

# KOSPI200 기초자산과 파생상품 간의 분수 공적분 관계에 대한 연구

김태혁<sup>1)</sup>, 임순영<sup>2)</sup>, 박갑제<sup>3)</sup>

## <요약>

본 연구는 기초자산인 KOSPI200과 그 파생상품(KOSPI200 선물, 옵션) 가격들 사이의 장기적 균형관계를 분수 공적분 검정을 통하여 살펴보았다. 각 시장들 간의 분수 공적분 관계를 파악하기 위하여 수준자료에서의 KOSPI200 주가지수의 증가와 KOSPI200 선물, 옵션(등가격)의 최근월물의 증가 시계열에 대한 단위근 검정을 실시한 결과 현물과 선물의 시계열은 수준에서 단위근을 가짐으로써 시계열 불안정적임을 알 수 있었고, 옵션의 경우는 수준자료에서 단위근 존재에 대한 귀무가설을 기각함으로써 안정적인 시계열임을 알 수 있었다. 따라서 본 연구에서는 수준에서 안정적인 시계열을 가지는 옵션을 제외하고 현물과 선물 가격간의 공적분 여부를 살펴 본 결과 표준적인 공적분 관계(CI(1,1))가 존재함을 알 수 있었다. 또한 두 시계열 변수사이의 장기균형관계에 대한 좀더 구체적인 실증적 증거를 찾기 위하여 분수 공적분 여부를 살펴보았다. 공적분 관계가 성립하기 위하여는 두 변수 사이의 차분계수가 동일하여야 하므로 그에 대하여 이변량 제약 GPH 추정을 한 결과 모든 bandwidth 모수 m에서 유의한 차분계수를 가짐으로써 현물과 선물 증가 시계열은 공적분되어 있음을 확인하였다. 그리고 공적분회귀식에서의 균형오차항을 추출하여 그에 대한 GPH추정을 실시한 결과 모든 bandwidth 모수 m값에서 추정된 차분계수가  $-1/2 < \hat{d} < 1/2$  값을 가짐에 따라 분수공적분 되어있음을 확인할 수 있었다. 이는 각 현물시장과 선물시장의 가격 사이의 균형관계에 대한 충격의 영향이 쌍곡선율로 느리게 감소하는 특성을 표현 할 수 있게 함을 의미한다. 즉, 분수 공적분은 균형오차가 분수 차분된 장기기억(long memory)과정을 따르고 있음을 의미하는데, 이는 충격으로 인한 영향이 단기에 사라지지 않고 균형가격으로의 회귀가 매우 느리게 나타남을 의미하는 것이다. 따라서 현물시장과 선물시장의 가격 간에 분수 공적분관계가 성립한다면 기존의 선행연구들에서 선도-지연관계를 파악하기 위한 오차수정모형은 오직 장기의 시계열에서만 의미있는 모형이 될 것이다. 또한 동일한 기초자산을 이용하여 위험을 헤지하거나 시장간 차익거래를 통하여 초과이익을 얻고자 하는 시장 참여자들에게 있어 그들의 투자전략이 어떻게 변화하여야 되는지에 대한 정보를 함의하고 있다고 할 수 있다.

*key word* : 분수 공적분, 장기기억, 쌍곡선율

1) 부산대학교 경영학부 교수(tahykim@pusan.ac.kr, 051-510-3584)

2) 부산대학교 경영학과 박사과정 수료

3) 부산대학교 NURI 사업단 기금교수

## I. 서론

1996년 5월 3일 금융선진화를 위하여 KOSPI200(이하 현물)에 대한 주가지수선물시장이 개설되었으며, 1997년 7월 7일 주가지수 옵션시장이 개설되었다. 우리나라 주가지수 선물, 옵션 시장은 짧은 역사에도 불구하고 양적, 질적으로 비약적인 성장을 거듭해왔다. 우리나라의 파생상품시장(주가지수 선물, 옵션시장)의 개장 초기에는 투기목적만을 가진 투기자(speculator)에 의해 주로 거래가 이루어졌으나 해를 거듭할수록 차익거래(arbitrage)와 기관투자자의 프로그램매매에 의해 시장이 더욱 성숙해지고, 효율적으로 운영되고 있다. 따라서 주가지수 파생상품시장의 성공은 각계의 관심의 대상이 되었으며, 이러한 관심은 주가지수 현물시장과의 상호관계로 연결되었다. 이러한 주가지수 현물, 선물, 옵션시장 간의 관계에 관한 연구로는 크게 두 가지 방향으로 진행이 되어 오고 있는데 첫째는 주가지수 선물, 옵션시장의 도입이 현물시장의 변동성에 미치는 영향에 관한 것이고, 둘째는 주가지수 선물, 옵션 시장간의 수익률과 변동성의 일중 선행행성에 관한 것이다. 이전의 연구에서는 주가지수 선물, 옵션시장에 관한 연구의 대부분이 파생상품 시장의 도입이 현물시장의 변동성에 미치는 영향에 집중이 되어서 진행되었으나 최근에는 파생상품시장과 현물시장간의 동적관련성 즉 선도-지연관계에 대한 연구도 활발히 진행되고 있다.

파생상품의 도입이 현물시장의 변동성에 미치는 영향에 관한 연구는 파생상품의 도입이 기업과 금융기관 및 개인투자자들의 위험관리에 유용하게 사용되며 그로 인해 현물시장의 안정성을 높여주며, 선물과 옵션의 경우 정보의 비대칭성이 기초자산 시장보다 작기 때문에 오히려 파생상품시장에서 형성되는 가격이 기초자산의 가격예측기능을 발휘하고 변동성을 줄일 수 있다는 긍정적인 평가와 정보가 없는 투기자(uninformed speculators or noisy traders)들의 시장참여로 오히려 불확실성이 증가하고 프로그램 트레이딩과 같은 차익거래로 인해 오히려 현물의 변동성을 증폭시킨다는 부정적인 견해가 있다.

주식시장에서의 선물 도입이 기초자산인 주가의 변동성을 증가시킨다는 견해에 대하여는 Stoll and Whaley(1987)와 Harris(1989)의 연구가 있는데, 이들은 S&P 500을 대상으로 한 실증분석 결과에 따르면 지수선물 도입 후 주가수익률의 변동성이 증가하였음을 보였으며, 또한 트리플 워칭 데이 근처에서 변동성이 증가하는 것을 발견하고 이는 차익거래를 통해 현물포지션을 관리하고 있는 투자자들이 파생상품 시장에서의 투자만기로 인한 포지션 청산을 위해 현물시장에서 반대 매매를 하는 것이 원인이라고 주장하였다. Antoniou and Holmes(1995) 역시 영국의 주식시장을 대상으로 선물 도입에 따른 주가수익률의 변동성을

측정하여본 결과 영국의 주식시장에서도 수익률의 변동성이 증가한다는 것을 알 수 있었다.

그러나 이와는 반대로 Edwards(1998)는 1973년부터 1987년까지의 S&P 500 지수와 Value Line Index의 일별 자료를 이용한 연구에서 지수선물의 도입 이후에도 주가수익률의 변동성은 높아지지 않았음을 보여주었고, Chang and Cheng(1999)는 Nikkei 225 지수를 대상으로 한 연구에서 선물도입이후 주가 변동성이 증가하긴 하였으나 이는 변동성에 영향을 미치는 시장 공통적인 요인의 영향이 크다고 결론지어 선물의 도입이 주가변동성 증가의 원인이 아님을 밝혔다.

이와 관련하여 국내연구로 변종국(1998)은 KOSPI200 선물 도입 이후 주식시장의 변동성이 증가했다고 보고하고 있으며, 김인준, 김동석, 박건엽(1997)과 권택호, 박종원(1997)은 KOSPI 200 선물거래 도입이 주식시장의 변동성을 증가시키지 않는다고 보고하고 있다. 이러한 분석결과의 차이는 분석대상이나 분석방법의 차이에 따른 원인도 배제 할 수 없으나 선물거래의 도입이외의 현물시장의 변동성에 영향을 미치는 다른 요소들을 통제할 정도에 의해서도 크게 영향을 받으므로 이를 통제하고 분석한 결과 KOSPI 200 선물거래는 현물거래의 제약요인을 줄여주어 현물시장의 효율성을 제고시키고 단기변동성을 증가를 가져오는 역할을 하지 못하였음을 권택호, 박종원(2000)의 연구에서 보여주고 있다.

