ 간에는 다음의 관계가 성립한다.

$$\begin{aligned} \hat{y}_{HJ} &= \hat{b}_{HJ}' F_{t+1} \\ \hat{\lambda}_{HJ} &= E[RR']^{-1} \cdot E[\hat{y}_{HJ} \cdot R - l] \\ \hat{d}_{HJ} &= \hat{y}_{HJ} - \hat{\lambda}_{HJ}' \cdot R \end{aligned} \quad (38)$$

그리고 최종적인 목적함수 값은

$$\hat{\delta}_{HJ}^2 = g_T(\hat{b}_{HJ})' W_T \cdot g_T(\hat{b}_{HJ}) \quad (39)$$

이제 식(39)가 왜 최대 가격 산정 오차란 경제적 의미를 지니는지 살펴보자. 우선 기초자산으로 구성된 포트폴리오¹⁶에 대한 이론적 가격산정함수의 가격오차는 식(3)에 의해 다음과 같이 표현된다.

$$|E^y[\theta' R] - E^d[\theta' R]| = (1 + r_f) \cdot \text{Cov}(y - d, \theta' R) \quad (40)$$

이 등식에 Cauchy-Schwarz 부등식을 적용시키고 정리하면,

$$\frac{|E^y[\theta' R] - E^d[\theta' R]|}{\sigma(\theta' R)} \leq (1 + r_f) \cdot \sigma(y - d) \quad (41)$$

$$(\forall y \in Y = \{y | y(b)\}, \forall d \in D = \{d | E[d \cdot R] = l\})$$

이제 위 부등식은 모든 이론적 가격산정함수(y) 및 시장 균형가격산정함수(d)에 대해 성립

¹⁵ Newey-West 추정에 옵션으로 들어가는 lag term은 4를 부여한다. 즉, 월별 수익률 기준인 경우 4개월, 분기별 수익률 기준인 경우 4분기정도 상관관계가 존속한다고 가정한다. 그러나 다른 값을 줄 경우에도 추정치의 결과는 크게 달라지지 않았다.

¹⁶ 여기서 θ 는 number of shares를 의미한다. 즉, 합이 1일 필요는 없다.

하여야 하므로,

$$\sup_{\theta, y \in Y, d \in D} \frac{|E^y[\theta' R] - E^d[\theta' R]|}{\sigma(\theta' R)} = \inf_{y \in Y, d \in D} (1+r_f) \cdot \sigma(y-d) \quad (42)$$

이제 $E[y] = E[d]$ 을 가정하면, 식(42)는 식(38)과 식(40)에 의해,

$$\begin{aligned} \sup_{\theta} \frac{|E^{\hat{y}_{HJ}}[\theta' R] - E^{\hat{d}_{HJ}}[\theta' R]|}{\sigma(\theta' R)} &= (1+r_f) \cdot \sigma(\hat{y}_{HJ} - \hat{d}_{HJ}) \\ \sup_{\theta} \frac{|(1+r_f) \cdot \text{Cov}(\hat{y}_{HJ} - \hat{d}_{HJ}, \theta' R)|}{\sigma(\theta' R)} &= (1+r_f) \cdot \sigma(\hat{y}_{HJ} - \hat{d}_{HJ}) \\ \sup_{\theta} \frac{|(1+r_f) \cdot \text{Cov}(\hat{\lambda}_{HJ}' \cdot R, \theta' R)|}{\sigma(\theta' R)} &= (1+r_f) \cdot \sigma(\hat{y}_{HJ} - \hat{d}_{HJ}) = (1+r_f) \cdot \sigma(\hat{\lambda}_{HJ}' \cdot R) = (1+r_f) \cdot \hat{\delta}_{HJ} \end{aligned} \quad (43)$$

식(43)의 등식으로부터, θ 의 최적 해는 다음과 같은 값을 알 수 있다.

$$\hat{\theta}_{HJ} = (1/\hat{\delta}_{HJ}) \cdot \hat{\lambda}_{HJ} \quad (44)$$

따라서 H-J 최소거리($\hat{\delta}_{HJ}$)에 무위험이자율($1+r_f$)을 곱한 값은, 식(42)로부터 표준편차당 최대가격오차(the maximum mispriced sharpe ratio)를 주는 y (\hat{y}_{HJ}) 및 이에 해당하는 포트폴리오($\hat{\theta}_{HJ}$)를 찾는 최적화 프로그램의 목적함수값($|E^{\hat{y}_{HJ}}[\hat{\theta}_{HJ}' R] - E^{\hat{d}_{HJ}}[\hat{\theta}_{HJ}' R]| / \sigma(\hat{\theta}_{HJ}' R)$)이다. 본 연구는 Campbell and Cochrane(2000)을 참고하여 이에 다시 연간표준편차 0.2를 곱해 연간 최대 가격 오차(the annualized maximum mispriced sharpe ratio)개념을 보고한다. 또한 라그랑지 승수($\hat{\lambda}_{HJ}$)의 경제적 의미도 자연스럽게 나오는데, 그것은 식(44)로부터 최대가격오차 포트폴리오(the portfolio with the maximum mispriced sharpe ratio)의 기초 자산에 부여된 상대적 가중치이다. 그리고 이의 분산은,

$$\text{Var}[\hat{\lambda}_{HJ}] = W_T \cdot \text{Var}[g_T(\hat{b}_{HJ})] \cdot W_T \quad (45)$$

따라서 귀무가설 $H_0: \hat{\lambda}_{HJ} = 0$ 을 검증하여 어떤 자산이 최대가격 오차 결정에 있어서 중요한(significant) 영향력을 미치는 지 알 수 있다. 이제 식(21)의 검정통계량($T \cdot \hat{\delta}_{HJ}^2$)의 귀무가설 분포를 도출하는 법을 살펴보자. 원래 Hansen and Jagannathan (1997)이 세운 귀무가설은 가격 오차 벡터가 모두 0이 아니라는 것 즉, $H_0: E[y \cdot R] - l \neq 0$ 이었다.¹⁷ 그러나 Jagannathan and Wang(1996, JF)이 이와 관련된 기술적 문제를 해결함으로써 식(21)와 같은 귀무가설 분포를 도출하였다. 여기서는 γ_j 가 어떻게 결정되는지 살펴보자. 우선 다음의 $P \times P$ 정방행렬을 정의하자. 여기서 P는 모먼트 등식의 개수로써 도구변수를 도입하지 않는

¹⁷ 이는 귀무가설을 $H_0: E[y \cdot R] - l = 0$ 으로 놓을 경우 해가 퇴화(degenerating)되어 귀무가설 분포를 구해낼 수 없었기 때문이다.

경우에는 기초자산의 개수(N)가 된다.

$$A = S_T^{1/2} \cdot W_T^{1/2} \cdot [I_N - W_T^{1/2} \cdot D_T \cdot (D_T' W_T \cdot D_T)^{-1} \cdot D_T' W_T^{1/2}] \cdot W_T^{1/2} \cdot S_T^{1/2} \quad (46)$$

여기서 $S_T^{1/2}$ 및 $W_T^{1/2}$ 는 각각 S_T 및 W_T 의 cholesky decomposition에서 나오는 upper-triangular matrix이다. 이 행렬은 N-(k+1)개의 non-zero eigenvalues를 가지며, 이들은 모두 양수임이 알려져 있다. 이 값들이 바로 $\chi^2(1)$ 에 부여되는 가중치 γ_j 들이다.

3.3 H-S 검정 및 H-J 검정의 최강력 검증(Robustness Test)

이제 이러한 H-J 최소거리에 의해 추정된 가격산정함수로 out of sample test를 어떻게 할 수 있는 지 살펴보자¹⁸. 상술한 이론적 모형들은 모두 시장에 존재하는 모든 자산을 평가할 수 있다고 주장한다. 따라서 적당한 유의수준에서 in-sample test를 통과한 모형을 대상으로 이제는 이 모형들이 기초자산에 의해 생성(span)되는 공간을 벗어나서, 다른 공간의 자산도 잘 평가하는 지를 검증해 본다. 구체적으로 상술한 도구변수를 이용하여 managed portfolio를 생성하고, 적당한 유의수준에서 H-S 및 H-J 검증을 통과한 모형들이 이들 관리 포트폴리오(managed portfolio)를 역시 잘 평가하는 지 검증한다.

우선 귀무가설 ($H_0: E[\hat{y}_{HJ}(t+1) \cdot (R(t+1) \cdot I(t))] = E[I(t)]$)하에 검정통계량은,

$$\begin{aligned} \hat{\delta}_{HJ}^R &= g_T^R(\hat{b}_{HJ})' \cdot W_T^R \cdot g_T^R(\hat{b}_{HJ}) \\ , \text{ where } g_T^R(\hat{b}_{HJ}) &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-1} [(R_{t+1} I_t)(\hat{b}_{HJ}' F_{t+1}) - I_t] = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-1} [Q_{t+1} \cdot (\hat{b}_{HJ}' F_{t+1}) - I_t] \quad (47) \\ (\text{consistent}) \hat{W}_T^R &= \left(\frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-1} (R_{t+1} I_t) \cdot (R_{t+1} I_t)' \right)^{-1} = \left(\frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-1} Q_{t+1} \cdot Q_{t+1}' \right)^{-1} \end{aligned}$$

그리고 이의 귀무가설 분포는, Q_{t+1} 를 하나의 새로운 수익률로 보고 3.2절에서 상술한 것과 같은 방법으로 구한다.

4. 진단 및 추정 결과

본 절에서는 기초자산 및 모형들을 월별 수익률 기준과 분기별 수익률 기준으로 나누고, 이를 다시 비조건부 모형(unconditional model)과 도구변수로 비조건부 모형을 스케일 조정된 조건부 모형(conditional model)으로 나누어, Hansen-Singleton 검증(H-S 검증)과 Hansen-Jagannathan 검증(H-J 검증)을 실시해 본 결과를 제시한다. 또한 본 연구의 주된 관심사로서,

¹⁸ 이것은 H-S 검정에도 동일한 방식으로 적용된다.

Wolak의 다변량 부등식 제약 검정을 응용하여 위 검증들에 의해서 추정된 이론적 가격산정 함수가 기초자산이 요구하는 최소한의 모멘트 요건을 충족하는지 검증한다. 그리고 이상 4 개의 검증결과를 상호 비교 분석한다.

4.1 모형의 검증(월별 수익률 기준)

표 3은 Null¹⁹, CAPM, FF3 모형(Panel A), 그리고 이를 도구변수로 상정한 산업생산지수(cycle(IP)) 및 1월 더미변수(JAN)로 스케일 조정한 조건부 모형(Panel B 와 C)에 대해, H-S 검증 결과와 이 추정치에 대한 모멘트 검정 결과(W(HS)), 그리고 마찬가지로 H-J 검증 결과와 이 추정치에 대한 모멘트 검정 결과(W(HJ))를 보여준다.²⁰ 또한 H-J 최소거리(HJ-dist(δ))가 의미하는 연율로 환산된 최대 가격 오차(Max.Error)가 표에 제시되어 있다. No. of para는 비조건부 모형의 경우는 (k+1)이고, 조건부 모형의 경우 2×(k+1)이다.

그리고 가격산정함수상의 추정계수(coefficient)가 유의한지를 검증하는 Wald 검증 결과(p-Wald(b^*))가 제시되어 있다. 이것은 비조건부 모형의 경우에는 k개의 위험요소의 유의성 ($H_0 : b_1 = 0$)을, 그리고 조건부 모형의 경우에는 사용된 조건부 변수의 유의성 ($H_0 : b_2 = 0, b_3 = 0$)을 검증한다. 우선 Panel A의 비조건부 모형의 경우 Null, CAPM, FF3 모형 모두 4개의 검정에서 기각된다. Fama and French(1992)는 자신들의 3 factor 모형이 F 검정결과 FF 25 포트폴리오를 잘 설명한다고 주장하나, 이 H-J 및 H-S 검증에서는 기각된다.²¹ Panel B는 산업생산지수(IP)로 비조건부 모형의 (k+1)개의 설명요소들을 스케일 조정한 교차항들까지 포함하는 조건부 모형의 검정 결과이다. 우선 NULL(IP) 모형은 모든 검증에서 유의수준 5%로 기각된다. CAPM(IP)의 경우 H-J 검증과 W(HJ) 검증의 p 값이 각각 0.1%와 25%로써, H-J 추정가격산정함수가 기초자산이 요구하는 모멘트 하한을 통과하나 기초자산의 균형가격산정함수집합에는 들어오지 못한다고 여겨진다. P 값이 25% 이상이라는 것은 W(HJ) 검증의 power가 H-J검증에 비해 상당히 떨어진다는 것을 시사한다. 그리고 이 모형에 대한 H-S 검증과 W(HS) 검증은 1% 유의수준으로 모형을 기각시켜 H-J 검증 결과와 일치된다. FF3(IP)의 경우 H-J 검증과 W(HJ) 검증의 p 값이 각각 9.3%와 25%로써 H-J 추정 가격산정함수가 기초자산이 요구하는 모멘트 하한을 넘고 또한 균형가격산정함수 집합에도 들어와서 자산 가격 결정 모형으로 적합한 모형이라고 여겨진다. 그리고 이에 대한 H-S검증결과 역시 14.8%로 일치된 결론을 내리고 있다. 그러나 W(HS) 검증은 1% 유의수준으로 H-S 추정가격산정함수가 기초자산이 의미하는 모멘트 하한을 통과하지 못하여 균형가격산정함수 집합에도 들어올 수 없을 것이라는 결론을 내리고 있다. 일단 H-S 검증과 관련하여 이러한 상호 모순되는 것처럼 보이는 두 결론은 이론적으로는 가능한 얘기이다.

¹⁹ Null 모형은 상수항(one vector)만을 가격산정함수 상의 설명요소로 갖는 모형이다.

²⁰ Wolak의 다변량 모멘트 검정이 가능하려면 검증 대상 시계열 자료가 정규성(stationary)을 보여야 한다. Unit-root 검증 결과 본 연구에 사용된 대부분의 모형이 적당한 유의수준에서 unit root를 기각시켰으나 몇 개의 모형은 그러지 못했다. 그러나 unit-root 검증은 power가 매우 약한 것으로 알려져 있기 때문에 일단 이를 무시하고 모든 모형들에 대해 Wolak의 모멘트 검증을 실시한다.

²¹ 물론 CAPM과 FF3의 위험요소의 민감도 계수에 대한 Wald 검증은 유의하다.

즉, H-S 검증은 H-J 검증과 마찬가지로 귀무가설인 $E[y \cdot R] = I$ 을 검증하는 것이긴 하지만, 메트릭 개념상 추정 가격 산정함수가 기초자산이 의미하는 균형가격함수집합에 들어온다는 것까지 검증하는 것은 아니다. 다시 말해서 W(HJ) 검증과 H-J 검증 간에는 전자가 후자에 대해 필요조건 관계에 있지만, W(HS) 검증과 H-S 검증간에는 그러한 논리적 관계가 없다. 따라서 이처럼 결과가 엇갈리게 나올 수 있다. 다만 이러한 결과가 나왔을 때 이를 W(HS) 검증의 1종 오류로 해석해야 하는지, 아니면 H-S 검증의 2종 오류로 해석해야 하는 지가 문제인데, 이에 대한 판단은 보다 과학적인 검증방식으로 알려져 있는 H-J 검증 결과를 보아야 판단할 수 있다. 즉, 이 경우 H-J 검증이 9% 유의수준에서 모형을 통과시키고 있으므로, 모형은 균형가격산정모형으로 적합한 모형이라 판단되며, 따라서 H-S 검증의 2종 오류라기 보다는 W(HS) 검증의 1종 오류로 본다. Panel C는 1월 효과를 더미 조건변수로 도입한 경우의 검증결과를 보여준다. NULL(JAN)의 경우 4개의 검증 모두 다 일치된 기각 결정을 내리고 있다. CAPM(JAN)의 경우 H-J 검증 및 W(HJ) 검증의 p값이 각각 0, 25%로서, H-J 추정가격함수가 26개의 기초자산으로부터 도출된 모멘트 하한은 통과하나, 보다 본질적인 검증인 기초자산의 균형가격함수집합에는 들어오지 못하는 것으로 판단된다. 그리고 이러한 판단은 H-S 검증 및 W(HS) 검증 결과와도 일치한다. FF3(JAN)의 경우, H-J 검증 및 W(HJ) 검증의 p값이 각각 10.1%와 25%로써 적합한 균형가격산정모형이라고 판단된다. 그러나 이에 대한 H-S 검증은 p 값이 0.2%로 모형을 기각시키고 있다. 이렇게 H-S, H-J 두 검증의 판단이 엇갈리는 경우에 이러한 결과를 H-S 검증의 1종 오류로 해석해야 하는지, 아니면 H-J 검증의 2종 오류로 해석해야 하는 지가 문제이다. 상술했듯 H-J 검증은 H-S 검증과 같은 가설을 검증하지만 metric개념을 사용하여 보다 과학적으로 귀무가설에 접근하고 있다. 따라서 이렇게 판단이 엇갈릴 경우, H-J 쪽의 철학을 취해 H-S 검증의 1종 오류로 본다. 또한 이러한 판단 혹은 선택을 뒷받침하는 것이 W(HS) 검증의 p 값, 25%이다. 이것은 H-S 추정가격산정함수가 기초자산이 요구하는 모멘트 하한들을 모두 상회함을 의미한다. 그러나 이에 대한 H-S 검증 결과는 모형을 유의수준 1%로 기각 시킨다. W(HS) 검증이 필요조건 검증이라서 충분히 그럴 수는 있지만, H-J 검증 결과등과 종합적으로 고려해볼 때 이는 잘못된 판단일 수 있다.