또한 KOSPI200 파생상품거래와 주식수익률 변동성의 비대칭성에 대한 연구로는 변종국, 조정일(2003)은 KOSPI 200 주가지수 선물 도입 전 후를 대비하여 주가지수선물의 도입이 현물주식시장의 비효율성을 완화시켜 현물주식시장에서 변동성의 비대칭성이 줄어든다는 주가지수선물의 도입효과를 살펴보았는데, 주가지수선물 도입이후 현물주식시장의 변동성은 비대칭적인 현상이 줄어들었음을 보여 주었다. 박종원(2006)도 KOSPI 200 포트폴리오와 이에 대응하는 Non-KOSPI 200 포트폴리오를 구성하여 새로운 파생파생상품의 거래가 현물시장 변동성의 비대칭성에 어떤 영향을 미치는지를 GJR\_GARCH 모형을 이용하여 검증한 결과 파생상품의 도입이후 현물시장의 변동성 비대칭성은 KOSPI200 포트폴리오에 대해서는 변동성의 비대칭성 정도를 감소시킴을 보여주었으며, Non-KOSPI 200 포트폴리오에 대해서도 제한적이거나 변동성의 비대칭성 정도를 감소시키고 있음을 보여주었다.

따라서 결론적으로 파생상품의 거래가 현물시장의 변동성에 미치는 영향에 관한 국내외의 연구결과는 파생상품 거래가 현물시장의 변동성을 증가시켰는가 아니면 감소시켰는가에 대해서 일치된 결과를 보이지 못하고 있다. 특히 현물시장의 변동성 증가 또는 감소현상을 발견하였다 하더라도 그것의 의미를 파생상품의 거래 도입과 결부시켜 해석하는 데는 한계가 있다고 할 수 있겠다.

파생상품시장과 현물시장간의 동적 관련성 즉, 선도-지연관계에 관한 연구는 주가지수선

물시장과 현물시장에 관한 것이 일반적이었다. 이러한 연구들의 일반적인 견해는 선물시장이 현물시장을 선도한다는 것이다. 간혹 양방향 선도 현상을 보고하는 연구들이 있으나 이 경우에도 주로 선물의 현물에 대한 선도 현상은 강하게 나타나는 반면에 현물의 선물시장에 대한 선도효과는 미미한 것으로 나타났다. Herbst, McCormark and West(1987)은 Value Line 현물지수와 만기가 따른 4가지의 선물지수간의 선도-지연관계에 대하여 교차상관관계분석을 행한 결과 선물이 현물을 선도한다는 것을 보여주었지만, 교차상관관계분석을 통해 선물이 현물을 선도한다고 주장하는 데는 한계가 있다고 보여진다. Chan(1992)은 양측회귀분석방법(two-sided regression)을 통해 S&P500 현물과 선물, MMI(Major Market Index)현물과 선물을 대상으로 선도-지연관계를 살펴본 결과 선물이 현물을 선도하고 선물시장이 가격정보에 대해 매우 신속하게 반응한다고 하였다. Chan은 선도지연관계에 대한 새로운 중요한 사실을 밝혀내었는데 하나는 불빈번거래(infrequent trading)가 선도 관계를 규명하지 못한다는 것과 긍정적인 정보와 부정적인 정보에 대한 선물과 현물의 선도-지연관계는 두 경우 모두에 대해 선물가격의 변동이 현물가격을 선도하고 있으므로 차익거래를 추구하는 차익거래자(arbitrageur)들에게 공매의 제한이 장해요인이 될 수 없음을 주장하였다. 이와 관련하여 Chan은 선물과 현물사이에 비대칭적인 선도-지연관계가 나타나는 것은 선물시장이 정보를 처리하는데 있어 모든 개별주식보다 빠르고 선물시장이 현물시장에 비해 시장전체를 움직이는 정보를 더 잘 반영하기 때문이라고 결론지었다.

그 외에도 선물과 현물의 양방향 선도에 대한 결과를 보여준 연구로 Kawaller, Koch and Koch(1987)는 단측시차모형(one-sided distributed-lag model)을 통하여 S&P 500 현물지수와 선물지수의 선도시차관계를 분석하였는데 선물과 현물시장은 양방향 선도관계를 가지지만 선물의 선행효과가 현물의 선행효과보다 확연히 크게 나타나는 비대칭적인 관계를 가지고 있음을 보여 주었다. 또한 Stoll and Whaley(1990)는 S&P500 현물과 선물, MMI현물과 선물을 대상으로 1982년 4월부터 1987년 3월까지의 5분별 수익률 자료를 이용하여 선도-지연 관계를 분석한 결과 선물수익률이 현물수익률을 선도하긴 하지만 이는 선물수익률의 선도효과가 일방적인 것은 아니며, 미약하지만 현물이 선물을 선도하기도 함을 보여주었다. 이러한 효과는 선물시장이 성숙 될수록 점점 약해져서 선물과 현물간의 선도-지연관계가 작용하는 범위는 시간이 지남에 따라 짧아지고 짧은 시차 내에서의 선도효과는 점차 증가하여 동시적 움직임이 강화되는 양상이 있음을 보여주었다. Wahab and Lashgari(1993)는 공적분과 오차수정모형을 이용하여 S&P 500 현물과 선물, FTSE 100지수의 현물과 선물에 대한 일별자료를 이용하여 선도-시차관계를 분석하였는데 두 시장간에는 공적분 관계가 성립하며 오차수정계수와 시차된 변수들의 상대적인 크기는 선물시장과 현물시장 간에

상호 영향을 미치고 있긴 하지만 현물의 선물에 대한 선도효과가 크며 전일의 현물시장 불균형에 대한 선물시장의 반응이 전일의 선물시장의 불균형에 대한 현물시장의 반응보다 더 강하게 나타난다는 것을 알아냈다. 또한 Pizzi, Economopoulos and O'Neill(1998)도 공적분과 오차수정모형을 이용하여 S&P 500 현물지수와 잔존만기별(3개월, 6개월물) 선물지수에 대한 두 시장간의 관계를 분석한 결과 선물이 현물을 강하게 선도하고 현물도 선물시장을 약하게나마 선도한다는 사실을 발견하였다.

이와 관련하여 국내에서도 선물시장과 현물시장간의 장기적 균형관계와 선도-지연관계에 대한 관심이 높아지기 시작하였는데, 이필상, 민준선(1997)은 1996년 5월부터 9월까지의 KOSPI200 선물과 현물 수익률 자료를 이용하여 두 시장간의 선도-지연관계를 분석한 결과 ARMA(2,3)을 통해 불빈번 거래효과를 제거한 후에도 선물이 현물을 약 10분간 선도하며 15분 후 현물이 피드백하는 것으로 나타났으며, 호재시장 상황하에서 선물은 현물을 약 5분 정도 선도하지만 악재의 시장 상황 하에서는 선물의 선도효과가 약화되는 것으로 나타나고 있어 시장상황에 따라 선도-지연관계가 비대칭함을 보여 주었다.

은철수, 장호윤(1998), Min, Najand(1999)도 선물시장이 현물시장을 선도함을 보여주었으며, 김동석, 김솔(2000)은 위 연구들과 동일시장에 대하여 공적분과 오차수정모형을 통해 양 시장간의 관계에 대한 분석을 실시한 결과 선물이 현물을 강하게 선도하였으며, 현물도 선물시장을 선도하긴 하였으나 그 효과는 매우 짧은 시간 안에 사라지는 것으로 밝혀졌다. 또한 시간이 지남에 따라 선물의 선도시차가 짧아지는 시장 성숙효과가 존재함을 일부 확인하였으며 잔존만기에 따른 선물 선도효과의 검정에 있어서는 선도시차의 변화를 발견할 수 없었고 이를 통하여 차익거래가 선도효과 시차에 영향을 미치지 못한다고 주장하였다.

위와 같이 파생상품시장, 특히 선물시장과 현물시장의 양시장간의 관계에 관한 연구는 매우 활발히 진행 되어 오고 있다. 특히 각 시장들 사이의 장기적 균형관계에 대한 연구는 공적분과 오차수정모형을 이용하여 그 특성을 파악하고 있음을 알 수 있었다. 그러나 이러한 분석방법은 각 시장변수들이 각각 단위근을 가지는 불안정한 시계열들(I(1))이며, 그들의 선형결합에 대한 균형오차가 안정적인 시계열(I(0))을 형성한다는 정수차분에서의 논의이다. 그러나 본 연구는 위 선행연구들의 연장선상에서 KOSPI200이라는 동일한 자산을 기반으로 하여 형성된 파생상품 시장(KOSPI200옵션, KOSPI200선물 시장) 들 각각에 대한 시계열 속성을 파악하기 위하여 정수차분으로의 제약을 두지 않고 분수차분을 허용함으로써 각 시계열들의 장기기억 속성을 파악한 뒤 시장들 간의 동적 연결 구조를 분수 공적분 관계에서 파악함으로써 각 시장들 간의 장기 균형관계에 대한 행태를 알아보고자 한

다. 각 시장들이 정수 차분되지 않고 분수 차분이 된다는 것은 해당 시계열이 장기기억 과정을 가짐을 의미한다. 이는 각 시장에서의 효율적 시장가설이 성립하는가를 검증하는 것이 된다. 만약 각 시계열 자료에 장기기억 현상이 존재한다면 과거의 자료가 미래의 가격변수 행태를 예측하는데 유용한 정보를 제공한다는 것을 의미하며, 이는 앞의 선행연구들에서 각 시장 변수들 간의 선도-지연관계를 설명함에 있어서 또 다른 대안 모형이 있을 수 있음을 암시한다고 할 수 있다.

금융시장에 있어서 서로 개연성이 있는 개별 시계열간의 장기적인 행태를 파악하기 위해서 표준적인 공적분(CI(1,1)) 관계가 아닌 분수 공적분 관계에 대하여 Cheung, Lai(1993)은 1914년부터 1972년까지 연별자료를 이용하여 명목환율과 상대가격간의 분수 공적분(fractional cointegration)에 대한 검정을 통해 PPP를 지지하는 증거를 제시하였다. Bandi and Perron(2006)에서는 S&P100 지수옵션의 실현변동성과 내재변동성에 관한 예측회귀모형에서 나타나는 측정오차와 위험프리미엄의 누락변수문제를 해결하기 위해 주파수영역에서의 최소자승추정량인 NBS(Narrow Band Least Square) 추정법을 사용하여 예측력을 추정한 결과, 두 변동성 측정치들간에 분수적 공적분 즉 장기적 균형관계가 성립한다는 것을 보였다.

또한 국내에서는 조하현, 이승국(2004)이 원/달러 환율과 엔/달러 환율사이의 분수 공적분 관계에 대한 실증분석을 한 결과 둘 사이에는 표준적인 CI(1,1)의 공적분 관계가 존재하는 것이 아니라 균형오차가 장기기억을 가지는 분수 공적분 관계를 가짐을 보여주었다. 이에 따라 이들은 원/달러 환율과, 엔/달러 환율사이의 단기적인 동조화 현상을 일반적인 현상으로 받아들이기 어려움을 주장하였다. 따라서 본 연구에서는 불안정한 두 시계열의 선형결합이 안정적 시계열을 가지되 그들의 균형 오차항에 대하여도 I(0)라는 제한적인 제약을 가하지 않고 분수로 차분( $0 < d < 1$ ) 될 수 있도록 완화시키는 분수 공적분 개념을 도입하고자 한다. 이는 각 시장 간의 시계열 자료에 있어서 둘 사이의 균형관계에 대한 충격의 영향이 쌍곡선율로 느리게 감소하는 특성을 표현 할 수 있게 한다. 분수 공적분은 균형오차가 분수 차분된 장기기억(long memory)과정을 따르고 있음을 의미하는데, 이는 충격으로 인한 영향이 단기에 사라지지 않고 균형가격으로의 회귀가 매우 느리게 나타남을 의미하는 것이다.

따라서 각 시장들 간에 분수 공적분관계가 성립한다면 기존의 선행연구들에서 선도-지연관계를 파악하기 위한 오차수정모형은 오직 장기의 시계열에서만 의미있는 모형이 될 것이다. 또한 동일한 기초자산을 이용하여 위험을 헤지하거나 시장간 차익거래를 통하여 초과이윤을 얻고자 하는 시장 참여자들에게 있어 그들의 투자전략이 어떻게 변화

하여야 되는지에 대한 정보를 함의하고 있다고 할 수 있다. 즉 시장간에 분수 공적분 관계가 성립된다면 두 시장간의 균형관계가 지속적인 기억을 가지는 시장으로 파악 할 수 있으므로 비교적 장기의 매수-보유(buy&hold strategy)전략을 가져야 할 것으로 이해 될 수 있음을 시사한다고 볼 수 있기 때문이다.

본 논문의 구성은 다음과 같다.

제 I장은 서론으로 연구배경 및 선행연구에 대해서 소개하고, 제 II장은 주가지수현물, 선물, 옵션가격간의 관계와 분수 공적분을 이해하기 위한 장기기억 및 공적분과 분수공적분에 대한 이론적 배경 및 모형에 대해서 살펴 볼 것이다. 제 III장에서 주가지수 현물, 선물, 옵션의 시계열 자료들의 특성 및 실증분석결과를 제시하고, 제 IV장에서는 결론 및 한계점에 대해서 논하고자 한다.

## II. 이론적 배경 및 연구모형

### 1. 주가지수, 주가지수선물, 주가지수 옵션가격간의 관계

주가지수 선물과 주가지수 옵션은 주가지수를 기초자산으로 하여 거래된다. 주가지수를 대상으로 하는 선물가격 및 옵션가격과 주가지수와의 관계에 대하여 본 연구의 진행을 위하여 간략하게 살펴보고자 한다. 모든 이상적인 조건하의 완전 시장하에서 만기가 T이며 현재시점이 t인 주가지수 선물가격과 현물가격의 이론적 관계는 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$F_t = S_t e^{r(T-t)/365} - D_{t,T} \quad (1)$$

여기서  $F_t$ 는 현재시점의 선물가격,  $S_t$ 는 현재시점의 현물가격,  $D_{t,T}$ 는 현재부터 만기까지 시점 사이에 발생하는 주가지수 구성 주식들의 배당금 합의 현재가치, T-t 파생상품의 만기까지의 잔존기간(잔존일수/365로 계산)

주가지수옵션에 대해서는 동일한 행사가격 X를 갖는 풋옵션의 가격과 콜옵션 가격 사이에 성립하는 풋-콜 등가식(Put-Call parity)으로 현물가격과의 관계는 다음과 같이 나타

낼 수 있다.

$$C_t - P_t = S_t - Xe^{-r(T-t)/365} \quad (2)$$

$C_t$ 는 콜옵션 가격,  $P_t$ 는 풋옵션 가격임

주가지수 선물과 주가지수 옵션간의 관계는 위 식(2)의 풋-콜 등가식을 선물가격으로 변형한 아래의 식 (3)과 같이 풋-콜-선물 등가식(Put-Call\_Future parity)으로 나타낼 수 있다.

$$C_t - P_t = (F - X)e^{-r(T-t)/365} \quad (3)$$

따라서 현물시장과 선물시장, 현물시장과 옵션시장, 선물시장과 옵션시장 간의 연관관계는 주가지수선물시장과 옵션시장에서 형성되는 시장가격이 이론가격으로부터 벗어날 때 프로그램매매를 통하여 시세차익을 얻으려는 차익거래자들에 의하여 유지되어진다.

선물가격이 보유비용모형에 의해 추정된 이론가격 이상에서 형성되는 경우에는 선물을 매도하는 한편 현물을 매입하는 매수차익거래로, 반대의 경우에는 선물을 매입하고 현물을 공매하는 매도차익거래가 이루어진다. 또한 옵션의 가격이 풋-콜가격 등가식에 의한 균형이 깨지는 경우, 역시 차익거래가 이루어지게 되며 이러한 과정을 통해 현물시장, 선물시장, 옵션시장 간의 가격이 균형을 이루게 된다.