4.2 모형의 검증(분기별 수익률 기준)

본 절에서는 Null model, CAPM, FF 3 모형, linearized CCAPM, 그리고 linearized COCH 모형에 대해 비조건부 모형과 이를 도구변수(cycle(GNP),CAY,JAN)로 스케일 조정한 조건부 모형의 검증 결과에 대해서 서술한다. 먼저, Panel A의 비조건부 모형의 경우 상수항만 지닌 가격산정함수(Null model)는 4가지 검정 모두에서 월별수익률 기준일 때와 마찬가지로 기각된다. 이러한 결과의 이유는 직관적으로도 당연한데, 이 경우 추정 가격산정함수는 시계열적으로 동일한 상수 함수가 되는데 반해 자산가격은 경기 변동 등에 따라 매우 가변적이어서 상수함수로 이를 맞추기가 매우 어렵기 때문이다. 나머지 비조건부 모형의 경우 CCAPM을 제외하고는 모두 4가지 검정에서 기각된다. 따라서 월별수익률 기준인 경우와 마찬가지로 현실적으로 어떤 조건부 변수를 도입하지 않고 순수 이론 모형 그대로 가서는,

기초자산의 시장가격을 맞추기가 상당히 어렵다는 것을 알 수 있다. 다만, CCAPM의 경우는 H-J 검증 추정치(추정가격산정함수)가 25% 유의수준으로 모먼트 하한을 통과하고, 1% 유의수준으로 균형가격함수집합에도 들어오고 있다. 그렇지만 p값이 1.7%로 모형을 채택하기엔 너무 약하다. 결론적으로 월별수익률 기준과 마찬가지로 본 연구의 비조건부 모형들은 2% 유의수준으로 H-S 및 H-J 검증에서 모두 기각된다. Panel B는 비조건부 모형의 설명요소들을 cycle(GNP)로 스케일 조정한 조건부 모형의 검증 결과이다. 우선 Null의 경우 4가지 검정 모두에서 기각되며, cycle(GNP)의 추정계수 역시 p값이 37.6%로 유의하지 않다. 따라서 cycle(GNP)만으로는 NULL모형과 마찬가지로 역부족임을 알 수 있으며, 이러한 현상은 나머지 조건부 변수인 CAY, JAN에서도 나타난다. 따라서 월별수익률 기준인 경우와 마찬가지로 상수항과 조건부 변수만으로는 적절한 모형이 될 수 없어 보인다. CAPM(GNP)의 경우 H-J 검증과 W(HJ) 검증의 p값이 각각 0.3%, 25%로써 H-J 추정가격산정함수가 모먼트 하한을 통과하나 균형가격산정함수 집합에는 들어오지 못한다고 판단되며, 이에 대한 H-S 검증 및 W(HS) 검증 역시 p 값이 0으로 이러한 결론을 뒷받침하고 있다. FF3(GNP)의 경우 H-J 검증과 W(HJ) 검증의 p값이 각각 25%, 50.2%로써 적당한 균형가격산정모형이라 판단된다. 그러나 이에 대한 H-S 검증은 p 값이 2.1%로써 5% 유의수준에서 모형을 기각시키고 있다. 그리고 W(HS) 검증의 p 값은 9%로써, 5% 유의수준에서 H-S 추정가격산정함수가 기초자산으로부터 도출된 모먼트 하한을 통과한다. 따라서 이것은 월별수익률 기준 FF3(JAN) 모형과 똑같은 경우로써 H-S 검증의 1종 오류로 보인다. CCAPM(GNP)의 경우 H-J 검증 및 W(HJ) 검증의 p 값이 각각 3.8%와 25%로써 H-J 추정가격산정함수가 기초자산이 요구하는 모먼트 요건은 충족하나 기초자산의 균형가격함수 집합에는 5% 유의수준으로 들어오지 못한다. 그리고 H-S 검증 및 W(HS) 검증 역시 모형을 기각시킨다. 물론, 이 경우 유의수준을 1%로 낮출 경우에는 H-J 검증 및 W(HJ) 검증은 모형을 통과시키는 반면, H-S 및 W(HS) 검증은 모형을 기각시켜 서로 상반된 통계적 판단을 하고 있다. 이 경우 역시 앞의 논리에 따라 H-J 및 W(HJ) 검증의 관점에서, H-S 검증 및 W(HS) 검증의 1종 오류로 본다. COCH(GNP)의 경우 H-J 검증과 W(HJ) 검증의 p 값이 각각 14.8%와 25% 이상으로 적당한 균형가격산정모형으로 판단된다. 그리고 이에 대한 H-S 검증 역시 p 값이 22.9%로써 일치된 결론을 보인다. 그러나 W(HS) 검증은 이 모형을 유의수준 1% 미만으로 기각시킨다. 이러한 상반된 결론은 H-S 검증과 W(HS) 검증간에는 얼마든지 나올 수 있음은 전술한 바와 같으며, 이러한 판단 중 어느 것이 맞는지는 H-J 검증 및 W(HJ) 검증 결과를 살펴 보아야 하는데, 이 경우에는 W(HS) 검증의 1종 오류로 보인다. Panel C는 비조건부 모형의 설명요소들을 CAY와 결합시켰을 때의 검증 결과이다. 먼저 CAY는 Lettau and Ludvigson(2001, JF)이 개발한 지표로서 미래 시장포트폴리오 수익률에 대한 예측변수(forecasting variable)의 일종이다. 그것은 상술했듯 일종의 소비성향 개념으로 총자산대비 총소비의 비중이다.²² CAPM(CAY)의 경우 4가지 검증 모두에서 유의

²² 그러나 이것은 관측불가능하기 때문에 관측 가능한 거시 변수들 즉, 소비(consumption), 자산보유액(asset holding), 노동소득(labor income)을 공적분 분석하여 이들의 공통된 trend로부터의 deviation을 CAY로 시계열화 한 것이다.

수준 1% 미만으로 기각된다. FF3(CAY)의 경우 H-J 검증 및 W(HJ) 검증의 p 값이 각각 0.5%와 25%로써 모먼트 요건은 충족하나 1% 유의수준으로 균형가격산정함수 집합에는 들어오지 못한다. 그리고 이러한 판단에 대해 H-S 검증 역시 모형을 기각시킨다. 그리고 W(HS) 검증의 p 값은 17.2%로써 H-S 추정 가격산정함수가 기초자산이 요구하는 모먼트 하한을 만족하는 것으로 판단한다. 그러나 결국 모형이 유의수준 1% 미만으로 기각되었으므로, 이는 W(HJ) 검증 및 W(HS)검증의 power가 낮다는 것을 의미한다. CCAPM(CAY)의 경우 H-J 검증 및 W(HJ) 검증의 p 값이 각각 4.4%, 25%로써 기초자산이 요구하는 모먼트 요건은 충족하나, 5% 유의수준에서 균형가격함수집합에는 들어오지 못한다. 그리고 이에 대한 H-S 검증 및 W(HS) 검증 역시 1% 유의수준에서 모형을 기각 시킨다. 그러나 유의수준을 1%로 잡을 경우에는 H-J 검증 및 W(HJ) 검증은 모형을 통과시키는 반면, H-S 검증 및 W(HS)검증은 모형을 기각 시킨다. 그리고 이렇게 판단이 엇갈릴 경우에는 H-J 검증의 관점에서 H-S 검증 및 W(HS)검증의 1종 오류로 해석한다. COCH(CAY)의 경우 H-J 검증 및 W(HJ) 검증의 p 값이 각각 4.4%와 25%로써 기초자산이 요구하는 모먼트 요건은 충족하나, 5% 유의수준에서 균형가격함수집합에 들어오지 못한다. 그리고 이에 대한 H-S 검증 및 W(HS) 검증 역시 5% 유의수준에서 모형을 기각 시킨다. 그러나 유의수준을 1%로 잡을 경우에는 H-J 검증, W(HJ) 검증, 그리고 H-S 검증 모두 모형을 통과시키며, W(HS) 검증은 모형을 기각 시킨다. 그리고 이 경우 H-J 검증 관점에서 W(HS) 검증의 1종 오류로 본다. 그러나 이것은 앞의 경우와 달리 유의수준이 너무 낮은 상태에서의 판단임에 주의할 필요가 있다. 즉, 오히려 H-J 검증의 2종 오류로 볼 수 있다. Panel D는 더미변수로서 비조건부 모형들의 설명요소들을 스케일 조정하였을 때의 결과이다. CAPM(JAN)의 경우 4가지 검증 모두 유의수준 1% 미만으로 모형을 기각 시킨다. 이로써 CAPM은 월별수익률 기준, 분기별 수익률 기준, 그리고 비조건부 모형, 조건부 모형 모두 H-S 검증 및 H-J 검증에서 유의수준 1% 미만으로 기각된다고 결론 짓는다. FF3(JAN)인 경우 H-J 검증 및 W(HJ) 검증의 p 값은 각각 6%와 25%로써 기초자산이 요구하는 모먼트 하한을 상회하며, 5% 유의수준에서 균형가격함수집합에도 들어온다. 그러나 이에 대한 H-S 검증은 모형을 기각 시켜 5% 유의수준에서 H-S 검증이 1종 오류를 범하고 있다고 해석하며, W(HS) 검증의 p 값은 25%로써 일치된 결론을 주고있다고 해석한다. 그러나 유의수준을 10%로 높일 경우에는 H-J 검증 및 H-S 검증 모두 모형을 기각 시키며, 반면 이에 대한 W(HJ) 및 W(HS) 검증은 25% 유의수준에서 모형을 통과시킨다. 그리고 이는 모먼트 검증의 H-J 검증 및 H-S 검증에 대한 필요조건으로서의 성격상 논리적 모순은 아니며 다만 W 검증의 power가 떨어지는 것을 시사한다. CCAPM(JAN)의 경우 H-J 검증 및 W(HJ) 검증의 p 값이 각각 6.6%와 25%로써, 기초자산으로부터 도출된 모먼트 하한을 상회하며, 균형가격함수집합에도 5% 유의수준으로 들어온다. 그러나 이에 대한 H-S 검증 및 W(HS) 검증은 유의수준 1% 미만으로 모형을 기각 시켜, 5% 유의수준에서 1종 오류를 범하는 것으로 해석한다. 그러나 유의수준을 10%로 높일 경우에는 H-J 검증 및 H-S 검증 모두 모형을 기각 시키며, 이에 대해 W(HS) 검증은 H-S 검증과 마찬가지로 모형을 기각 시키나, W(HJ) 검증은 모형을 통과시켜 역시 power의 부족을 보여준다. 마지막으로 COCH(JAN)의 경우 H-J 검증 및 W(HJ) 검증의 p 값이 각각

2.7%와 25%로써, 기초자산으로부터 도출된 2차에서 4차까지의 모멘트 하한을 통과하며, 균형가격함수집합에 1% 유의수준으로 들어온다. 그러나 이에 대한 H-S 검증 및 W(HS) 검증은 모형을 기각 시켜 1% 유의수준에서 1종 오류를 범하는 것으로 해석한다. 그러나 유의수준을 5%로 높일 경우에는 H-J 검증 및 H-S 검증 모두 모형을 기각 시키며, 이에 대한 W(HS) 검증은 H-S 검증과 마찬가지로 모형을 기각 시키나, W(HJ) 검증은 유의수준 25%로 모형을 통과시켜 power가 역시 떨어짐을 보여준다.

4.3 추정치의 경제적 의미

본 절에서는 표 3과 4에서 H-J 검증을 1% 유의수준에서 통과한 모형들을 대상으로 그 추정치의 경제적 의미를 분석한다. 유의수준이 낮은 측면이 있으나 되도록이면 많은 모형을 분석 대상으로 하여 이론적 모형들이 얘기하는 경제적 의미들을 찾아 본다. 구체적으로 표 5와 6은 H-J 검증을 통과한 모형들이 내포하는 추정가격산정함수의 계수에 대한 추정치(b), 해당 위험요소(k factor)와의 공분산 위험에 대한 이론적 가격(CovRP), 해당 위험요소에 대한 beta 위험의 이론적 가격(betaRP), 그리고 각각에 대한 표준편차 및 T 통계량이 제시되어 있다. 경제적 의미의 분석은 T값이 1을 넘는 추정치를 위주로 이루어진다.

4.3.1. 월별 수익률 기준

표 5는 H-J 검증을 10%와 9% 유의수준으로 통과한 FF3(JAN), FF3(IP) 모형의 추정치가 제시되어 있다. 우선 식(27)과 (28)로부터 다음과 같은 경제적 의미를 끌어낼 수 있다. 첫째, \hat{q} 이 양수라면 수익률(\tilde{R}_{t+1})이 해당 위험요소(\tilde{f}_{t+1}^k)와 반대 방향일수록 좋은 자산이다. 즉, $cov(\tilde{f}_{t+1}^j, \tilde{R}_{t+1})$ 의 값이 음수이고 그 절대값이 클수록, 이론적 균형기대수익률은 낮아지고 따라서 이론적 균형가격은 높아진다. 그리고 \hat{q} 이 음수라면 그 반대의 해석이 가능하다. 둘째, $\hat{\Lambda}$ 이 양수라면 $cov(\tilde{f}_{t+1}^j, \tilde{R}_{t+1})$ 의 부호에 따라 두 가지 해석이 가능한데, 만약 부호가 양수라면 위험요소에 대한 민감도(β)가 낮을수록, 반대로 부호가 음수라면 β 가 높을수록 좋은 자산이다. 그리고 $\hat{\Lambda}$ 이 음수라면 그 반대의 해석이 가능하다. 따라서 위 두 명제로부터 $\hat{q}, \hat{\Lambda}$ 이 둘 다 양수라면 위험요소와 반대방향이면서 그 민감도가 높은 자산일수록, 둘 다 음수라면 같은 방향이면서 그 민감도가 높은 자산일수록, 이론적 균형기대수익률이 낮아져서(이론적 균형가격이 높아져서) 좋은 자산임을 의미한다. 이러한 추론을 토대로 위험요소와 어떠한 관계에 있는 자산이 좋은 자산인지 살펴보자. FF3(JAN)모형의 경우 시장포트폴리오 수익률(R_{vw})과는 반대 방향일수록, SMB와는 같은 방향일수록, 그리고 JAN과도 같은 방향일수록 좋은 자산이다. FF3(IP)의 경우 R_{vw} , SMB, HML, IP와는 반대 방향이고 민감도도 클수록 좋은 자산임을 알 수 있다. R_{vw} 와 IP가 일종의 경기 동행 지수라고 할 때, 이와 반대 방향일수록 좋은 자산이라는 것은, 시장 전체의 경기가 안 좋을 때 많은 현금흐름을 주는 자산이 좋은 자산이란 의미이며, 또 달리 해석하면 이것은 경기 변동에 대해서 일종의

헷징 역할(쿠션 역할)을 해주는 자산일수록 모형상 시장에서 인기 있을 것으로 예상되는 자산이란 의미이다. SMB와 HML과 관련해서는 그것이 의미하는 위험요소의 경제적 해석이 불분명하여 이런 분석을 적용할 수 없다. 그리고 JAN과 관련해서는 1월 효과가 큰 자산일수록 좋은 자산이란 의미이다.²³