따라서 본 연구에서는 각 시장가격들 사이의 장기 균형관계를 파악하기 위하여 이들의 분수 공적분 성립 여부를 살펴보고자 한다.

## 2. 장기기억과 분수차분계수의 추정

ARMA 등과 같은 단기기억모형에 의하면 금리나 주가수익률과 같은 금융시계열 자료에 있어서 과거의 외부 충격은 시차가 증가함에 따라 곧 사라지며 이에 따라 자기공분산(autocovariance)도 어느 정도의 시차가 지나면 0이 된다. 그러나 장기기억을 가진 시계열에 있어서 외부충격의 영향은 상당기간 지속되며 자기공분산도 훨씬 서서히 감소하는 경향을 가진다. 따라서 금융시계열의 특성에 관한 최근의 연구들은 시계열에 가해

지는 충격의 지속성(persistence)에 대하여 관심을 집중하고 있다. 이러한 지속성에 대한 연구는 주로 시계열자료에서 단위근이 존재하는지를 검정함으로써 진행되어 오고 있다. 이는 불안정한 시계열변수들 간의 선형결합이 안정적일 수 있다는 공적분 관계에 대한 검정으로 진행되고 있지만, 이들의 장기균형관계, 즉 충격의 지속성 정도에 대한 측정에서 I(0)과정과 (1)과정의 면도날 같은 구별(knife-edge distinction)은 너무 제약적이라는 견해가 제시되고 왔다. 이에 따라 Granger-Joyeux(1980), Hosking(1981) 등은 충격의 영향이 장기간 걸쳐 영향을 주는 특성에 대하여 표현 가능한 분수 적분 ARMA(fractionally integrated ARMA : ARFIMA)모형을 제시하였다. 이러한 ARFIMA 모형에서는 차분계수(d)가 반드시 정수일 필요가 없으며  $-1/2 < d < 1/2$  일때 시계열은 안정적이고 가역적인 ARMA 과정이 된다는 것을 보여 주었다. 이것은 I(0)과정에서 자기상관계수 값의 지수적 감소(exponential decay)와 I(1) 과정에서의 무한 지속성(infinite persistence)을 포함하여, 자기상관계수 값이 쌍곡선율(hyperbolic rate)로 느리게 감소하게 되는 특성도 표현 할 수 있는 ARIMA모형의 일반화된 것으로 볼 수 있다.

즉, 분수차분 안정적 시계열(fractionally stationary time series)는 정수차분 시계열 모형보다 더 일반적인 형태라 할 수 있다. 시계열구조  $X_t, t=1, \dots, n$ 를  $d$ (단,  $-1/2 < d < 1/2$ )차 차분하여 만든 시계열  $W_t = (1-B)^d X_t$ 가 안정적인  $ARMA(p, q)$ 를 따를 때  $X_t$ 를 안정적  $ARFIMA(p, d, q)$ 라고 하고 다음과 같이 시차다항식(lag polynomial)을 사용하여 나타낼 수 있다.

$$\phi_p(B)(1-B)^d X_t = \theta_q(B)\epsilon_t \quad (4)$$

단, B=시차연산자(lag operator)

$$\phi_t(B) = 1 - \sum_{j=1}^p \phi_j B^j, \theta_q(B) = 1 - \sum_{j=1}^q \theta_j B^j : \text{시차다항식}$$

$$\epsilon_t \sim iid(0, \sigma_\epsilon^2)$$

표준적인 ARIMA 모형의 경우에 차분계수  $d$ 의 값은 항상 정수의 값을 가진다. 즉, 이 모형에 있어서 시계열이 안정적인 경우에는  $d = 0$ 의 값을 가지며, 단위근이 존재하는 불안정한 경우에는 1또는 그 이상의 정수값을 가지게 된다. 그러나 ARFIMA모형은 차분계수  $d$ 가 정수가 아닌 실수값을 가질 수 있으므로 ARIMA 모형을 더 일반화 한 것으로

로 볼 수 있다. ARFIMA과정  $X_t$ 는  $\phi(B)$ 와  $\theta(B)$ 의 모든 근이 단위원(unite circle) 외부에 있고 차분계수가  $-1/2 < d < 1/2$  이면 안정적이고 가역적인 시계열임 됨을 알 수 있다. 그러나 만약  $d \geq 1/2$ 이라면 이 과정은 무한분산(infinite variance)을 가지게 되므로 불안정적인 시계열이 된다. 따라서 차분계수  $d$ 를 정수가 아닌 실수차원으로 그 범위를 넓히므로서 분수적분모형은 표준적인 시계열모형보다 더 넓은 저빈도, 평균회귀 동학을 포함할수 있게 된다. 시계열의 평균회귀 특성은  $d < 1$ 인가 아닌가에 따라 달리 해석 될 수 있는바, 식 (1)은 특수한 경우로  $d = 1$ 을 포함한다. 그러므로  $d = 1$ 과  $d < 1$  사이의 구별은  $X_t$ 의 평균회귀성향을 파악하는 있어서 굉장히 중요하다. 즉  $d = 1$ 의 경우에는 충격의 지속성은 영원하지만,  $d < 1$ 인 과정에서는 충격의 영향이 아주 느리게 감소하지만 결국에는 사라져 0이 된다는 것이다. 이는 식 (1)의 이동평균(MA) 표현식을 이용하여 보여질 수 있다.

$$(1 - B)X_t = A(B)\epsilon_t \tag{6}$$

여기서  $A(B) = 1 + A_1B + A_2^2B^2 + \dots$

$$\begin{aligned} &= \sum_{j=0}^{\infty} A_j B^j \\ &= 1 + \sum_{j=1}^{\infty} A_j B^j \\ &= (1 - B)^{1-d} \phi^{-1}(B) \theta(B) \end{aligned}$$

로 나타내 질 수 있다. 이러한 이동평균계수  $A_j$ 를 Campbell-Mankiw(1987)는 충격반응 계수(impulse response coefficient)라 하였으며, 시점 t에서 시계열  $X_t$ 에 가해진 한단위의 충격은 시점 t+k에서  $A_1 + A_2 + \dots + A_k$ 가 된다. 즉 평균회귀과정에서는 이러한 누적충격반응계수의 무한합  $A(1)$ 이 0이 되며, 이는 충격의 영향이 결국에는 사라지게 됨을 의미하는 것이다.

또한 Cheung-Lai(1993)는  $d < 1$ 일 경우에  $A(1) = 0$ 이 되므로 충격의 영향이 소멸하며,  $d \geq 1$ ,  $A(1) \neq 0$ 이면 충격의 효과는 영구히 사라지지 않음을 보였다. 즉, 평균회귀 성향( $A(1) = 0$ )은  $d < 1$ 인 경우에만 나타난다. 따라서 분수차분에 대한 검정이 평균회

귀의 존재를 결정하는데 이용될 수 있으며  $d$ 의 크기를 통해 충격의 지속성 정도까지 파악할 수 있음을 보여 주었다.

이에 대하여 Gouriéroux and Monfort(1997)는 ARFIMA(p,d,q)모형을 다음과 같이 정의하고 확률과정의 특성에 대하여 분류를 하였다.

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} A_j \epsilon_{t-j} \quad (7)$$

위 식에서

a) 만일  $\sum_{j=0}^{\infty} A_j^2 < \infty$  이면, 확률과정  $\{X_t\}$ 는 점근적 정상(asymptotically stationary)이다.

b) 만일  $\sum_{j=0}^{\infty} A_j^2 = \infty$  이면, 확률과정  $\{X_t\}$ 는 점근적 비정상(asymptotically nonstationary)이다.

c) 만일  $\sum_{j=0}^{\infty} |A_j| < \infty$  이면,  $\{X_t\}$ 는 단기기억(short-memory)이다.

d) 만일  $\sum_{j=0}^{\infty} |A_j| = \infty$  이면, 확률과정  $\{X_t\}$ 는 장기기억(long-memory)이다.

즉 다시 말하면 ARFIMA(p,d,q) 과정  $\{X_t\}$ 는 다음의 특성을 가지는 것으로 정리될 수 있다.