4.3.2. 분기별 수익률 기준

표 6은 분기별 수익률 기준 모형들을 대상으로 하고 있으며, 통과된 p 값이 큰 순서대로 나열되어 있다. 우선 FF3(GNP)의 경우 R_{nw} 와 반대 방향이고 민감도도 클수록 좋은 자산이다. COCH(GNP)의 경우 주택투자의 성장률(GR)과 반대 방향이고 민감도도 클수록 좋은 자산이다. FF3(JAN)의 경우 R_{nw} , HML과는 반대 방향이고 민감도도 클수록, SMB와는 같은 방향일수록 좋은 자산이다. JAN의 경우에는 월별수익률 기준 FF3(JAN)의 경우와 달리 반대 방향이고 민감도가 클수록 좋은 자산이다. CCAPM(JAN)의 경우 소비성장률(CG)과 같은 방향이고 민감도도 클수록, JAN과는 반대방향이고 민감도도 클수록 좋은 자산이다. 전자는 개인의 소비성장률이 높아질 때 현금흐름이 많은 자산이 좋은 자산이란 뜻이고, 후자는 1월 효과가 나타나지 않는 자산이 좋은 자산이란 의미이다. COCH(CAY)의 경우 비주택 투자성장률(GNR)과 같은 방향이고 민감도도 높을수록, 그리고 t 값이 1에 조금 못 미치지만 주택 투자성장률(GR)과는 반대 방향이고 민감도 역시 클수록, 그리고 CAY와는 반대 방향이고 민감도도 높을수록 좋은 자산이다. 이는 대표적 개인(the representative of economy)의 최적 포트폴리오에서 금융자산 투자등 비주택 투자 비율이 올라갈 때 현금흐름이 많고, 반대로 부동산등 주택 투자 비율이 올라갈 때는 현금흐름이 상대적으로 적은 자산이 좋은 금융자산이란 의미로 해석할 수 있다. 그리고 CAY는 일종의 소비성향지수(consumption-wealth ratio)로써 이것이 떨어질 때(반대로 총자산대비 총투자비율이 높아질 때) 보다 많은 현금흐름을 주는 자산이 좋은 자산이란 의미이다. CCAPM(CAY)의 경우 소비성장률(CG)과 같은 방향이고 민감도도 높을수록, CAY와는 반대 방향이고 민감도도 클수록 좋은 자산임을 의미한다. 해석은 앞의 경우와 동일하다. CCAPM(GNP)의 경우 소비성장률(CG)과 같은 방향이고 민감도도 높을수록, GNP와 같은 방향일수록 좋은 자산임을 의미한다.²⁴ COCH(JAN)의 경우 대부분 위험요소의 t 값이 1미만이라 경제적 의미를 부여하기에는 표준편차가 너무 크다. 다만 JAN의 경우에는 해석이 가능한데 CCAPM(JAN)의 경우와 마찬가지로 JAN과 반대 방향이고 민감도도 높을수록 즉, 1월 효과가 나타나지 않는 자산일수록 좋은 자산이란 의미이다. CCAPM의 경우 역시 소비성장률과 같은 방향이고 이에 대한 민감도(β)도 높을수록 좋은 자산이다. 이는 개인이 소비를 많이 해야 할 때 이를 가능케(feasible) 하도록 많은 현금흐름이 터지는 자산이 좋은 자산이란 의미이다. 마지막으로 FF3(CAY)의 경우 R_{nw} 및 HML과 반대 방향이고 민감도가 클수록 좋은 자산이란 의미로 앞의 모형들과 일치된 해

²³ 그러나 SMB, JAN 그리고 후술할 GNP의 경우에는 모형들간에 의견이 엇갈리고 있다.

²⁴ 그러나 COCH(GNP)의 경우에는 t값이 0.58이지만 반대 방향일수록 좋은 자산이란 얘기를 하고 있다.

석을 제공한다.

4.4 라그랑지 승수 추정치($\hat{\lambda}$)의 경제적 의미

라그랑지 승수는 식(29)의 H-J 최적화 프로그램의 모멘트 제약에 걸리는 계수로서, 그것의 추정치의 경제적 의미는 최적 목적함수 값이 도출됨에 있어서 제약식에 걸린 가중치이다. 그리고 앞서 설명하였듯 이 목적함수 값은 최대 가격산정 오차란 경제적 의미를 지니기 때문에, $\hat{\lambda}$ 은 이러한 값이 도출됨에 있어서 각 자산의 가격오차($E[d \cdot R_i] - 1, i = 1, 2, \dots, N$)에 실제 어느정도의 가중치란 걸렸는지를 알려준다. 표 7은 월별수익률 기준 Null 모형의 라그랑지 승수 추정치이다. T-stat은 귀무가설($H_0: \lambda_i = 0, i = 1, 2, \dots, N$)을 검증하는 T-통계량이다. 95% 신뢰구간 임계점인 1.96을 기준으로 포트폴리오 11, 14, 21, 23, 42 그리고 53의 포트폴리오에 유의한 가중치가 걸렸음을 알 수 있다. 이로부터 이 모형의 설명력을 제고시키기 위해서는 이러한 포트폴리오의 가격오차를 줄여주는 것이 중요한데, 본 모형은 특히 그러지 못해서 H-J 검증에서 결국 기각되었다고 볼 수 있다. 이러한 라그랑지 승수의 분석은 다른 모형에도 똑같이 적용될 수 있으며, 각 포트폴리오의 가격오차에 걸리는 가중치에 대한 정보를 제공해 줌으로써, 각 모형이 가격오차를 줄이는데 치중해야 할 자산에 대한 정보를 제공한다. 그리고 이것은 기초자산 및 사용한 모형에 따라 다양할 것이다.

4.5 모멘트의 진단 결과 및 검정통계량

본 절에서는 Snow(91)를 응용하여 도출된 모멘트 하한의 구체적 모습을 제시하고, 이를 이용하여 상술한 이론적 모형들을 진단한 결과 및 이의 검정통계량을 제시한다. 즉 앞에서 제시한 Wolak의 검정통계량이 구체적으로 어떠한 경로를 거쳐서 나오게 되었는지 설명한다. 우선 그림 3은 기초자산인 FF 25 포트폴리오와 T-bill의 월별수익률을 사용하여 도출된 균형가격함수집합상의 모멘트 하한들이고, 그림 4는 분기별 수익률을 사용하였을 때의 그것이다. X축은 가격산정함수의 기대값으로 무위험자산의 가격을 의미하며 월별 수익률은 0.94에서 1.03까지로 가정되며, 분기별 수익률은 0.88에서 1.06까지 가정된다.²⁵ 이 각각의 값들에 대해 기초자산이 요구하는 모멘트 하한이 2차, 3차, 4차 그리고 9차에 대해서 구해져 있다. 따라서 어떤 이론적 가격산정함수가 기초자산의 균형가격함수 집합에 들어오기 위해서는 먼저 사전적 진단으로서 이 모멘트 하한에 하나도 빠짐없이 다 들어와야 한다. 우선 이러한 모멘트 하한의 특성을 살펴보면 곡선의 중심부에서 멀어질수록 경계가 가파르게 상승하는 모습을 보이고 있으며 또한 고차 모멘트로 갈수록 곡률이 사라져 9차의 경우에는 비이커 모양처럼 되어버리는 것을 관찰할 수 있다. 따라서 이로부터 알 수 있는 경험적 사실은 이론적 가격산정함수가 이 하한들에 들어오기 위해서는 일단 그 기대값이 곡선의 중심부(the global minimum moment pricing kernel의 기대값)에서 멀어지면 안된다는 것이다. 일

²⁵ 실증결과 이 범위를 벗어나면 해가 기술적으로 도출되지 않는다. 즉 기술적으로 도출 가능한 최대 범위(buffer)이다.

단, 기대값이 이로부터 멀어져 버리면 모멘트 하한이 폭증하게 되어 그만큼 들어오기가 힘들어진다. 실제 검증결과 이 꼭지점 근처에서는 차수별 모멘트 하한의 증가가 그렇게 크지 않았으나, 여기서 조금만 벗어나면 모멘트 하한이 급속히 상승하였다. 그 결과 이론적 가격산정함수 중에서도 일단 그 기대값이 이 중심부에서 크게 벗어나지 않았다면 고차로 감에 따른 모멘트 하한의 증가(upshifting) 속도를 따라잡는 경우도 있었으나, 출발점에서 이미 그 기대값이 중심부에서 많이 벗어나 있는 경우에는 기초자산이 요구하는 모멘트 하한의 증가 속도를 따라잡지 못하는 모멘트 지체 현상을 보였다. 표 8과 9는 각 이론적 가격산정함수의 차수별 모멘트 값(HJ)과 그림 3과 4로부터 도출된 이의 기대값에 상응하는 모멘트 하한 값(Snow), 둘의 차이(Diff), Diff가 모두 양이라는 귀무가설을 검증하는 Wolak의 검정통계량(W), 그리고 이의 p값(P(W))이 차례대로 제시되어 있다. 제시된 모형들은 전부 H-J 추정 가격산정함수들이며, P(W)가 1%를 넘는 모형들이다.

Diff는 각 이론적 가격산정함수의 실제 모멘트 값에서 기초자산이 요구하는 모멘트 하한 값을 뺀 것으로 이것이 양수이면 하한을 넘는다는 의미이고, 음수이면 그렇지 못하다는 의미이다. 1st는 모멘트의 평균을 서로 맞추기 위한 것이고, 실제 진단은 2nd 부터이다. 이제 이 진단의 결과와 이를 하나의 검정통계량으로 연결시킨 Wolak의 검정통계량(W) 및 p 값의 관계를 살펴보자. 표8과 9를 보면 일반적으로 차이(Diff)가 모두 양인 경우 W의 값이 0에 가깝게 떨어지고, 이의 p 값 역시 25%를 상회하여 직관과도 일치하는 결과를 보여준다. 따라서 굳이 이런 검증을 왜 하는지 혹은 의문을 제기할 수 있다. 이에 대한 답변은 일단 이것은 모두 샘플로 이루어지는 것이기 때문에 표본 추출 오차(sampling error)를 다 함유하고 있고, 따라서 샘플 진단의 결과가 모수와 일치한다고 단정지을 수는 없으므로 이를 고려해서 통계적 검증을 해야 한다는 것이다. 그러나 그 보다 더 중요한 이유는 차수별 진단이 엇갈리는 상황이 발생하게 될 경우, 혹은 모든 진단이 부정적으로 나왔을 경우이다. 모멘트 진단은 전술하였듯 모두 반드시 통과해야만 하는 필요 조건이므로 하나라도 통과하지 못하면 그것은 균형가격함수집합에도 들어올 수 없다는 것을 보장한다. 그러나 이것은 진단을 위해 사용된 모든 표본과 표본유사가 모분포의 그것과 정확히 일치할 때의 얘기이다. 현실적으로는 표본 추출 오차가 항상 존재하기 때문에 진단이 그렇게 나왔다고 하더라도 바로 부정해 버릴 수는 없으며, 다변량 부등식 제약을 귀무가설로 세우고 통계적 검증 결과에 따른 유의수준적 판단을 내려야 하는 것이다. 표 8과 9에서 보듯이 Diff가 모두 양수로 나온 경우에는 진단결과와 검증결과가 일치한다. 그러나 CAPM(JAN)의 경우에는 샘플 진단은 3차에서 모멘트 하한에 미달하였으나, 실제 검증결과는 p 값이 25%로써 모형이 모멘트 하한을 유의수준 25%로 통과한다고 결론 짓고 있다. NULL(IP)의 경우에도 모든 차수에 대해서 샘플 진단이 부정으로 나왔음에도, 최종적인 검증 결과는 4% 유의수준에서 모형을 통과시킨다. 표 9의 경우에도 FF3(CAY), COCH(CAY), COCH(JAN), CAPM(GNP) 모형의 샘플 진단 결과는, 일부 혹은 모든 차수에서 모멘트 하한에 미달하는 것으로 나왔으나, 최종적인 다변량 진단의 검증결과는 모두 25% 유의수준에서 모형이 모멘트 요건을 충족한다고 결론 짓고 있다.

4.6 모형간 비교

표 10은 본 연구가 상정한 월별 수익률 기준 9개, 그리고 분기별 수익률 기준 20개의 모형들을 최대가격오차(확률변수로는 최소거리)가 가장 작은 모형부터 정렬되어 있다. 그리고 각각의 모형의 H-S 검증, W(HS) 검증, H-J 검증, W(HJ) 검증이 그 p 값과 함께 다시 한번 제시되어 있으며, 1% 유의수준에서 통과한 모형은 (**)가, 기각된 모형은 (*)가 p값의 상첨자로 표시되어 있다.²⁶ 우선 H-J 검증과 W(HJ) 검증의 관계에 있어서 통계적 결론 역시 후자가 전자의 필요조건이라는 이론적 관계를 잘 보여주고 있다. 그러나 H-S 검증과 W(HS) 검증 간에는 그런 이론적 관계가 없으며, 통계적 결론도 FF3(IP), COCH(CAY), COCH(GNP)의 경우처럼 모먼트 검증에서 기각되었음에도, 실제 H-S 검증에서는 통과되는 경우도 발생한다. 또한 재미있는 것은 최소거리 혹은 최대가격오차가 작을수록 H-J 검증을 통과할 확률도 높아지지만 반드시 그런 것은 아니라는 것이다. 즉, Panel B의 FF3 모형과 COCH(GNP)모형을 보면, FF3 모형의 검정통계량 값(HJ-T)은 61.93으로 제시된 모형들 중 상위에 위치하지만 실제 검증결과는 1% 유의수준으로 기각되는 반면, COCH(GNP) 모형의 검정통계량 값은 66.82로 중간에 위치함에도 이의 p 값은 15%로 10% 유의수준에서 통과되고 있다. 이러한 현상이 나타나는 이유는 귀무가설 분포 때문인데 식 (46)의 A 행렬의 구성을 보면 모든 모형에 고정적인 W_T 행렬 외에, 모형에 의존하게 되는 D_T, S_T 도 포함되어 있음을 알 수 있다. 따라서 귀무가설 분포 및 p 값은 모형의 구조 및 모형의 추정치에 의존하게 되어 이처럼 H-J 검정통계량 값이 더 크어도 p 값이 더 커지는 현상이 나타날 수 있다. 그러나 일반적으로는 검정통계량의 값이 적은 모형이 p 값도 높음을 볼 수 있으며, H-J 검정통계량 기준으로 봤을 때 가장 좋은 모형은 월별 수익률 기준 모형들 중에서는 FF3(IP)와 FF3(JAN)모형이고, 이의 p값 역시 9%와 10%로 가장 좋다. 그리고 분기별 수익률 기준 모형들 중에서는 FF3(GNP), FF3(JAN), CCAPM(JAN) 모형이 최대가격오차가 가장 작으며, 이들의 p 값 역시 각각 50%, 7%, 7%로써 COCH(GNP)를 제외하고서는 가장 높다.

4.7 모형별 가격 오차 및 조건부 변수의 효과

본 절은 H-J 검증의 모형별 가격오차벡터($g_T(\hat{b}_{HW})$)가 자산별로 어떻게 나오는 지를 분석한다. 전술하였듯 귀무가설 분포의 모형 의존성 때문에 가격오차벡터가 준다고 H-J 검증에 반드시 통과하는 것은 아니지만, 가격오차벡터가 줄어들면 검증통계량의 값이 줄어들어 검증에 통과할 확률이 그만큼 높아질 것이다. 그림 5는 월별수익률 기준 모형들의 가격오차벡터를 보여주고 있다. Null 모형의 경우 IP의 추가는 모형의 가격오차를 더 늘리고, 반면 JAN 더미변수는 가격오차를 줄여준다. 가격오차의 범위는 월별 수익률 기준으로 0.4%에서 1.4%까지로 상당히 과대 평가되고 있다.²⁷ 또한 자기자본의 book to market ratio가 높을수

²⁶ NA는 기술적으로 통계량이 나올 수 없는 경우이다.

²⁷ 1을 기준으로 하는 상대가격이다. 즉, 절대가격 기준으로는 상당히 과소평가되고 있다.