- 1)  $\{X_t\}$ 가 점근적 정상과정이기 위한 필요충분조건은  $d < 1/2$ 이다.
- 2) 만일  $0 < d < 1/2$ 이면,  $\{X_t\}$ 는 점근적 정상이며 장기기억과정이다.
- 3) 만일  $d \leq 0$ 이면,  $\{X_t\}$ 는 점근적 정상이며 단기기억과정이다.

이 분수차분계수  $d$ 를 추정하기 위해서는 크게 두 가지 방법이 적용될 수 있는데, 하나는 Geweke and Porter-Hudak(1983)으로 대표되는 반모수적 방법(Semiparametric Method)이고 다른 하나는 진동수영역에서의 결합최우법(Fox-Taququ방식, Sowell 방식)이라고 할 수 있다.<sup>4)</sup> 옵션의 내재변동성과 실현변동성 시계열의 장기기억모수  $d$ 를 추정하기 위해 본 연구에서는 GPH(1983) 추정량을 사용하고자 하며 다음과 같이 도출할

---

4) 조하현 · 이승국(2003)

수 있다.

먼저,  $d$ 차 차분하여 만든 시계열  $W_t = (1-B)^d X_t$ 가 안정적  $ARMA(p, q)$ 를 생성시킬 때 원시계열  $X_t$ 의 주파수  $\omega$ 에서의 스펙트럴 밀도함수(spectral density function)  $f_X(\omega)$ 는 다음과 같다.

$$f_X(\omega) = |1 - e^{-i\omega}|^{-2d} f_W(\omega), \quad 0 \leq \omega \leq \pi \quad (8)$$

단,  $|\cdot|$  = 복소수  $\cdot$ 의 크기(length)의 제곱근

$$f_W(\omega) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \left| \frac{\Theta_q(e^{-i\omega})}{\Phi_p(e^{-i\omega})} \right|^2$$

$d$ 에 대한 GPH 추정량은 각각의 푸리에 주파수  $\omega_j = \frac{2\pi j}{n}, j=1, \dots, [\frac{n}{2}]$  (단,  $[\cdot]$ 는 가우스 함수)에서의 피어리드그램(periodgram)  $I_X(\omega_j)$ 을 도출한 후 이것을 아래의 회귀식에 대입하여  $d$ 를 추정하면 된다.

$$Y_j = c + dX_j + e_j, \quad j=1, \dots, m \quad (9)$$

$$\text{단, } Y_j = \ln I_X(\omega_j), \quad c = \ln f_W(0), \quad X_j = |1 - e^{i\omega_j}|^2 \\ e_j = \ln [I_X(\omega_j) / f_X(\omega_j)]$$

여기서  $e_j$ 는 *i.i.d*과정이며  $X_j$ 는  $X_j = \ln \left[ \frac{1}{4[\sin^2(\omega_j/2)]} \right]$ 로 치환되며  $Y_j$ 는

$$Y_j = \ln \left( (2\pi n)^{-1} \left| \sum_{t=1}^n X_t e^{i\omega_j t} \right|^2 \right) \text{로 변환되어 종속변수로 들어간다.}^5)$$

그리고 식(4)의  $d$ 에 대한 OLS 추정량 즉, GPH추정량  $\hat{d}$ 의 점근적 분포는 다음과 같다.

$$\hat{d} \sim \mathcal{N} \left( d, \frac{\pi^2}{6 \sum_{j=1}^m (U_j - \bar{U})^2} \right), \quad \text{단, } U_j = \ln [4 \sin^2(\omega_j/2)] \quad (10)$$

---

5) Robinson(2001)

### 3. 공적분과 분수공적분

공적분은 Engle and Granger(1987)에 의하여 도입된 개념으로 경제나 금융현상에 대한 금융시계열을 분석하는데 효과적으로 이용되는 것으로써 개별적으로 불안정한(nonstationary)시계열 자료들간의 선형 결합함수가 안정적(stationary)인 경우(즉, 이들 변수 간 선형함수의 오차항이 안정적인 경우) 차분된(differencing) 변수와 오차항으로 표현되는 수준변수를 동시에 고려함으로써 장기균형의 특징을 파악함과 동시에 단기적 조정 과정을 동태적인 측면에서 파악할 수 있는 모형이다. 즉 두 변수  $Y_t$ 와  $X_t$ 가 각각  $I(1)$ 변수라고 할 때, 이의 선형결합인  $Y_t - \beta X_t$ 도 일반적으로  $I(1)$  변수라고 기대할 수 있다. 그러나 만약 이것이  $I(1)$  변수가 아니라  $I(0)$ 로 나타내어 진다면 두 변수  $Y_t$ 와  $X_t$ 가 서로 공적분관계에 있다고 할 수 있다. 일반적으로 나타내면, 변수들  $X_t$ 와  $Y_t$ 가 각각  $I(d)$ 와  $I(b)$  일 때, 이의 선형결합  $Y_t - \beta X_t$  이  $I(d-b)$ ,  $d \geq b \geq 0$ 이라면  $X_t$ 와  $Y_t$ 는  $(d,b)$ 차수로 공적분관계에 있다고 하며, 이때  $Y_t, X_t \sim CI(d,b)$ 라고 표기한다. 이때 벡터  $(1, -\beta)$ 를 공적분벡터(cointegrating vector)라 하며, 두 변수간에는 장기적 균형관계가 성립된다고 설명된다. 이 경우 공적분벡터는 장기적 균형을 나타내는 모수이며,  $Y_t - \beta X_t$ 는 단기간에 장기적 균형으로부터 벗어나는 불균형오차(disequilibrium error)라 한다. 결국 공적분이란 개별적으로는 불안정적인 변수들의 선형결합이 안정적인 상태라 할 수 있다. 이러한 공적분 관계를 검정하기 위한 공적분 회귀식(cointegration regression)은 다음과 같다.

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + \epsilon_t \quad (11)$$

$\alpha$ 와  $\beta$ 는 공적분 모수이며,  $\epsilon_t$ 는 균형관계로부터의 오차로써 공적분회귀식의 잔차항이다.

여기서 추정잔차  $\epsilon_t$ 의 단위근을 검정하는 것이 공적분의 존재를 결정하는 것으로 이 추정잔차의 차분계수는 위 식의 구성요소인 두 변수들의 차분계수보다 낮아야 한다.

선형공적분관계로만 관심을 제한하면 일반적으로 공적분의 필요조건은 동일한 차분계수를 가지는 것이다. 즉 공적분에 대한 관심은 Robinson-Marinucci(1998)가 설명한 것과 같이  $d=1$ 과  $b=1$ 로 설정되는  $I(1)/I(0)$  패러다임으로 제한되어 왔다. 그러므로 일반적인 공적분 검정을 하기 위해서는 사전에 단위근 검정을 먼저 수행해야 한다. 만약 두 변수

가 단위근-I(1)과정-을 가진다면 두 가지 형태의 공적분 검정법이 시행 될 수 있는데, 하나는 VAR(Vector Autoregressive)의 프레임워크를 사용하는 Johansen 방식이고, 다른 하나는 OLS 추정치의 잔차에 근거하는 2단계 최소자승법을 사용하는 Engle-Granger 방식이다. Johansen방식의 공적분 검정은 기존 Engle-Granger 방식의 공적분 검정법이 2변수 이상의 다변량 분석에는 적절치 않음으로 제기된 방식이다. 또한 Engle-Granger의 공적분 검정법은 분석대상 변수들을 종속변수와 설명변수로 분리하여 검정을 실시하여야 하는데 어느 것을 종속변수로 선택하느냐에 따라 검정결과가 다르게 나타난다는 단점을 지니고 있다. 이에 반하여 Johansen 방식은 VAR모형에 기반하여 공적분 관계를 추정하므로 모든 변수를 내생변수로 간주하므로 종속변수를 선택할 필요가 없다.

분수 공적분(fractionally cointegration)분석은 공적분 잔차항에서 차분계수를 정수가 아닌 것에 대하여 허용함으로써 일반적으로 불리는 공적분 잔차항을 I(0)로 제한하는 제약을 완화하는 것이다. 즉  $d-b$ 가 0이 아니더라도 1보다 작아 평균회귀성향을 보이면 공적분 관계에 있다라고 하는 것이다. 이는 공적분의 기반이 되는 Granger 표기정리(Granger representation theorem)에서 공적분 벡터가 정상적이기만 하면 되기 때문이다. 다시 말하면 어떤 변수들에서 분수 공적분 관계는 그들의 균형오차항이 분수차분 과정을 따르게 됨을 의미한다. ARFIMA모형에서 살펴보았듯이  $d$ 가 정수가 아니라 분수인 경우, 시계열에 가해지는 충격의 효과는 쌍곡선율(hyperbolically)로 매우 느리게 감소하게 된다. 이는 충격으로 인한 균형으로부터의 단기이탈이 매우 느리게 사라지는 경향을 보이는 것이다. 그러나 일반적인 공적분관계가 성립한다면, 균형오차항은 I(0)가 되고 충격에 대한 이탈은 상대적으로 빠르게 사라지게 되는 경향이 있다.

동일한 차분계수를 가지는 불안정적인 두 시계열에 대한 분수 공적분 검정을 수행하기 위해서는 우선, 통상적인 공적분검정을 통해서 균형 오차항을 구해야 한다. 그 다음, 그 균형 오차항에 대한 분수차분계수를 추정하여 추정된 차분계수가 0과 1사이의 비정수 값으로 나타난다면 두 시계열간에는 분수 공적분 관계가 존재함을 의미한다.

그 첫 단계로 공적분 관계의 전제가 되는 공통의 차분계수를 가지는지를 검정해보아야 한다. 이것을 위해 본 논문에서는 Robinson(1995a)에서 사용된 이변량제약(bivariate constrained) GPH 추정량을 사용하고자 한다. 절차는 다음과 같다.

먼저, 두 시계열  $X_t$ 와  $Y_t$ 의 분수차분계수가 동일하다고 가정한 상태에서  $d$ 를 추정하기 위한 회귀식은 제약을 반영하여 두개의 회귀식을 표현하는 것을 제외하고는 단변량 회귀식에서와 동일한 구조를 가진다. 즉 다음과 같다.

$$Y_{1j} = c_1 + dX_j + e_{1j}, j=1, \dots, m \quad (12)$$

$$Y_{2j} = c_2 + dX_j + e_{2j}, j=1, \dots, m \quad (13)$$

$$Y_{1j} = \ln I_X(w_j) \quad (14)$$

$$Y_{2j} = \ln I_Y(w_j) \quad (15)$$

위 식들에 반영된 정보를 모두 이용하여 공통의 차분계수  $d$  를 추정하기 위해서 이 두 식을 결합하면 다음과 같다.

$$Y = Z\beta + e \quad (16)$$

$$Y = \begin{pmatrix} Y_{1j} \\ Y_{2j} \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & X_{11} \\ \dots & & \\ 1 & 0 & X_{1m} \\ 0 & 1 & X_{11} \\ \dots & & \\ 0 & 1 & X_{1m} \end{pmatrix}_{(2m \times 3)}, \quad \beta = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ d \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} e_{1j} \\ e_{2j} \end{pmatrix}, j=1, \dots, m$$

그러면 위 식(16)의 OLS 추정량  $\hat{\beta} = (\hat{c}_1, \hat{c}_2, \hat{d})'$  의 각각은 점근적으로 정규분포하고 일치추정량이 된다. 따라서 공통차분계수의 통계적 유의성을 살펴볼 수 있다.

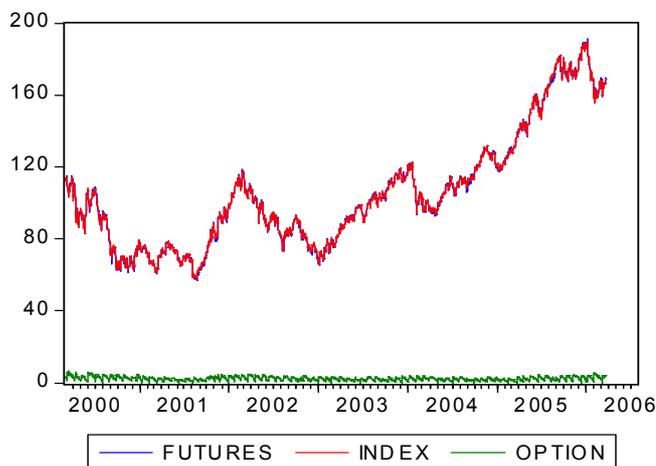
또한 분수적 공적분이 성립하기 위해서는 차분계수가 같은 두 시계열의 선형결합에 의해 만들어지는 새로운 시계열의 분수차분계수가 원 시계열의 분수차분계수보다 작아야 한다. 그러므로 공적분 관계를 구성하는 두 시계열을 이용한 회귀식의 계수값을 추정할 때 다음 잔차시계열의 차분계수를 추정해야 한다.

### III. 실증분석

#### 1. 데이터 및 기초통계량

본 연구에서는 한국증권선물거래소에서 제공하는 KOSPI 200 주가지수의 증가와

KOSPI200선물, 옵션(등가격)의 최근월물 일별 종가를 이용하였으며, 연구의 전체 분석 기간은 2000년 3월 2일부터 2006년 7월 31일까지로 한다. 주가지수 선물시장은 1996년, 옵션 시장은 1997년 개장 되었으나 그간 시장에서는 많은 변화가 있었다. 따라서 본 연구에서는 각 시장의 거래시간이 일정하게 운영되고, 외환위기의 영향이 거의 소멸 되었다고 보여지는 그 이후의 기간을 분석대상 기간으로 선택하였다. 또한 본 연구에서는 현물시장, 선물시장, 옵션시장의 가격들 사이의 장기균형관계를 파악하는데 목적이 있으므로 선물시장과 옵션시장의 경우는 거래가 가장 많이 발생하는 최근월물을 사용하였다. 이렇게 선택된 각 시장별 종가에 대한 가격 시계열은 각각 1,580개가 선택 되었다.



그림(1) 현물, 선물, 옵션

위 그림 (1)은 2000년 3월 2일부터 2006년 7월 31일까지 각 시장별 종가의 변화추이를 보여주고 있다. 외관상으로 현물과 선물의 경우는 그 변동추이가 비슷한 행태를 보이나 옵션의 경우는 두 가격들의 변동추이와는 다른 양상을 보이고 있다. 따라서 현물과 선물은 장기적인 균형 관계 즉 공적분 관계가 성립할 것으로 예상이 되나, 옵션은 다른 시장들과의 관련성이 현저히 떨어지는 것으로 볼 수 있다.

(표 1) 기초통계량 비교

	평균	표준편차	왜도	첨도	Jarque-Bera의 Q통계량 (p-value)
현물	105.18	31.96	0.9	3.02	213.98

					(0.000000)
선물	105.18	32.07	0.89	3.01	208.51 (0.000000)
옵션	2.24	1.06	0.29	2.71	26.36 (0.000002)

Jarque-Bera의 Q통계량은 시계열이 정규분포인지를 검정하기 위한 통계량으로 정규분포에서 만들어진 왜도, 첨도와의 차이를 측정한 것으로 다음과 같이 계산된다.

$$Q = \frac{N-k}{6} (S^2 + \frac{1}{4} (K-3)^2)$$

여기서, S는 왜도, K는 첨도이고, k는 계수의 수임.

정규분포한다는 귀무가설하에서 Q통계량은  $\chi^2(2)$ 분포를 따른다.

위 표(1)의 Jarque-Bera Q통계량으로 볼 때, 현물 및 선물의 가격 시계열은 정규성 가설을 강하게 기각하는 것으로 보여진다. 반면 옵션은 정규성 가설은 기각 하지만, 그 정도는 상대적으로 약한 것으로 보인다. 이는 옵션의 가격 시계열이 현물이나 선물의 가격 시계열보다 정규분포에 가깝다는 것으로 옵션 시장의 효율성 정도가 현물이나 선물시장 보다 더 높을 것이라고 추측 할 수 있다.