록 가격오차(pricing error)가 커져 이 이상현상을 효과적으로 잠재우지 못하고 있다. 표 10
 으로부터 이 모형들 중 H-J 검증을 유의수준 1%로 통과하는 모형은 없다. CAPM의 경우
 IP로 스케일 조정하는 것은 모형의 가격오차를 조금 더 심화시키는 반면, JAN은 가격오차
 를 완화시킨다. 대기업(large firm)으로 갈수록 가격오차가 줄어드나, 소기업(small firm)에
 서 보다 확실히 나타나는 book to market 효과를 역시 잡지 못하며, 구체적으로 low book
 to market 주식은 과소평가를, high book to market 주식은 과대평가를 하고 있다. 전체적
 인 가격오차의 범위는 월별수익률 기준 -0.5%에서 0.5% 사이이며 이 모형들 중 H-J 검증을
 1% 유의수준에서 통과하는 모형은 없다. FF3 모형의 경우는 size 효과, book to market
 효과가 사라지며 가격오차 범위 또한 11,12를 제외하면 -0.2%에서 0.1% 사이로 위 모형들
 에 비해 상당히 줄어든다. 그리고 조건부 변수의 도입은 비조건부 모형에서 오차가 특히 컸
 던 포트폴리오 11,12,21,54,55의 오차를 상당히 줄여주어, 표 10에서 보듯이 FF3(IP)와
 FF3(JAN) 모형이 H-J 검증을 약 10% 유의수준으로 통과하는데 많은 공헌을 한 것으로 보
 인다. 그림 5는 분기별 수익률 기준 모형들의 가격오차백터를 보여주고 있다. 먼저 NULL
 모형의 경우 GNP, JAN, CAY순으로 비조건부 모형에 비해 가격오차백터가 체계적으로 줄어
 든다. 그러나 CAY의 경우에도 가격오차의 범위가 분기별 수익률 기준으로 0%에서 2% 사
 이에 분포하며, book to market 효과가 고스란히 나타난다. 이 모형들 중 H-J 검증을 1%
 유의수준으로 통과하는 모형은 없다. CAPM의 경우 size가 커질수록 가격 오차 및 book to
 market 효과가 확연히 줄어들음을 관찰할 수 있다. 그리고 GNP, CAY로 스케일 조정하는 것
 은 비조건부 모형에 비해 크게 차이가 없으며, JAN으로 스케일 조정하는 것은 비조건부 모
 형을 기준으로 low book to market의 경우(포트폴리오 11, 12, 13, 21, 22)에는 가격오차를
 확대시키지만(과소평가하지만), high book to market의 경우는 가격오차를 상당히 줄여준다.
 전체적인 가격 오차의 범위는 -2%에서 2% 사이에 분포하며, 이 모형들 중 H-J 검증을 1%
 유의수준으로 통과하는 모형은 없다. FF3의 경우 앞의 월별수익률 때와 마찬가지로 size
 효과와 book to market 효과가 거의 사라지며, 전체적인 가격오차의 범위는 분기별 수익률
 기준으로 -0.5%에서 0.5% 사이에 골고루 분포한다. 특히 GNP로 스케일 조정한 모형이 비
 조건부 모형에서 특히 가격오차가 큰 포트폴리오 11의 가격오차를 상당히 줄여준다. 그 결
 과 표 10으로부터 FF3(GNP) 모형의 p값은 50%에 육박한다. 그 외 FF3(JAN), FF3(CAY)
 의 p값도 각각 7%와 1%이다. 그러나 비조건부 모형인 FF3 모형은 1% 유의수준에서 기각
 된다. 그림에서 보듯이 4가지 모형의 궤적이 거의 유사함에도 최종적인 p값에서 이런 차이
 를 보이는 것은 전술하였듯 귀무가설 분포가 모형에 따라 다르기 때문이다. CCAPM의 경우
 비조건부 모형(CCAPM)에 비해 CCAPM(GNP), CCAPM(CAY), CCAPM(JAN) 순으로 가격
 오차가 체계적으로 줄어드는 것을 관찰할 수 있다. 그리고 이의 p값 역시 차례대로 2%, 4%,
 4%, 7%인 것을 표 10으로부터 확인할 수 있다. 조건부 변수들이 사이즈 효과와 book to
 market effect를 점점 줄여가서, CCAPM(JAN)의 경우 size 효과는 거의 사라지고, book to
 market 효과 역시 분기별 수익률 기준으로 -0.5%에서 0.5% 사이로 상당히 희석됨을 알 수
 있다. 마지막으로 COCH 모형의 경우 비조건부 모형은 book to market 효과가 확연히 나타
 나며, 특히 high book to market 포트폴리오에 대해서 과대평가하고 있음을 알 수 있다. 그

러나 COCH(CAY), COCH(JAN)모형의 경우 이러한 효과가 상당히 희석됨을 관찰할 수 있으며, 이들의 HJ 검정통계량 및 p 값은 표 10으로부터 COCH(CAY)의 경우 62.93, 4% 그리고 COCH(JAN)의 경우 66.50, 3%이다. 그리고 COCH(GNP)의 경우는 book to market 효과가 위 모형들과 마찬가지로 상당히 희석되지만, 가격오차의 절대적 수준이 0.5%에서 1.5%사이에서 형성되어 가격오차 자체가 줄지는 않고 있다. 그 결과 HJ 검정통계량의 값 역시 비조건부 모형(81.66)에 비해서는 작아지지만, 다른 조건부 모형들에 비해서는 큰 66.82를 보여주고 있다. 그렇지만 그럼에도 불구하고 검정통계량의 p 값은 이들보다 훨씬 더 큰 15%를 보이고 있는데 그 이유는 전술한 바대로 귀무가설 분포의 모형 의존성때문이다. 즉, 가격산정오차가 더 커졌고 그 결과 검정통계량의 값이 더 커져서 X축상 오른쪽으로 간다 하더라도, 모형에 의존하여 도출되는 귀무가설의 분포(weighted sum of $\chi^2(1)$)가 더 오른쪽으로 가버리거나 치우쳐 버리면 이러한 현상이 일어날 수 있다.

5. 결론

본 연구는 기초자산이 요구하는 모멘트의 하한을 도출하고 이를 이용해서 이론적 금융자산 가격결정모형을 진단하고 검정하는 방법을 다루고 있다. 그것은 Snow(1991)와 Wolak(1987)을 결합시키는 작업이었다. 본 연구는 이러한 방법론을 이용하여 기존의 이론적 금융자산 가격결정 모형들을 진단 및 검정해 보았다. 또한 도출된 결과를 비교해 보는 잣대(benchmark)로서 재무에서 자주 사용하는 Hansen-Singleton의 최적 GMM 검정과 Hansen-Jagannathan의 최소거리 검정(minimum distance test)으로 동 모형을 검정해 보았다. 그리하여 최종적으로 도출된 세 개의 검증 결과를 놓고 상호 비교 분석해 봄으로써, 본 연구의 모멘트 검정이 상술한 두 검정과 어떠한 관계를 보이는지를 살펴보았다. 분석의 결과 및 기타 본 연구와 관련한 시사점은 다음과 같다. 첫째, Hansen이 추론한 대로 본 연구의 모멘트 진단과 H-J 검증의 확률변수 진단 사이에는 전자가 후자의 필요조건이라는 것을 실증적으로 확인할 수 있었다. 즉, 본 연구의 모멘트 검증과 H-J 최소거리 검증의 필요조건 관계를 부정하는 사례는 발견되지 않았다. 이러한 실증 결과로부터 본 연구의 모멘트 검증은 보다 엄밀한 H-J 검증에 들어가기 전의 사전적 진단 및 검증으로 사용되면 좋을 것 이란 시사점을 얻었다. 둘째, 모멘트 진단의 장점은 그것이 이론적 모형 연구자들에게 모멘트 측면에서 유용한 정보를 제공해 줄 수 있다는 것이다. 본 연구는 모멘트 하한을 다양한 차수에 대해 구해봄으로써 기초자산이 던져주는 약간의 의미있는 정보를 찾을 수 있었다. 그것은 이론적 모형이 H-J 검증을 통과하기 위해서는, 일단 먼저 그 기대값이 기초자산으로부터 도출된 모멘트 하한의 중심부 즉, global minimum moment pricing kernel의 기대값 근처에 존재해야 한다는 것이다. 그 이유는 여기서 벗어날수록 모멘트 하한이 체증하게 되어 이를 상회하기가 점점 어려워지기 때문이다. 그리고 그렇게 되면 이 진단의 필요조건으로서의 성격상 HJ 검증에서는 당연히 기각될 것이다. 셋째, 기존의 모형들을 대상으로 H-S

검증, H-J 검증, 그리고 본 연구의 모먼트 검정 결과를 상호 비교해 본 결과 서로 엇갈리는 판단을 제공하는 경우가 상당수 존재하였다. 상술하였듯 모먼트 검정과 H-J 검증사이의 필요조건 관계를 제외하고선, 이 세 개의 검증 사이에는 아무런 논리적 관계도 없으므로, 검증 결과 역시 얼마든지 엇갈릴 수 있다. 이럴 때 연구자는 각자의 재량으로 각 검증의 p값을 종합적으로 고려하면서 통계적 판단을 내릴 수밖에 없다. 그러나 동일한 가설을 검증하는 세 개의 검증 결과를 동시에 고려함으로써 한 검정에만 전적으로 의존할 때에 비해 1종 오류의 위험과 2종 오류의 위험을 보다 더 줄일 수 있을 것이다. 넷째, H-J 검증을 적당한 유의수준(1%)에서 통과한 모형을 대상으로 그 계수 추정치들의 경제적 의미를 분석해 봄으로써 이론이 얘기하는 시장에서 인기 있는 자산이란 어떤 자산일까 생각해 보았다. 그 결과 개인의 소비성장률이 높을 때, 총자산 대비 투자 비율이 높을 때, 투자 중에서도 금융자산 투자비율이 높을 때 현금흐름이 많은 자산일수록 모형상 인기 있는 자산이었다. 또한 시장 포트폴리오 수익률과는 반대로 움직일수록 좋은 자산이었는데, 이는 소득에 대한 일종의 보험(헷징)역할을 해주는 자산일수록 좋은 자산이란 의미로 해석할 수 있다. 다섯째, Hansen-Jagannathan bound는 2차 모먼트 진단이다. 이를 고차 모먼트 진단으로 확장하기 위해서는 Hansen이 얘기한 추상적 최적화 문제를 실현가능한(feasible) 구체적 최적화 문제로 바꾸어야 한다. 본 연구는 Snow(91)를 참고하여 이러한 기술적 난점을 극복하며, 이론적으로 무한대 모먼트까지 그 하한을 도출할 수 있는 시스템을 구축하였다. 그리고 이를 통해 9차 모먼트 하한까지 구해봄으로써 모먼트 하한이 고차쪽으로 갈수록 곡률이 사라진다는 경험적 사실을 알 수 있었다. 여섯째, 이론적 모형이 내포하는 가격산정함수에 대한 차수별 모먼트 진단은 샘플 진단으로써 표본추출오차(sampling error)를 필연적으로 함유한다. 또한 차수별로 모먼트 진단이 엇갈릴 수도 있다. 따라서 이러한 모든 사항을 감안하여 모먼트 진단에 대한 최종 진단을 내릴 수 있다면 좋을 것이다. 본 연구는 Wolak(1987)을 참고하여 차수별 모먼트 진단에 대한 최종진단이라고 할 수 있는 검정통계량 및 귀무가설 분포를 도출하고 해당하는 p값을 제시한다. 이를 통해 차수별 샘플 모먼트 진단이 표본추출오차(sampling error)까지 고려한 종합적인 진단으로 바뀐다. 향후 연구의 개선방향은 다음과 같다.

모먼트 검정의 power가 H-S나 H-J 검증에 비해 많이 떨어진다. 따라서 이를 제고시킬 수 있는 방법들을 생각해 보아야 한다. 모먼트 검정이 H-J 혹은 H-S 검증과 대등한 검증이 되기 위해서는 power의 개선이 필요하다. 현재로서는 본격적인 H-J 검증에 들어가기 전, 실시할 수 있는 사전적 필요조건 검증 정도의 의미를 갖고있다.

<Appendix> Upper And Lower Bounds For The Critical Value For Jointly Testing

Equality And Inequality Restrictions

The values in the table are obtained by solving the following equation for c, given α and df.

$$\alpha = (1/2) \cdot \Pr[\chi^2(df-1) \geq c] + (1/2) \cdot \Pr[\chi^2(df) \geq c]$$

df	α						
	0.25	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001
1	0.455	1.642	2.706	3.841	5.412	6.635	9.5
2	2.09	3.808	5.138	6.483	8.273	9.634	12.81
3	3.475	5.528	7.045	8.542	10.501	11.971	15.357
4	4.776	7.094	8.761	10.384	12.483	14.045	17.612
5	6.031	8.574	10.371	12.103	14.325	15.968	19.696
6	7.257	9.998	11.911	13.742	16.074	17.791	21.666
7	8.461	11.383	13.401	15.321	17.755	19.54	23.551
8	9.648	12.737	14.853	16.856	19.384	21.232	25.37
9	10.823	14.067	16.274	18.354	20.972	22.879	27.133
10	11.987	15.377	17.67	19.824	22.525	24.488	28.856

참 고 문 헌

- Hansen, L., 1982. Large sample properties of generalized method moments estimators. *Econometrica* 50, 1029-1054.
- Hansen, L., Singleton, K., 1982. Generalized instrumental variable estimation of nonlinear rational expectation models. *Econometrica* 50, 1069-1286.
- Hansen, L., Jagannathan, R., 1997. Assessing specification errors in stochastic discount factor models. *Journal of Finance* 52, 557-590.
- Hodrick, R., Prescott, E., 1997. Postwar U.S. business cycles: an empirical investigation. *Journal of Money, Credit and Banking* 29, 1-16.
- Jagannathan, R., Wang, Z., 1996. The conditional CAPM and the cross-section of expected returns. *Journal of Finance* 51, 3-53.
- Kodde, David A. and Franz C. Palm, 1986, Wald criterion for jointly testing equality and inequality restrictions, *Econometrica* 54, 1243-1248.
- Lettau, M., Ludvigson, S., 2001. Consumption, aggregate wealth and expected stock returns. *Journal of Finance* 56, 815-849.
- Newey, Whitney K., and Kenneth D. West, 1987, A simple, positive semi-definite, heteroskedasticity and autocorrelation consistent covariance matrix, *Econometrica* 55, 703-708.
- Snow, Karl N., 1991, Diagnosing asset pricing models using the distribution of asset returns, *Journal of finance* 46, 955-983.
- Wolak, Frank A., 1987, An exact test for multiple inequality and equality constraints in the linear regression model, *Journal of the American Statistical Association* 82, 782-793.

Table 1. Summary statistics for Fama–French 25 portfolios

The data are monthly returns on the Fama–French 25 portfolios from 1952:01 to 1997:12 in excess of the one-month T-bill rate. Portfolios are numbered ij with i indexing size increasing from one to five and j indexing book-to-market ratio increasing from one to five.

Portfolios	BM 1	BM 2	BM 3	BM 4	BM5
panel A : Means					
Size 1	0.30	0.77	0.80	1.03	1.15
Size 2	0.45	0.73	0.94	1.02	1.12
Size 3	0.59	0.81	0.82	0.98	0.99
Size 4	0.58	0.60	0.86	0.87	0.93
Size 5	0.57	0.61	0.69	0.70	0.78
panel B : Standard errors					
Size 1	7.18	6.15	5.48	5.18	5.54
Size 2	6.50	5.52	4.97	4.80	5.37
Size 3	5.94	4.97	4.61	4.51	5.10
Size 4	5.26	4.76	4.52	4.47	5.15
Size 5	4.53	4.28	4.01	4.14	4.66
panel C : T-statistics					
Size 1	0.97	2.92	3.42	4.66	4.87
Size 2	1.62	3.13	4.44	4.98	4.89
Size 3	2.33	3.85	4.20	5.10	4.57
Size 4	2.60	2.95	4.47	4.57	4.25
Size 5	2.97	3.33	4.01	3.96	3.91

Table 2. Predictive power of conditioning variables used to scale factors

The estimated OLS regression is $R_{vw}(t) = b_0 + b_1 cycle(t-1) + \varepsilon(t)$. R_{vw} is the value-weighted return from CRSP. The sample period is from 1952 to 1997. The series IP and GNP are the Hodrick-Prescott(1997) filtered cyclical components of industrial production and real GNP, respectively. The series CAY is the consumption-wealth ratio calculated by Lettau and Ludvigson(2001).

	Constant	Cycle	R2
Panel A : Monthly cycle = IP			
b	0.01	-0.10	0.01
se(b)	0.00	0.06	
T-stat	5.99	-1.76	
Panel B : Quartely cycle = GNP			
b	0.03	-0.86	0.04
se(b)	0.01	0.32	
T-stat	5.61	-2.68	
Panel C : Quartely cycle = CAY			
b	0.03	2.31	0.10
se(b)	0.01	0.52	
T-stat	5.93	4.41	

Table 3. Summary of models (monthly return)

The data used as basis assets are the gross returns on the Fama-French 25 portfolios and the T-bill. Sample period is from 1952:01 to 1997:12. Cycle(IP) is the cyclical component in the industrial production index; Cycle(GNP) is the cyclical element in real GNP; Cycle(CAY) is from Lettau and Ludvigson(2001). JAN is a dummy variable with value one for January and zero otherwise. J is test statistic of optimal GMM test. P(J) is its p-value. W(J) is test statistic under the null hypothesis that the optimal GMM estimate satisfies moment restrictions by basis assets from the second order to the fourth order. P(WJ) is its p-value. HJ-dist(δ) is Hansen-Jagannathan distance. Max.Error is the maximum pricing error of basis assets according to Hansen-Jagannathan distance. It is annualized by multiplying standard error of 20% under the assumption $E(m)=E(y)$. HJ is Hansen-Jagannathan distance test statistic under the null $\delta=0$. P($\delta=0$) is its p-value. Moment bound test for pricing kernel estimate by Hansen-Jagannathan distance test is also done as the optimal GMM estimate; W(HJ), P(WHJ). P-Wald(b^*) is the p-value of the wald test that all conditional estimates in Hansen Jagannathan distance test, b^* , are zero. No. of para is the number of parameters in irrespective model.