표(2) 자기상관계수의 비교

시차	현물	선물	옵션
1	0.997	0.997	0.710
2	0.994	0.994	0.560
3	0.991	0.991	0.436
4	0.988	0.988	0.330
5	0.985	0.985	0.237
6	0.983	0.982	0.168
7	0.980	0.979	0.123
8	0.978	0.977	0.085
9	0.975	0.974	0.045
10	0.973	0.972	0.029
25	0.935	0.930	0.246
50	0.862	0.859	-0.001
100	0.687	0.683	0.165

위의 (표 2)는 시차에 따른 각 시계열(수준)의 자기상관계수를 보여주고 있다. 위에서 보는바와 같이 현물과 선물의 자료에서는 자기상관이 매우 느리게 감소하는 반면 옵션은 그 감소폭이 매우 크게 나타나고 있다. 이는 현물과 선물은 단위근을 가진 비정상적인 시계열일 가능성이 높음을 보여준다고 할 수 있다. 또한 현물과 선물의 자기상관계수의 감소폭이 거의 비슷하게 나타나는 것으로 보아 두 시계열이 상관되어 있음을 알 수 있다.

## 2. 단위근 검정

각 시계열 자료들에 대한 자기상관분석에서 현물과 선물의 자료는 비정상성 (nonstationary)의 증거를 나타내고 있으므로 단위근이 존재하는지를 검정해 볼 필요가 있으며, 또한 옵션에 대하여도 시계열 안정성에 대한 귀무가설을 검정해 볼 필요가 있다.

먼저 현물, 선물, 옵션에 대한 ADF타입의 단위근 검정을 실시하였다.

(표3) ADF 단위근 검정결과

		ADF 통계량	비고	
현물	수준	-0.319622	단위근 존재	I(1)과정
	1차 차분	-38.60933	단위근 없음	
선물	수준	-0.429014	단위근 존재	I(1)과정
	1차 차분	-40.68036	단위근 없음	
옵션	수준	-4.433273	단위근 없음	I(0)과정

귀무가설 : 단위근이 존재한다.

임계치 : -2.56644(1%), -1.941026(5%), -1.616563(10%)

위의 (표3)에서 보여지듯이 현물, 선물, 옵션에 대한 표준적인 단위근 검정결과 현물과 선물은 모두 I(1) 과정임을 보여주고 있으나 옵션은 수준에서 시계열 정상이다. 그러나 Ooms & Doornik(1999)은 ADF타입의 단위근 검정은 분수 적분된 시계열(I(d),  $d < 1$ )에 대하여 1차 적분된 시계열 I(1)을 검정하는데 유용하지 못하다고 하였다. 이와 함께 Lee & Schmidt(1996)도 시계열이 안정적인가를 검정하는데는 ADF타입의 단위근 검정 보다는 KPSS(Kwiatowski-Phillips-Schmidt-Shin)검정이 시계열이 분수 적분되어 있다는 가설(I(d),  $d < 1$ )에 대해 시계열이 안정적이라는 가설(I(0))을 검정하는데 검정력을 갖는다고 하였다. 따라서 본 연구에서도 현물, 선물, 옵션의 1차 차분 시계열이 시계열 안정적이라는 귀무가설을 KPSS 검정하였으며, 그 결과는 (표4)와 같다.

(표4) KPSS 검정결과

	KPSS 통계량	비고
D(현물)	0.331991	귀무가설을 기각할 수 없음
D(선물)	0.323722	귀무가설을 기각할 수 없음
D(옵션)	0.054259	귀무가설을 기각할 수 없음

귀무가설 : 시계열 안정적이다.

임계치 : 0.739000(1%), 0.463000(5%), 0.347000(10%)

위 (표 4)에서 알 수 있듯이 KPSS 검정결과도 1% 유의수준에서 귀무가설을 기각할 수 없으므로 현물, 선물, 옵션의 1차 차분 시계열은 시계열 안정적임을 알 수 있다. 즉 ADF검정과 KPSS 검정 결과를 요약하면 현물, 선물 시계열은 수준에서는 불안정한 시계열이나 1차 차분 혹은 그 이하의 분수 적분을 할 경우에 안정적 시계열이 될 수 있으며 옵션은 수준에서 시계열 안정적인 변수임을 알 수 있다.

### 3. 공적분 관계 검정

본 연구의 목적은 현물시장과 그로부터 파생된 선물과 옵션시장들 간의 장기적 균형관계를 파악하고자 하는데 있다. 우리는 앞에서 살펴본 바와 같이 세 변수들에 대한 단위근 검정을 실시한 결과 현물과 선물은 각각 단위근을 가지는 비정상적인 시계열임을 확인하였다. 그러나 옵션은 수준에서 시계열 안정적이므로 현물과 선물과의 공적분관계 검정이 의미가 없다. 따라서 본 연구에서는 가격이 안정적인 옵션을 제외한 주가지수와 선물 가격간의 관계를 파악해 보고자 한다. 이 두 변수들 사이의 관계를 파악하기 위하여는 1차 차분된 변수를 이용하여야 하나 만약 이들의 선형결합이 안정적이라면 단지 차분을 한 후 회귀분석을 하면 변수들 사이의 장기적 관계에 대한 정보가 사라지기 때문에 각 변수들 사이에 안정적인 선형결합이 존재하는지 여부를 검증하기 위해 Johansen방식의 공적분 검정을 실시하였다.

(표5) 공적분 검정결과

	귀무가설	특성근	우도비 검정통계량	5% 임계치	비고
현물-선물	공적분이 존재	6.28E-06	0.009511	3.841466	귀무가설 기각할 수 없음

우도비 검정통계량(LR test statistic)은 다음과 같이 계산된다.

$$LR = -T \sum_{i=r+1}^p \ln(1 - \lambda_i)$$

여기서 T는 관찰치 수,  $\lambda$ 는 특성근의 값.

위의 (표5)에 나타난 각 시장변수들 간의 공적분 검정결과를 보면 우도비통계량(Trace 통계량)이 5% 유의수준에서 임계치보다 작으므로 귀무가설을 기각 할 수 없으므로 공

적분이 존재한다고 볼 수 있다. 따라서 현물과 선물에 대한 장기적인 균형관계가 존재하는 것으로 추론할 수 있다. 그렇지만 이러한 결과는 두 변수들 사이의 장기적인 관계에 대한 것이므로 각 시장들 사이의 선도-지연이나 동조화 현상에 관하여는 보다 단기적인 분석방법을 이용하여 살펴볼 필요가 있겠다.

또한 이러한 표준적인 공적분 검정은 두 시장 변수들 사이의 균형관계가 일시적 이탈로부터 얼마나 빠른 속도로 수렴하는지에 대하여는 구체적인 정보를 얻기가 힘이 든다. 따라서 본 연구에서는 균형오차에 대한 차분계수를 추정함에 있어  $I(0)/I(1)$ 의 면도날 같은 제약을 가하지 않는 분수차분계수를 추정하고자 한다.

#### 4. 균형오차에 대한 차분계수 추정

두 시장 변수들에 대한 Johansen 공적분 검정결과 현물과 선물 사이에 공적분이 적어도 한개 이상 존재한다는 결과를 보여주었다. 이는 이 두 시장변수들 사이의 장기적 균형관계가 존재함을 의미한다고 볼 수 있다. 이러한 장기적 균형관계에서 각 변수들 사이의 균형오차가 일시적인 충격 혹은 이탈로부터 얼마나 빠른 속도로 수렴하는지에 대하여 좀 더 구체적으로 살펴보기 위하여 균형오차에 대한 차분계수를 추정해보고자 한다. 즉 표준적인 공적분 검정결과는 균형오차가  $I(0)$ 과정임을 의미하지만 이것은 매우 제약된 결과이다. 따라서 본 연구에서는 균형오차의 장기기억특성을 고려하기 위해 오차항의 차분계수를 GPH방식으로 추정하여 보았다.