Panel A : Monthly models with nonscaled factors

MODEL	NULL	CAPM	FF3
Hansen-Singleton optimal GMM test			
Hansen's J	111.541	95.890	65.842
p(J)	0.000	0.000	0.000
Wolak	NA	809.816	945.402
p(W)	NA	0.000	0.000
Hansen-Jagannathan minimum distance test			
HJ-dist(δ)	0.446	0.418	0.358
Max.Error	0.090	0.084	0.072
HJW	109.932	96.368	70.590
p($\delta=0$)	0.000	0.000	0.000
Wolak	NA	537.592	93.272
p(W)	NA	0.000	0.000
p-Wald(b^*)	NA	0.002	0.000
No. of para	1	2	4

Panel B : Monthly models with scaled factors by cycle(IP)

MODEL	NULL	CAPM	FF3
Hansen-Singleton optimal GMM test			
Hansen's J	80.875	48.494	24.210
p(J)	0.000	0.001	0.148
Wolak	2543.071	15.599	23.933
p(W)	0.000	0.000	0.000
Hansen-Jagannathan minimum distance test			
HJ-dist(δ)	0.439	0.385	0.302
Max.Error	0.088	0.077	0.061
HJW	106.537	81.755	50.473
p($\delta=0$)	0.000	0.001	0.093
Wolak	7.584	0.000	0.000

p(W)	0.041	>0.25	>0.25
p-Wald(b*)	0.165	0.029	0.085
No. of para	2	4	8

Panel C : Monthly models with scaled factors by JAN

MODEL	NULL	CAPM	FF3
Hansen-Singleton optimal GMM test			
Hansen's J	105.879	51.007	40.485
p(J)	0.000	0.000	0.002
Wolak	NA	834.514	0.000
p(W)	NA	0.000	>0.25
Hansen-Jagannathan minimum distance test			
HJ-dist(δ)	0.431	0.391	0.307
Max.Error	0.087	0.079	0.062
HJW	102.725	84.468	52.097
p($\delta=0$)	0.000	0.000	0.101
Wolak	NA	0.435	0.000
p(W)	NA	>0.25	>0.25
p-Wald(b*)	0.006	0.110	0.092
No. of para	2	4	8

Table 4. Summary of models (quarterly return)

The data used as basis assets are the gross returns on the Fama–French 25 portfolios and the T-bill. Sample period is from 1952:01 to 1997:04. Cycle(IP) is the cyclical component in the industrial production index; Cycle(GNP) is the cyclical element in real GNP; Cycle(CAY) is from Lettau and Ludvigson(2001). JAN is a dummy variable with value one for January and zero otherwise. J is test statistic of optimal GMM test. P(J) is its p-value. W(J) is test statistic under the null hypothesis that the optimal GMM estimate satisfies moment restrictions by basis assets from the second order to the fourth order. P(WJ) is its p-value. HJ-dist(δ) is Hansen–Jagannathan distance. Max.Error is the maximum pricing error of basis assets according to Hansen–Jagannathan distance. It is annualized by multiplying standard error of 20% under the assumption $E(m)=E(y)$. HJ is Hansen–Jagannathan distance test statistic under the null $\delta=0$. $P(\delta=0)$ is its p-value. Moment bound test for pricing kernel estimate by Hansen–Jagannathan distance test is also done as the optimal GMM estimate; $W(HJ)$, $P(WHJ)$. P-Wald(b^*) is the p-value of the wald test that all conditional estimates in Hansen Jagannathan distance test, b^* , are zero. No. of para is the number of parameters in irrespective model.

Panel A : Quartely models with nonscaled factors

MODEL	NULL	CAPM	FF3	CCAPM	COCH
Hansen–Singleton optimal GMM test					
Hansen's J	149.876	92.546	63.778	165.681	96.423
p(J)	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
Wolak	NA	58222.043	448.195	3146.493	14460.605
p(W)	NA	0.000	0.000	0.000	0.000
Hansen–Jagannathan minimum distance test					
HJ-dist(δ)	0.709	0.660	0.580	0.623	0.666
Max.Error	0.144	0.134	0.118	0.127	0.135
HJW	92.466	80.111	61.929	71.378	81.655
$p(\delta=0)$	0.000	0.000	0.001	0.017	0.001
Wolak	NA	557.401	153.752	0.000	46.785
p(W)	NA	0.000	0.000	>0.25	0.000
p-Wald(b^*)	NA	0.004	0.000	0.060	0.009
No. of para	1	2	4	2	3

Panel B : Quartely models with scaled factors by cycle (Lag GNP)

MODEL	NULL	CAPM	FF3	CCAPM	COCH
Hansen–Singleton optimal GMM test					
Hansen's J	169.783	62.462	32.111	116.844	22.914
p(J)	0.000	0.000	0.021	0.000	0.293
Wolak	240.558	1604.632	5.827	553.680	229.007
p(W)	0.000	0.000	0.090	0.000	0.000
Hansen–Jagannathan minimum distance test					
HJ-dist(δ)	0.706	0.636	0.485	0.595	0.603
Max.Error	0.143	0.129	0.098	0.121	0.122
HJW	91.665	74.416	43.236	65.143	66.818

p($\delta=0$)	0.000	0.003	0.502	0.038	0.148
Wolak	1087.236	1.505	0.000	0.000	0.000
p(W)	0.000	>0.25	>0.25	>0.25	>0.25
p-Wald(b [*])	0.376	0.127	0.207	0.244	0.134
No. of para	2	4	8	4	6

Panel C : Quartely models with scaled factors by CAY

MODEL	NULL	CAPM	FF3	CCAPM	COCH
Hansen-Singleton optimal GMM test					
Hansen's J	70.343	99.526	36.915	46.626	35.996
p(J)	0.000	0.000	0.005	0.002	0.015
Wolak	711.174	113.411	4.538	3,964.067	354.308
p(W)	0.000	0.000	0.172	0.000	0.000
Hansen-Jagannathan minimum distance test					
HJ-dist(δ)	0.683	0.653	0.560	0.587	0.585
Max.Error	0.138	0.132	0.114	0.119	0.119
HJW	85.773	78.413	57.788	63.317	62.930
p($\delta=0$)	0.000	0.000	0.005	0.044	0.044
Wolak	18.113	869.814	1.657	0.000	0.183
p(W)	0.000	0.000	>0.25	>0.25	>0.25
p-Wald(b [*])	0.064	0.434	0.387	0.079	0.120
No. of para	2	4	8	4	6

Panel D : Quartely models with scaled factors by JAN

MODEL	NULL	CAPM	FF3	CCAPM	COCH
Hansen-Singleton optimal GMM test					
Hansen's J	73.359	80.015	53.648	86.517	41.745
p(J)	0.000	0.000	0.000	0.000	0.003
Wolak	NA	21.923	0.014	10607.501	23.906
p(W)	NA	0.000	>0.25	0.000	0.000
Hansen-Jagannathan minimum distance test					
HJ-dist(δ)	0.661	0.617	0.537	0.560	0.601
Max.Error	0.134	0.125	0.109	0.114	0.122
HJW	80.479	70.086	53.020	57.607	66.503
p($\delta=0$)	0.000	0.001	0.066	0.066	0.027
Wolak	NA	88.613	0.000	0.000	2.571
p(W)	NA	0.000	>0.25	>0.25	>0.25
p-Wald(b [*])	0.000	0.000	0.181	0.004	0.057
No. of para	2	4	8	4	6

Table 5. Parameter estimates of interesting models (monthly return)

The data used as basis assets are the gross returns on the Fama–French 25 portfolios and the T-bill. Sample period is from 1952:01 to 1997:12. The models are estimated by Hansen Jagannathan distance test and significant at the 1% level. The estimated parameters, \hat{b} , are the factor sensitivity defined in Eq.(35); The covRP's are the covariance risk prices defined in Eq.(27); The betaRP's are the beta risk prices defined in Eq.(28). The standard errors for the parameter estimates are provided in the rows labeled se.

Monthly FF3 with scaled factors by JAN, pval=0.1

	C	Rvw	SMB	HML	JAN	Rvw*JAN	SMB*JAN	HML*JAN
B	1.03	-0.04	0.14	-0.01	2.22	-0.03	-0.99	-0.09
Se	0.05	0.03	0.07	0.06	1.51	0.30	0.46	0.55
T-stat	19.62	-1.25	1.96	-0.21	1.47	-0.08	-2.15	-0.16
CovRP		0.04	-0.14	0.01	-2.23	0.03	1.00	0.09
Se		0.03	0.07	0.06	1.51	0.30	0.46	0.55
T-stat		1.25	-1.96	0.21	-1.47	0.08	2.15	0.16
betaRP		0.61	0.15	0.39	0.00	0.35	0.82	0.27
se		0.31	0.25	0.19	0.05	0.52	0.34	0.25
T-stat		1.97	0.60	2.07	-0.02	0.68	2.39	1.08

Monthly FF3 with scaled factors by cycle(IP), pval=0.09

	C	Rvw	SMB	HML	IP	Rvw*IP	SMB*IP	HML*IP
b	1.12	-0.05	-0.04	-0.07	-0.29	0.00	0.05	0.00
se	0.09	0.02	0.03	0.04	0.13	0.02	0.04	0.03
T-stat	12.77	-2.67	-1.18	-1.92	-2.29	-0.21	1.46	-0.14
covRP		0.05	0.04	0.07	0.29	0.01	-0.05	0.00
se		0.02	0.03	0.04	0.13	0.02	0.04	0.03
T-stat		2.67	1.18	1.92	2.29	0.21	-1.46	0.14
betaRP		0.65	0.15	0.38	2.44	1.55	-2.42	0.86
se		0.30	0.17	0.17	1.07	3.68	2.31	1.64
T-stat		2.17	0.88	2.18	2.28	0.42	-1.05	0.52

Table 6. Parameter estimates of interesting models (quarterly return)

The data used as basis assets are the gross returns on the Fama–French 25 portfolios and the T-bill. Sample period is from 1952:01 to 1997:04. The models are estimated by Hansen Jagannathan distance test and significant at the 1% level. The estimated parameters, \hat{b} , are the factor sensitivity defined in Eq. (35); The covRP's are the covariance risk prices defined in Eq. (27); The betaRP's are the beta risk prices defined in Eq. (28). The standard errors for the parameter estimates are provided in the rows labeled se.

Quarterly FF3 with scaled factors by cycle(lag GNP), pval=0.5

	C	Rvw	SMB	HML	GNP	Rvw*GNP	SMB*GNP	HML*GNP
b	1.032	-0.086	0.004	-0.018	-0.137	-0.070	0.067	0.057
se	0.111	0.036	0.032	0.031	0.294	0.041	0.044	0.043
T-stat	9.315	-2.394	0.110	-0.598	-0.466	-1.705	1.519	1.333
covRP		0.087	-0.004	0.019	0.139	0.071	-0.068	-0.058
se		0.036	0.033	0.031	0.298	0.042	0.045	0.043
T-stat		2.394	-0.110	0.598	0.466	1.705	-1.519	-1.333
betaRP		2.065	0.531	1.043	0.523	12.551	-0.299	-5.963
se		1.495	0.616	0.986	0.727	6.511	2.159	3.987
T-stat		1.381	0.862	1.058	0.719	1.928	-0.139	-1.496

Quarterly COCHRANE with scaled factors by cycle(lag GNP), pval=0.15

	C	GNR	GR	GNP	GNR*GNP	GR*GNP
b	1.411	0.018	-0.040	-0.156	-0.048	-0.009
se	0.417	0.046	0.015	0.268	0.025	0.011
T-stat	3.382	0.393	-2.697	-0.580	-1.949	-0.792
covRP		-0.018	0.040	0.158	0.049	0.009
se		0.046	0.015	0.272	0.025	0.011
T-stat		-0.393	2.697	0.580	1.949	0.792
betaRP		0.576	9.024	0.821	19.420	10.691
se		4.070	5.214	0.694	9.154	13.464
T-stat		0.141	1.731	1.182	2.121	0.794

Quarterly FF3 with scaled factors by JAN, pval=0.07

	C	Rvw	SMB	HML	JAN	Rvw*JAN	SMB*JAN	HML*JAN
b	1.374	-0.063	0.089	-0.110	-0.948	0.062	-0.220	0.228
se	0.140	0.025	0.060	0.040	0.768	0.079	0.173	0.116
T-stat	9.790	-2.485	1.496	-2.732	-1.234	0.791	-1.272	1.974
covRP		0.064	-0.090	0.111	0.961	-0.063	0.223	-0.231
se		0.026	0.060	0.041	0.778	0.080	0.175	0.117
T-stat		2.485	-1.496	2.732	1.234	-0.791	1.272	-1.974
betaRP		2.047	0.487	1.129	0.146	1.512	1.693	-0.329
se		0.734	0.545	0.547	0.080	0.760	0.827	0.561
T-stat		2.788	0.894	2.065	1.837	1.990	2.047	-0.586

Quartely CCAPM with scaled factors by JAN, pval=0.07

	C	CG	JAN	CG*JAN
b	0.426	0.240	-0.668	-0.082
se	0.376	0.137	0.573	0.145
T-stat	1.132	1.750	-1.165	-0.568
covRP		-0.243	0.679	0.084
se		0.139	0.583	0.147
T-stat		-1.750	1.165	0.568
betaRP		-2.974	0.162	-0.154
se		1.639	0.057	0.668
T-stat		-1.815	2.854	-0.231

Quartely COCHRANE with scaled factors by CAY, pval=0.04

	C	GNR	GR	CAY	GNR*CAY	GR*CAY
b	0.934	0.037	-0.013	-0.294	0.017	-0.039
se	0.263	0.036	0.014	0.282	0.038	0.017
T-stat	3.556	1.036	-0.882	-1.040	0.430	-2.340
covRP		-0.038	0.013	0.298	-0.017	0.040
se		0.036	0.014	0.286	0.039	0.017
T-stat		-1.036	0.882	1.040	-0.430	2.340
betaRP		-4.174	7.118	0.332	0.783	15.428
se		3.188	5.251	0.247	5.208	6.530
T-stat		-1.309	1.356	1.344	0.150	2.363

Quartely CCAPM with scaled factors by CAY, pval=0.04

	C	CG	CAY	CG*CAY
b	0.349	0.209	-0.806	0.104
se	0.319	0.113	0.359	0.059
T-stat	1.094	1.850	-2.247	1.748
covRP		-0.212	0.819	-0.106
se		0.115	0.364	0.060
T-stat		-1.850	2.247	-1.748
betaRP		-2.727	0.394	0.165
se		1.481	0.236	2.082
T-stat		-1.841	1.666	0.079

Quartely CCAPM with scaled factors by cycle(lag GNP), pval=0.04

	C	CG	GNP	CG*GNP
b	0.319	0.198	0.226	-0.074
se	0.292	0.107	0.156	0.051
T-stat	1.093	1.847	1.449	-1.454
covRP		-0.201	-0.230	0.076
se		0.109	0.158	0.052

T-stat	-1.847	-1.449	1.454
betaRP	-2.851	0.119	3.706
se	1.550	0.534	3.745
T-stat	-1.839	0.222	0.990

Quartely COCHRANE with scaled factors by JAN, pval=0.03

	C	GNR	GR	JAN	GNR*JAN	GR*JAN
b	1.194	-0.012	0.012	-1.045	0.141	-0.053
se	0.190	0.032	0.018	0.489	0.063	0.038
T-stat	6.279	-0.384	0.685	-2.139	2.215	-1.393
covRP		0.012	-0.013	1.059	-0.143	0.054
se		0.032	0.018	0.495	0.064	0.038
T-stat		0.384	-0.685	2.139	-2.215	1.393
betaRP		-3.097	-0.488	0.142	-2.931	3.483
se		2.547	5.387	0.067	1.481	2.993
T-stat		-1.216	-0.091	2.129	-1.978	1.164

Quartely CCAPM with nonscaled factors, pval=0.02

	C	CG
b	0.291	0.207
se	0.289	0.110
T-stat	1.007	1.883
covRP		-0.210
se		0.112
T-stat		-1.883
betaRP		-2.998
se		1.592
T-stat		-1.883

Quartely FF3 with scaled factors by CAY, pval=0.01

	C	Rww	SMB	HML	CAY	Rww*CAY	SMB*CAY	HML*CAY
b	1.108	-0.041	0.017	-0.065	0.080	0.014	-0.038	-0.079
se	0.082	0.015	0.023	0.022	0.382	0.035	0.045	0.054
T-stat	13.585	-2.671	0.754	-2.899	0.210	0.391	-0.850	-1.465
covRP		0.042	-0.017	0.066	-0.081	-0.014	0.039	0.080
se		0.016	0.023	0.023	0.388	0.036	0.046	0.055
T-stat		2.671	-0.754	2.899	-0.210	-0.391	0.850	1.465
betaRP		2.044	0.506	1.097	0.122	-0.429	1.107	2.324
se		0.818	0.522	0.519	0.293	1.431	1.692	1.123
T-stat		2.500	0.970	2.113	0.415	-0.300	0.654	2.069

Table 7. λ for monthly null model

The data used as basis assets are the gross returns on the Fama-French 25 portfolios and the T-bill. Sample period is from 1952:01 to 1997:12. Portfolios are numbered ij with i indexing size increasing from one to five and j indexing book-to-market ratio increasing from one to five. The Lagrangian Multipliers, λ 's, are defined in Eq.(38) and their standard errors, $se(\lambda)$, are defined in Eq.(45).

portfolio	Monthly		
	λ	$se(\lambda)$	T-stat
11	-6.661	1.481	-4.497
12	-2.307	2.070	-1.114
13	-4.487	3.759	-1.193
14	10.708	4.932	2.171
15	5.102	2.621	1.946
21	-5.798	2.611	-2.221
22	-2.671	3.162	-0.845
23	7.277	3.584	2.030
24	6.065	3.931	1.543
25	1.043	4.918	0.212
31	-0.478	4.482	-0.107
32	3.825	4.025	0.950
33	-5.013	4.012	-1.249
34	5.074	4.194	1.210
35	-1.714	2.846	-0.602
41	6.093	3.937	1.548
42	-10.537	2.735	-3.853
43	3.225	3.859	0.836
44	-0.884	3.092	-0.286
45	-2.132	2.624	-0.813
51	1.404	3.119	0.450
52	-0.365	3.214	-0.113
53	5.628	1.191	4.726
54	-3.385	2.435	-1.390
55	-0.599	2.344	-0.255
R_f	-8.615	7.241	-1.190

Table 8. Moment diagnosis and test for interesting models (monthly return)

The data used as basis assets are the gross returns on the Fama-French 25 portfolios and the T-bill. Sample period is from 1952:01 to 1997:12. Moments of Hansen-Jagannathan estimates and the greatest lower bounds of theirs are suggested. Diff is their difference; HJ minus Snow. W is test statistic under the null hypothesis that all differences from the second order to the fourth order moment are positive. P(W) is its p-value.

FF3(IP)

Order	HJ	Snow	Diff	W	P(W)
1 st	0.9955	0.9950	0.0005	0.00	>0.25
2 nd	1.9021	1.1863	0.7157		
3 rd	3.6764	1.5484	2.1280		
4 th	9.9793	2.0786	7.9008		

FF3(JAN)

Order	HJ	Snow	Diff	W	P(W)
1 st	0.9956	0.9950	0.0006	0.00	>0.25
2 nd	1.8482	1.1863	0.6619		
3 rd	1.8493	1.5484	0.3009		
4 th	23.2420	2.0786	21.1635		

CAPM(IP)

Order	HJ	Snow	Diff	W	P(W)
1 st	0.9956	0.9950	0.0006	0.00	>0.25
2 nd	1.5017	1.1863	0.3154		
3 rd	2.8765	1.5484	1.3281		
4 th	7.1034	2.0786	5.0249		

CAPM(JAN)

Order	HJ	Snow	Diff	W	P(W)
1 st	0.9956	0.9950	0.0006	0.44	>0.25
2 nd	1.3301	1.1863	0.1437		
3 rd	1.3635	1.5484	-0.1849		
4 th	4.4983	2.0786	2.4197		

NULL(IP)

Order	HJ	Snow	Diff	W	P(W)
1 st	0.9956	0.9950	0.0006	7.58	0.0410
2 nd	1.0881	1.1863	-0.0982		
3 rd	1.2893	1.5484	-0.2591		
4 th	1.6459	2.0786	-0.4326		

Table 9. Moment diagnosis and test for interesting models (quarterly return)

The data used as basis assets are the gross returns on the Fama-French 25 portfolios and the T-bill. Sample period is from 1952:01 to 1997:04. Moments of Hansen-Jagannathan estimates and the greatest lower bounds of theirs are suggested. Diff is their difference; HJ minus Snow. W is test statistic under the null hypothesis that all differences from the second order to the fourth order moment are positive. P(W) is its p-value.

FF3(GNP)

Order	HJ	Snow	Diff	W	P(W)
1 st	0.9871	0.9870	0.0001	0.00	>0.25
2 nd	2.4593	1.5169	0.9424		
3 rd	6.6609	2.6626	3.9983		
4 th	27.0201	4.8378	22.1823		

FF3(JAN)

Order	HJ	Snow	Diff	W	P(W)
1 st	0.9866	0.9860	0.0006	0.00	>0.25
2 nd	1.6646	1.4992	0.1654		
3 rd	2.6844	2.5993	0.0851		
4 th	5.3012	4.6659	0.6353		

CCAPM(JAN)

Order	HJ	Snow	Diff	W	P(W)
1 st	0.9844	0.9840	0.0004	0.00	>0.25
2 nd	1.7650	1.4665	0.2984		
3 rd	3.9659	2.4853	1.4806		
4 th	10.7448	4.3621	6.3827		

FF3(CAY)

Order	HJ	Snow	Diff	W	P(W)
1 st	0.9864	0.9860	0.0004	1.66	>0.25
2 nd	1.3373	1.4992	-0.1620		
3 rd	2.0329	2.5993	-0.5664		
4 th	4.1030	4.6659	-0.5629		

COCH(CAY)

Order	HJ	Snow	Diff	W	P(W)
1 st	0.9865	0.9860	0.0005	0.18	>0.25
2 nd	1.8915	1.4992	0.3923		
3 rd	2.3879	2.5993	-0.2114		
4 th	7.3505	4.6659	2.6846		

CCAPM(CAY)

Order	HJ	Snow	Diff	W	P(W)
1 st	0.9845	0.9840	0.0005	0.00	>0.25
2 nd	1.8256	1.4665	0.3591		
3 rd	3.6494	2.4853	1.1641		
4 th	9.0252	4.3621	4.6631		

CCAPM(GNP)

Order	HJ	Snow	Diff	W	P(W)
1 st	0.9842	0.9840	0.0002	0.00	>0.25
2 nd	1.7679	1.4665	0.3013		
3 rd	4.2543	2.4853	1.7691		
4 th	13.4176	4.3621	9.0555		

COCH(JAN)

Order	HJ	Snow	Diff	W	P(W)
1 st	0.9867	0.9860	0.0007	2.57	>0.25
2 nd	1.6770	1.4992	0.1778		
3 rd	1.7094	2.5993	-0.8899		
4 th	6.7447	4.6659	2.0788		

COCH(GNP)

Order	HJ	Snow	Diff	W	P(W)
1 st	0.9863	0.9860	0.0003	0.00	>0.25
2 nd	2.4606	1.4992	0.9613		
3 rd	4.3166	2.5993	1.7173		
4 th	15.0402	4.6659	10.3743		

CCAPM

Order	HJ	Snow	Diff	W	P(W)
1 st	0.9845	0.9840	0.0005	0.00	>0.25
2 nd	1.5804	1.4665	0.1139		
3 rd	3.3775	2.4853	0.8922		
4 th	8.9387	4.3621	4.5765		

CAPM(GNP)

Order	HJ	Snow	Diff	W	P(W)
1 st	0.9871	0.9870	0.0001	1.50	>0.25
2 nd	1.3560	1.5169	-0.1609		
3 rd	2.2231	2.6626	-0.4395		
4 th	4.5662	4.8378	-0.2716		

Table 10. Horse race of models by Hansen–Jagannathan distance

The data used as basis assets are monthly and quarterly gross returns of the Fama–French 25 portfolios and the T-bill. Monthly data are from 1952:01 to 1997:12; Quarterly data are from 1952:01 to 1997:04. The models are sorted according to Hansen–Jagannathan distance metric as the maximized pricing error of basis assets. * implies that model is rejected at 1% level; ** implies that model is not rejected at 1% level.

PanelA:

Monthly Model

Model	HS-T	P-val	Wolak-T	P-val	HJ-T	P-val	Wolak-T	P-val
FF3(IP)	24.21	0.15**	23.93	0.00*	50.47	0.09**	0.00	>0.25**
FF3(JAN)	40.49	0.00*	0.00	>0.25**	52.10	0.10**	0.00	>0.25**
FF3	65.84	0.00*	945.40	0.00*	70.59	0.00*	93.27	0.00*
CAPM(IP)	48.49	0.00*	15.60	0.00*	81.76	0.00*	0.00	>0.25**
CAPM(JAN)	51.01	0.00*	834.51	0.00*	84.47	0.00*	0.44	>0.25**
CAPM	95.89	0.00*	809.82	0.00*	96.37	0.00*	537.59	0.00*
NULL(JAN)	105.88	0.00*	NA	NA	102.73	0.00*	NA	NA
NULL(IP)	80.88	0.00*	2543.07	0.00*	106.54	0.00*	7.58	0.04**
NULL	111.54	0.00*	NA	NA	109.93	0.00*	NA	NA

Panel B:

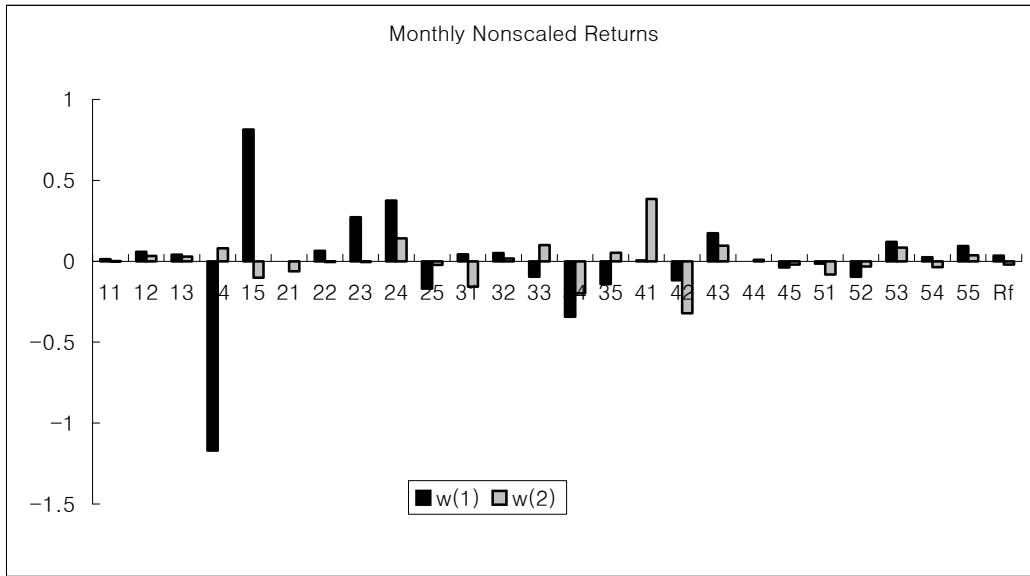
Quarterly Model

Model	HS-T	P-val	Wolak-T	P-val	HJ-T	P-val	Wolak-T	P-val
FF3(GNP)	32.11	0.02**	5.83	0.09**	43.24	0.50**	0.00	>0.25**
FF3(JAN)	53.65	0.00*	0.01	>0.25**	53.02	0.07**	0.00	>0.25**
CCAPM(JAN)	86.52	0.00*	10607.50	0.00*	57.61	0.07**	0.00	>0.25**
FF3(CAY)	36.92	0.01**	4.54	0.17**	57.79	0.01**	1.66	>0.25**
FF3	63.78	0.00*	448.20	0.00*	61.93	0.00*	153.75	0.00*
COCH(CAY)	36.00	0.02**	354.31	0.00*	62.93	0.04**	0.18	>0.25**
CCAPM(CAY)	46.63	0.00*	3964.07	0.00*	63.32	0.04**	0.00	>0.25**
CCAPM(GNP)	116.84	0.00*	553.68	0.00*	65.14	0.04**	0.00	>0.25**
COCH(JAN)	41.75	0.00*	23.91	0.00*	66.50	0.03**	2.57	>0.25**
COCH(GNP)	22.91	0.29**	229.01	0.00*	66.82	0.15**	0.00	>0.25**
CAPM(JAN)	80.02	0.00*	21.92	0.00*	70.09	0.00*	88.61	0.00*
CCAPM	165.68	0.00*	3146.49	0.00*	71.38	0.02**	0.00	>0.25**
CAPM(GNP)	62.46	0.00*	1604.63	0.00*	74.42	0.00*	1.51	>0.25**
CAPM(CAY)	99.53	0.00*	113.41	0.00*	78.41	0.00*	869.81	0.00*
CAPM	92.55	0.00*	58222.04	0.00*	80.11	0.00*	557.40	0.00*
NULL(JAN)	73.36	0.00*	NA	NA	80.48	0.00*	NA	NA
COCH	96.42	0.00*	14460.61	0.00*	81.66	0.00*	46.79	0.00*
NULL(CAY)	70.34	0.00*	711.17	0.00*	85.77	0.00*	18.11	0.00*
NULL(GNP)	169.78	0.00*	240.56	0.00*	91.67	0.00*	1087.24	0.00*
NULL	149.88	0.00*	NA	NA	92.47	0.00*	NA	NA

Fig 1. Eigenvectors of two largest eigenvalues of the Hansen Jagannathan weighting matrix $W_T = [(1/T)\sum RR']^{-1}$.

The data are monthly and quarterly gross returns of the Fama-French 25 portfolios and the T-bill. Monthly data are from 1952:01 to 1997:12. Quarterly data are from 1952:01 to 1997:04. The portfolio numbers on the x-axis are numbered ij with i indexing size increasing from one to five and j indexing book-to-market ratio increasing from one to five. The vector w(1) and w(2) are the eigenvectors corresponding to the two largest eigenvalues of W_T .

Panel A :



Panel B :

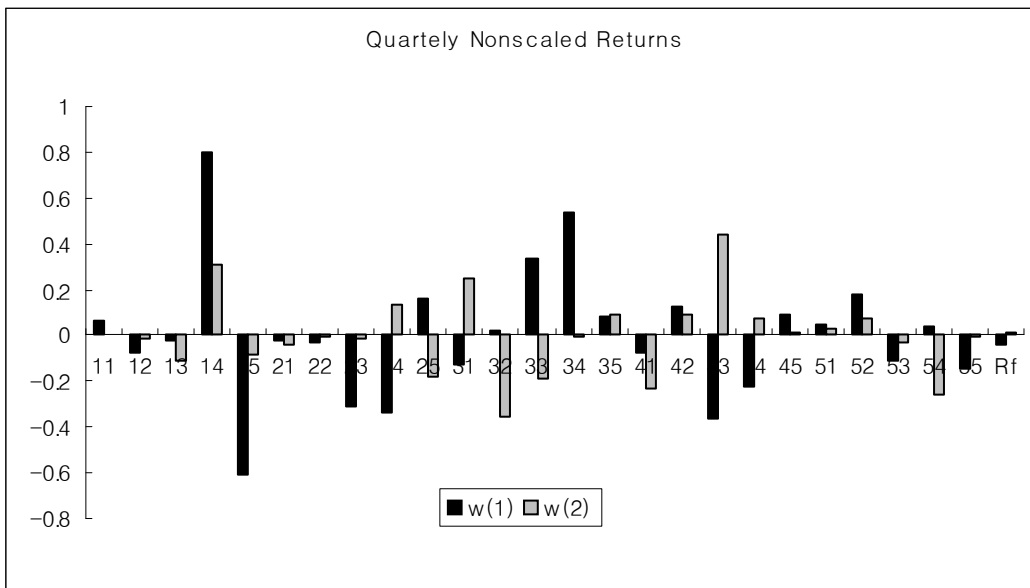
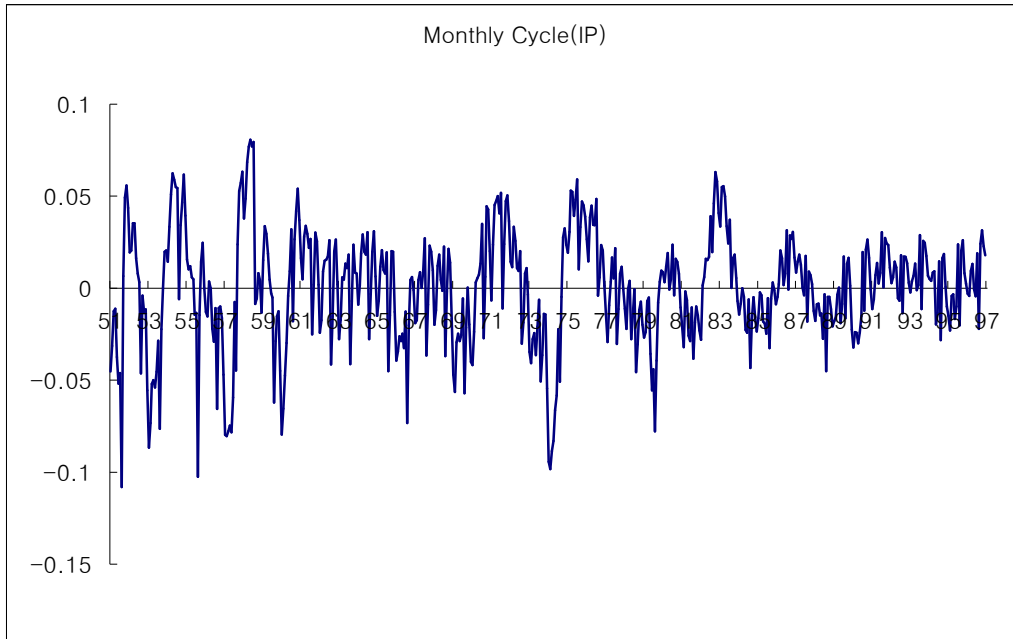


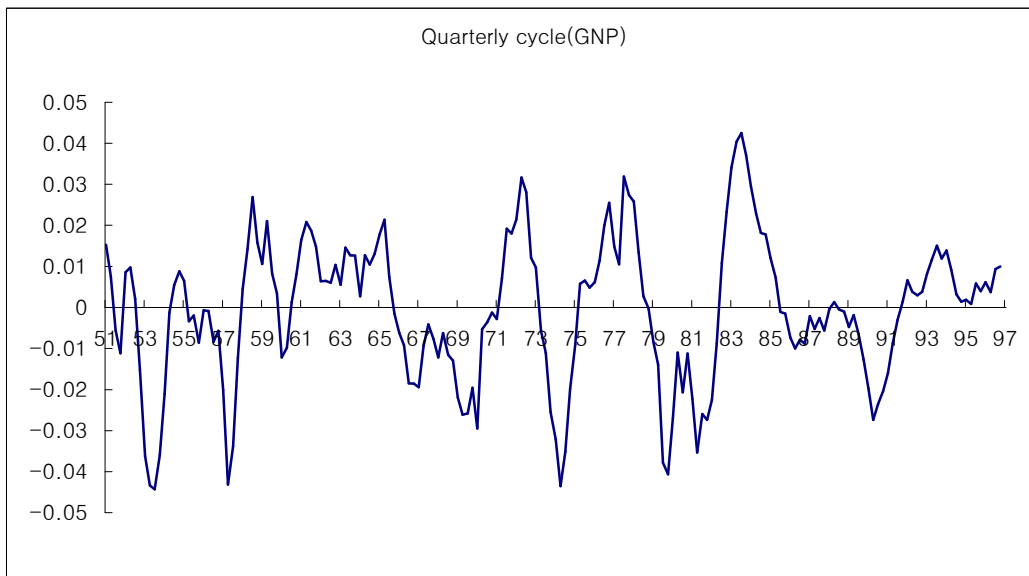
Fig 2. Time series of three conditioning variables.

Cycle(IP) is the cyclical element in monthly Hodrick-Prescott(1997) filtered industrial production. Cycle(GNP) is the cyclical element in quarterly Hodrick-Prescott(1997) filtered GNP. Cycle(CAY) is the aggregate consumption-wealth ratio, derived in Lettau and Ludvigson(2001). All the series are lagged by one period to assure variables in information set. Monthly series for IP are from 1951:12 to 1997:11. Quarterly series for GNP and CAY are from 1951:04 to 1997:03.

Panel A:



Panel B:



Panel C:

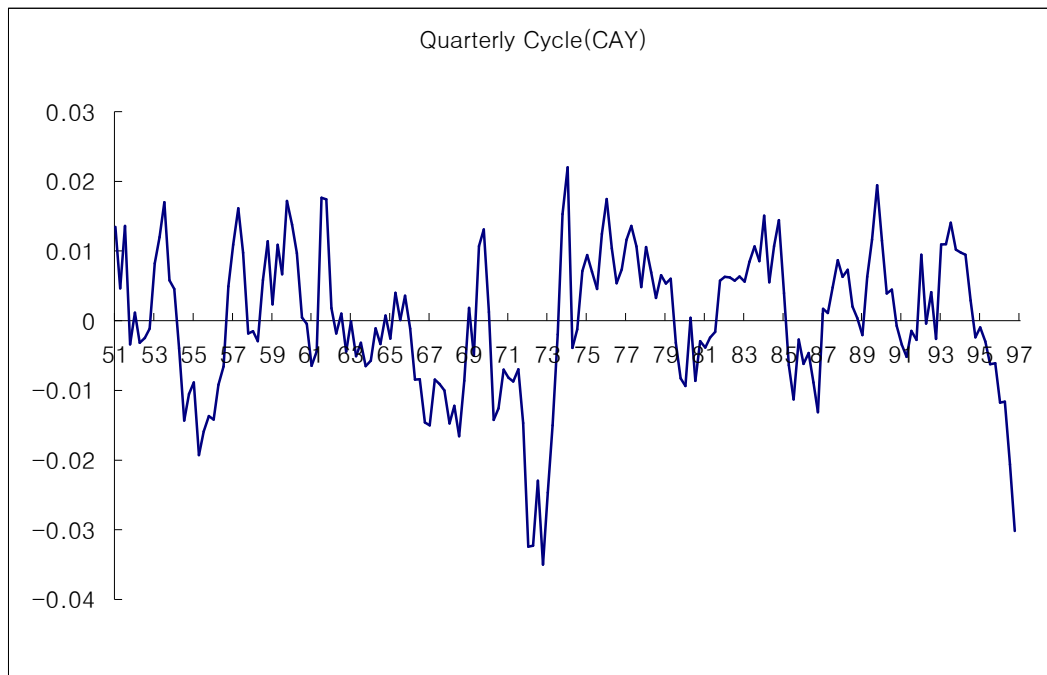
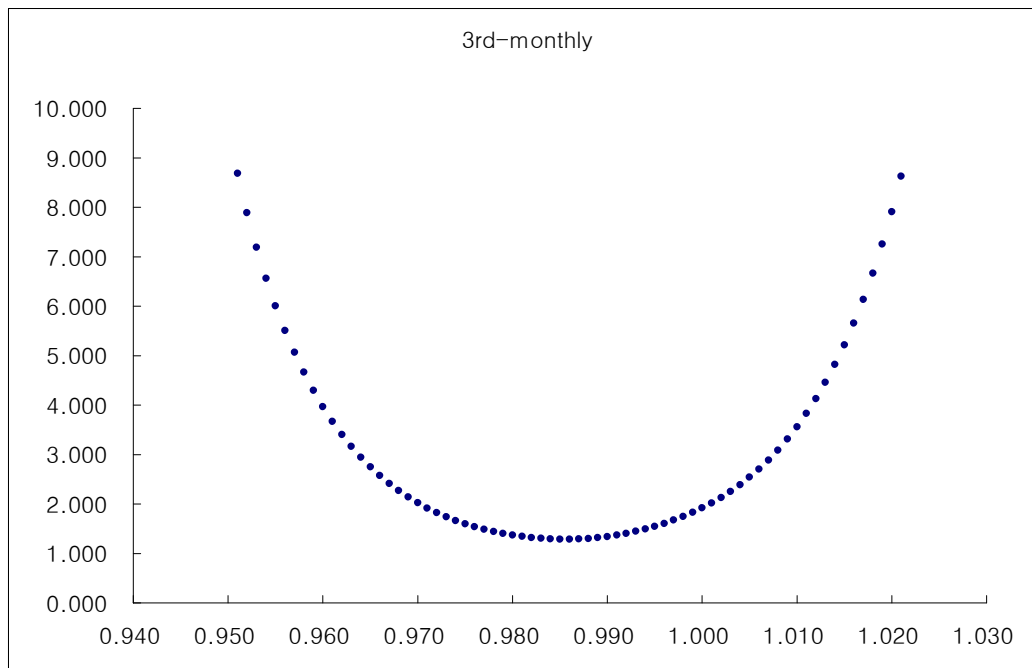
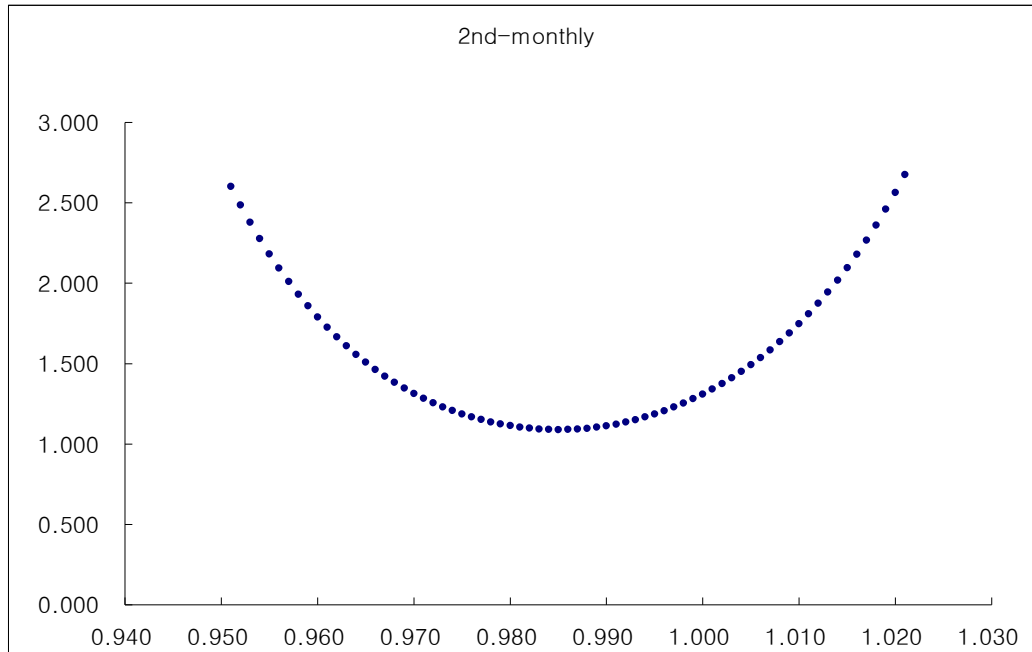


Figure 3. The moment lower bound from basis assets (monthly return)

The data used as basis assets are the gross returns on the Fama-French 25 portfolios and the T-bill. Sample period is from 1952:01 to 1997:12. Necessary moment lower bounds of theoretic pricing kernels are plotted for 2nd, 3rd, 4th and 9th order. The numbers on the x-axis are hypothetic means of the true pricing kernel.



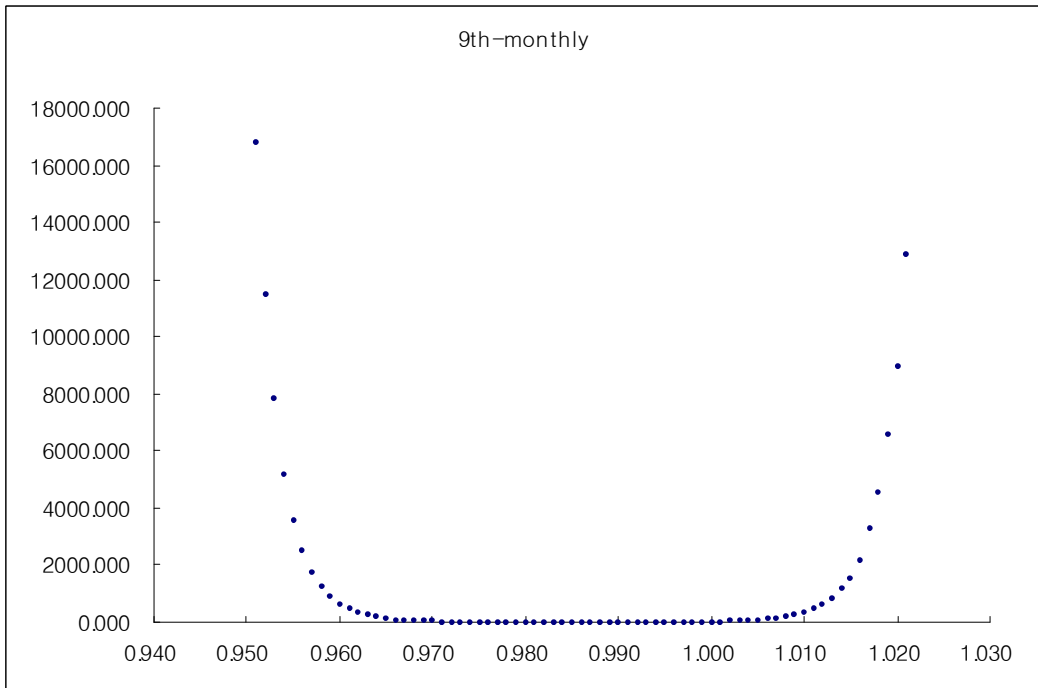
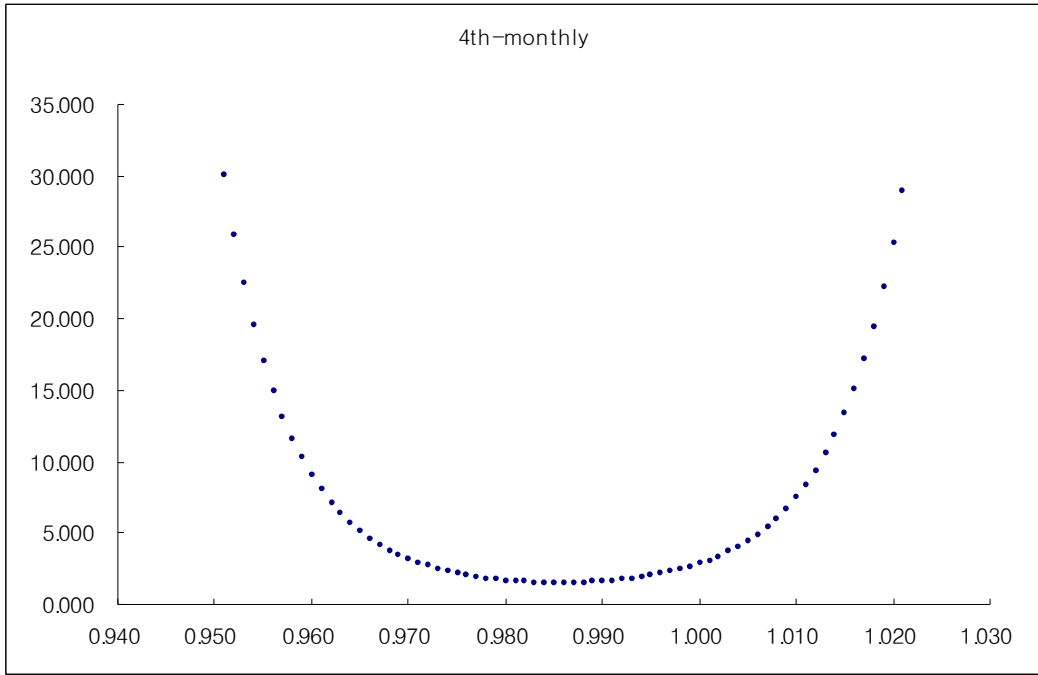
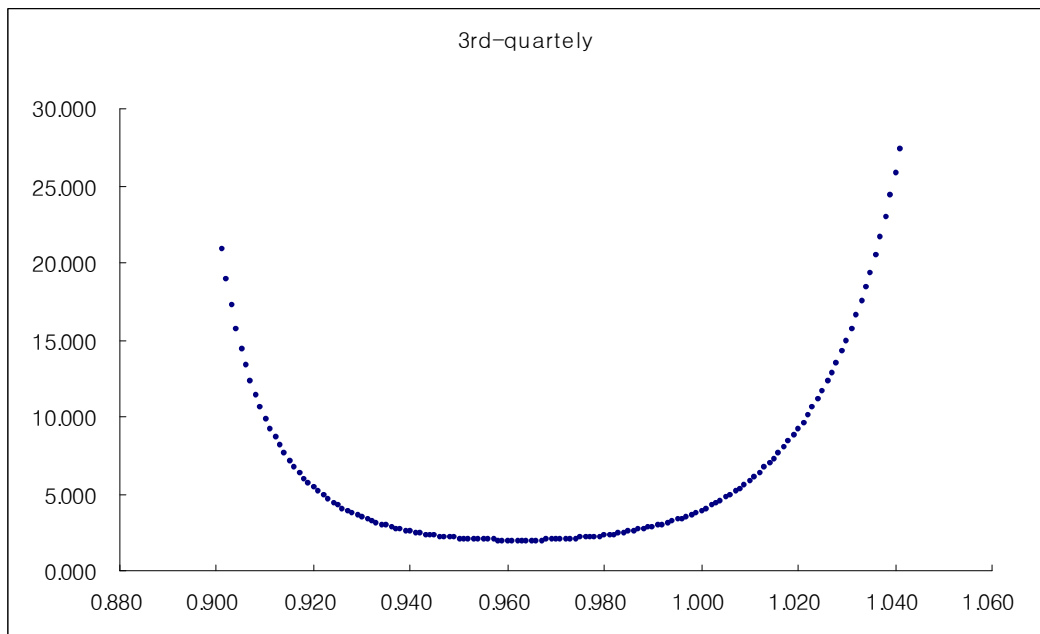
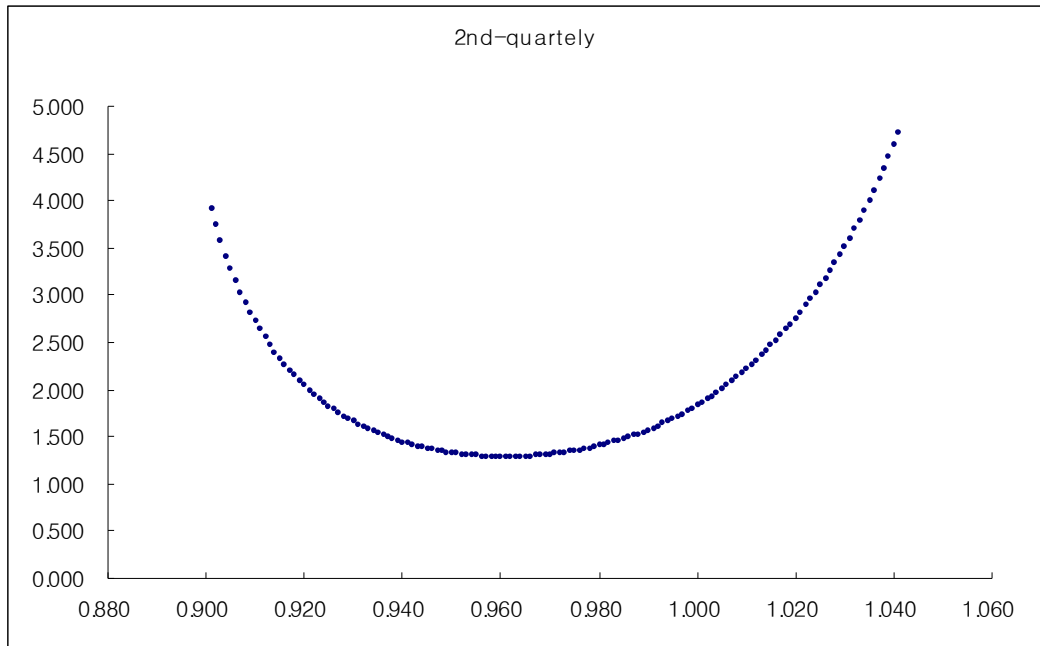


Figure 4. The moment lower bound from basis assets (quarterly return)

The data used as basis assets are the gross returns on the Fama-French 25 portfolios and the T-bill. Sample period is from 1952:01 to 1997:12. Necessary moment lower bounds of theoretic pricing kernels are plotted for 2nd, 3rd, 4th and 9th order. The numbers on the x-axis are hypothetical means of the true pricing kernel.



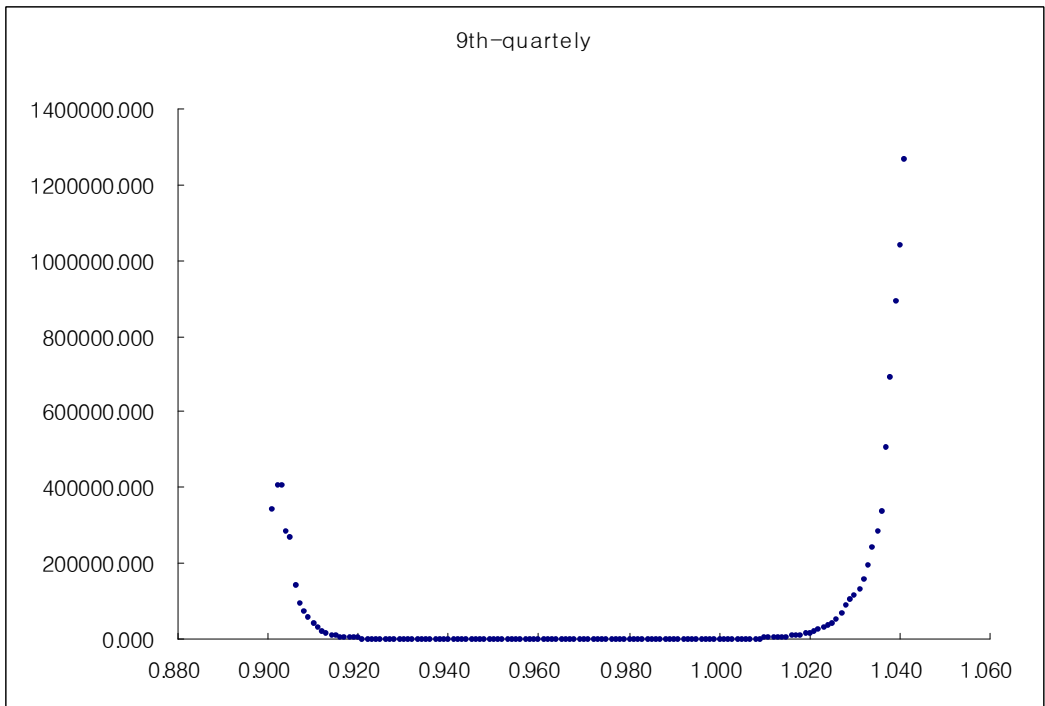
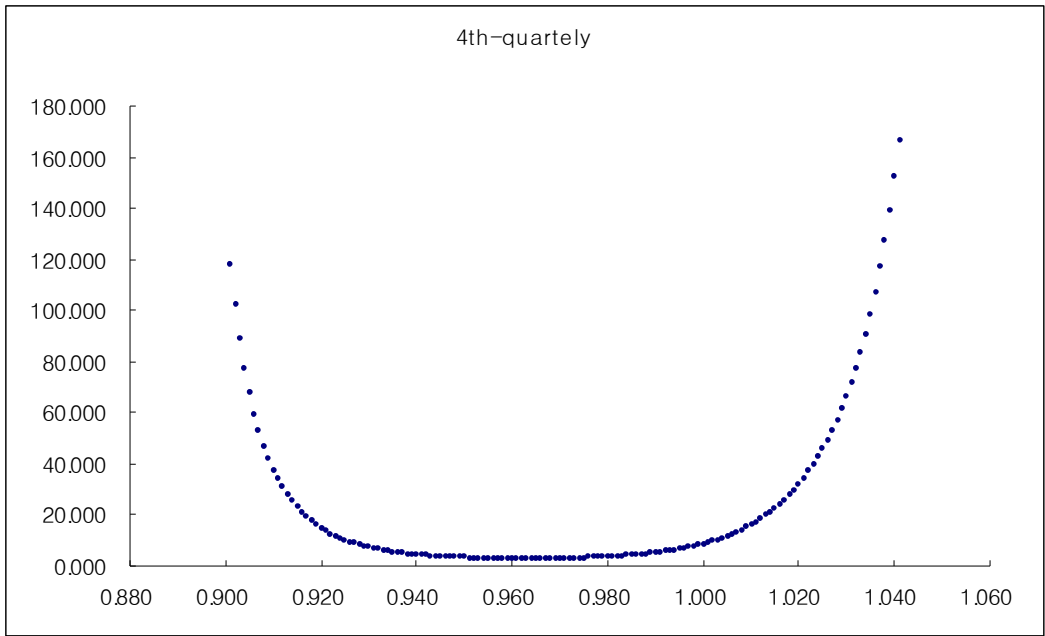
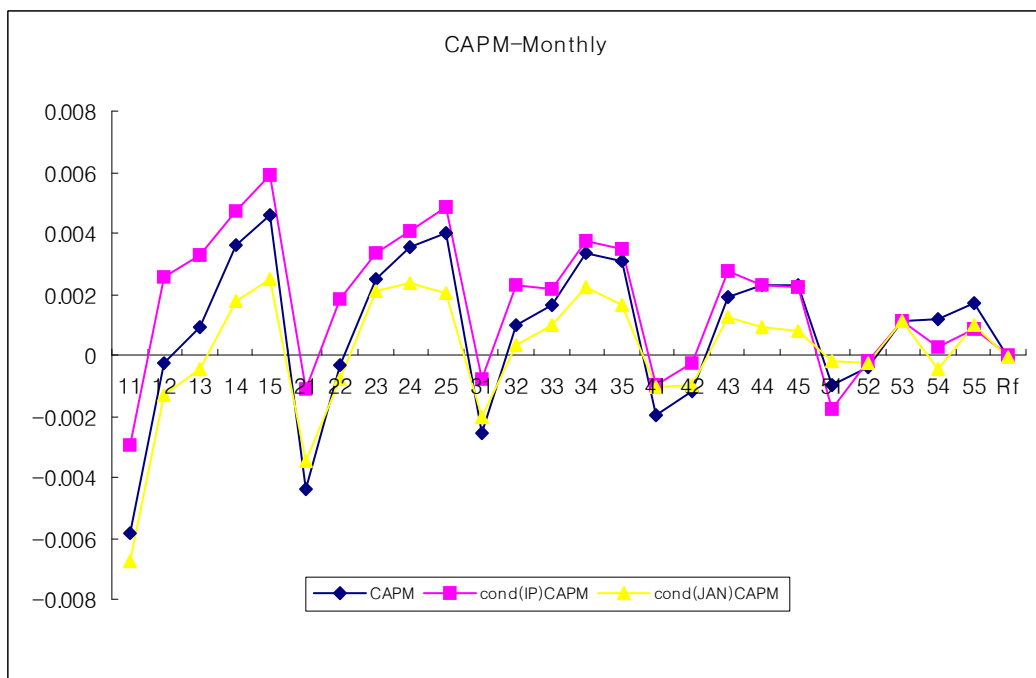
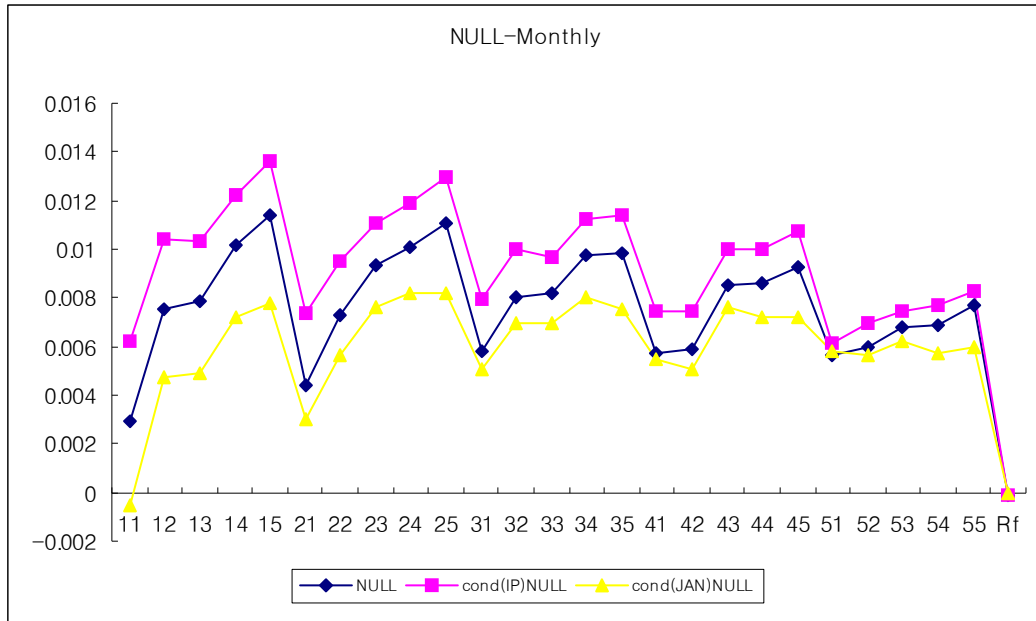


Figure 5. The pricing error of models (monthly return)

The data used as basis assets are the gross returns on the Fama-French 25 portfolios and the T-bill. Sample period is from 1952:01 to 1997:12. Pricing errors of nonscaled and scaled models according to Hansen-Jagannathan distance test are graphed. The portfolio numbers on the x-axis are numbered ij with i indexing size increasing from one to five and j indexing book-to-market ratio increasing from one to five.



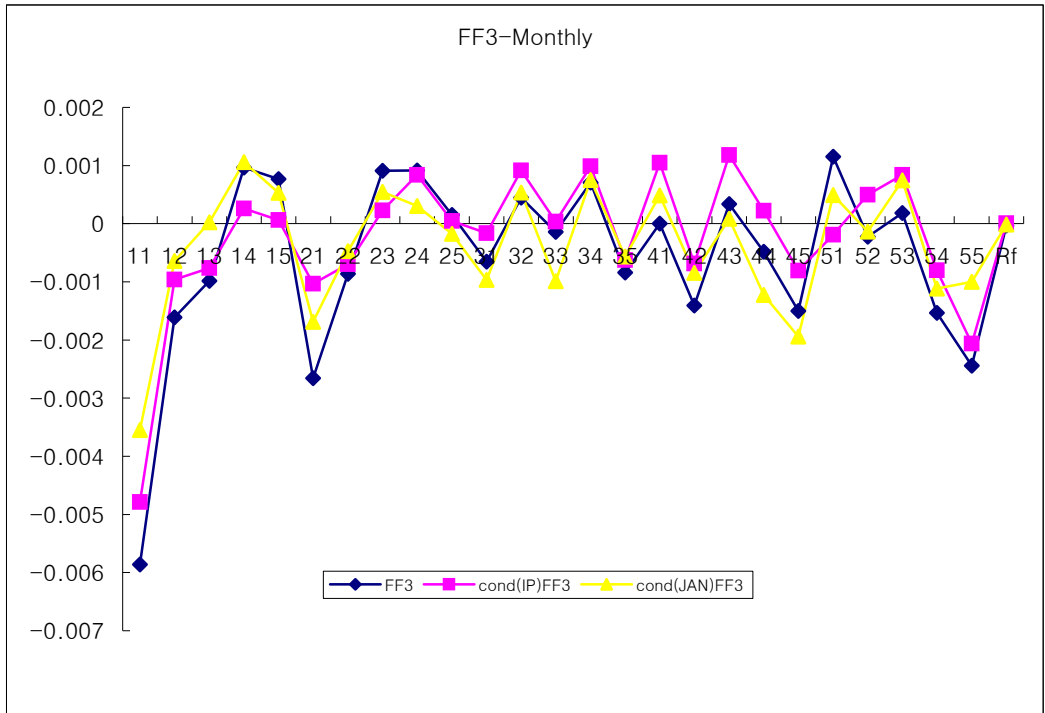


Figure 6. The pricing error of models (quarterly return)

The data used as basis assets are the gross returns on the Fama-French 25 portfolios and the T-bill. Sample period is from 1952:01 to 1997:04. Pricing errors of nonscaled and scaled models according to Hansen-Jagannathan distance test are graphed. The portfolio numbers on the x-axis are numbered ij with i indexing size increasing from one to five and j indexing book-to-market ratio increasing from one to five.