먼저 차분계수  $d$ 의 추정치를 도출하기 위해서는 평활화된 피어리드그램값에 사용되는 bandwidth parameter인  $m$ 의 값을 결정해야 한다. 이  $m$ 의 증감은 분산과 편의간에 상충관계를 가진다. 즉,  $m$ 이 커질수록 추정량의 분산은 작아지지만 편의의 가능성은 커지게 된다.<sup>6)</sup> 적절한  $m$ 의 값을 설정하기 위해 Hurvich and Deo(1999)와 Andrews and Guggenberger(2003)의 경우 자료의 특성에 따른 선정방법을 제시하고 있다. 하지만 본 연구에서는 Bandi and Perron(2006)의 연구에서 사용한 것과 같이  $\sqrt{n}$ 에서  $n^{0.8}$ 사이의  $m$  값에 대해 추정을 하였다.

(표6) 단변량 GPH 추정량과 이변량 제약 GPH 추정치

---

6) Wei(2006)

	단변량 GPH 추정치		이변량 GPH 추정치
	현물	선물	
$m = 39$	1.0741 (0.1194)	1.0747 (0.1194)	1.0744 (0.0844)
$m = 83$	1.0641 (0.0772)	1.0603 (0.0772)	1.0622 (0.0546)
$m = 173$	1.0130 (0.0517)	0.9982 (0.0517)	1.0057 (0.0367)
$m = 362$	0.9965 (0.0355)	0.9841 (0.0355)	0.9903 (0.0251)

주) ()안의 값은 표준오차

위 표(6)를 보면 수준자료에서 현물은  $m = 362$  값에서  $\hat{d} > 1/2$ 인 불안정한 장기기억 속성을 가지는 것으로 파악할 수 있지만 나머지  $m$ 값에 대하여는 주가지수 현물의 증가는 장기기억속성을 가진다고 보기 힘들다. 또한 수준자료에서 선물은  $m=173$ 과  $m=362$ 에서  $\hat{d} > 1/2$ 인 불안정한 장기기억 속성을 가지는 것으로 파악할 수 있다. 분수 공적분 여부를 파악하기 위한 전제 조건인 두 변수간의 적분차수가 동일한가에 대한 이변량 제약 GPH 추정에서도  $m=362$ 에서는 두 변수에서 불안정한 장기기억 특성이 나타남을 볼수 있지만 나머지  $m$ 값에서는 장기기억 속성을 가진다고 보기 힘들다. 그러나 이변량 제약 GPH 추정량이 모든  $m$ 값에서 통계적으로 유의함에 따라 두 변수간에는 공적분이 성립한다고 볼 수 있겠다. 따라서 현물시장과 선물시장간의 분수 공적분 여부를 살펴보기 위하여 추정된 회귀식은 아래와 같다.

$$Y_t = -0.34645 + 1.0032X_t \quad (17)$$

여기서  $Y_t$  는 선물의 증가,  $X_t$ 는 현물의 증가이다.

위의 식으로부터 균형 오차항을 추출하여 분수차분을 실시한 결과는 아래와 같다.

(표7)

	$m = 39$	$m = 83$	$m = 173$	$m = 362$
균형오차항의	-0.0056	0.3010	0.5197	0.4278
차분계수	(0.0194)	(0.0772)	(0.0517)	(0.0355)

위에 나타난 결과를 보면 균형오차항의 차분 계수값이  $m=173$ 값을 제외한 모든  $m$ 값에서  $-1/2 < \hat{d} < 1/2$ 임을 알 수 있다. 이는 두 변수에 대한 균형 오차항이 분수 적분되어 있으며 이는 균형 오차항이 장기기억 속성을 가짐을 알 수 있다. 균형 오차항이 분수 적분되었음을 의미하는 바는 그것의 자기상관 계수값이 쌍곡선율로 매우 느리게 감소함을 시사한다. 이러한 결과는 표준적인 공적분 검정결과와는 달리 잔차가 궁극적으로 평균회귀성향을 보임을 의미하며, 이는 두 변수가 분수 공적분 관계를 가지고 있음을 함의한다. 즉 이는 두 변수 대하여 외부의 충격이 가해져서 균형관계로부터 이탈이 발생 할 경우 이들 사이의 균형관계로의 회복은 매우 느리게 진행됨을 의미한다. 즉 두 변수간에는 장기적인 균형관계를 가지고는 있지만 균형으로의 수렴속도는 상당히 느리다고 할 수 있다.

#### IV. 결과

우리나라의 주가지수에 대한 파생상품시장은 1997년 7월 주가지수 선물시장의 개장을 시작으로 양적, 질적으로 비약적인 발전을 거듭해 오고 있다. 이에 따라 주가지수 현물시장과의 상호관계에 대한 관심이 증대되어 오고 있으며, 그에 대한 연구들이 활발히 진행되고 있는 가운데 본 연구는 동일한 자산에서 형성된 파생상품 시장의 가격들 사이의 장기적 균형관계를 분수 공적분 검정을 통하여 살펴보았다. 각 시장들 사이의 분수 공적분 관계를 파악하기 위하여 수준자료에서의 KOSPI200 주가지수의 증가와 KOSPI200 선물, 옵션(등가격)의 최근월물예에 대한 증가 시계열에 대한 단위근 검정을 실시한 결과 현물과 선물의 시계열은 수준에서 단위근을 가짐으로써 시계열 불안정임을 알 수 있었고, 옵션의 경우는 수준자료에서 단위근 존재에 대한 귀무가설을 기각함으로써 안정적인 시계열임을 알 수 있었다. 따라서 본 연구에서는 수준에서 안정적인 시계열을 가지는 옵션을 제외하고 현물과 선물 가격간의 공적분 여부를 살펴 본 결과 표준적인 공적분 관계(CI(1,1))가 존재함을 알 수 있었다. 또한 두 시계열 변수사이의 장기균형관계에 대한 좀더 구체적인 실증적 증거를 찾기 위하여 분수 공적분 여부를 살펴보았다. 공적분 관계가 성립하기 위하여는 두 변수 사이의 차분계수가 동일하여야 하므로 그에 대하여 이변량 제약 GPH 추정을 한 결과 모든 bandwidth 모수  $m$ 에서 유의한 차분계수를 가짐으로써 현물과 선물 증가 시계열은 공적분되어 있음을 확인하였다. 그리고 공적분회귀식에서의 균형오차항을 추출하여 그에 대한 GPH추정을 실시한 결과

모든 bandwidth 모수  $m$ 값에서 추정된 차분계수가  $-1/2 < \hat{d} < 1/2$ 값을 가짐에 따라 분수 공적분 되어있음을 확인 할 수 있었다. 이는 각 현물시장과 선물시장의 가격 사이의 균형관계에 대한 충격의 영향이 쌍곡선율로 느리게 감소하는 특성을 표현 할 수 있게 함을 의미한다. 즉, 분수 공적분은 균형오차가 분수 차분된 장기기억(long memory)과정을 따르고 있음을 의미하는데, 이는 충격으로 인한 영향이 단기에 사라지지 않고 균형 가격으로의 회귀가 매우 느리게 나타남을 의미하는 것이다. 따라서 현물시장과 선물시장의 가격 간에 분수 공적분관계가 성립한다면 기존의 선행연구들에서 선도-지연관계를 파악하기 위한 오차수정모형은 오직 장기의 시계열에서만 의미있는 모형이 될 것이다. 또한 동일한 기초자산을 이용하여 위험을 헤지하거나 시장간 차익거래를 통하여 초과이익을 얻고자 하는 시장 참여자들에게 있어 그들의 투자전략이 어떻게 변화하여야 되는지에 대한 정보를 함의하고 있다고 할 수 있다. 즉 두 시장 간에 분수 공적분 관계가 성립된다면 두 시장간의 균형관계가 지속적인 기억을 가지는 시장으로 파악 할 수 있으므로 비교적 장기의 매수-보유(buy&hold strategy)전략을 가져야 할 것으로 이해 될 수 있음을 시사한다고 볼 수 있기 때문이다.

본 연구는 KOSPI200 주가지수의 증가와 선물, 옵션의 최근월물에 대한 일별자료만을 가지고 서로간의 분수 공적분 여부를 살펴보았는데 향후에는 KOSPI200 선물과 옵션의 잔존만기별로 현물과의 분수 공적분 여부를 살펴보는 것도 만기에 따른 투자자들의 투자행태에 많은 변화를 줄 것이라 예상이 된다. 또한 자료의 접근성이 용이해짐에 따라 일중 고빈도 자료들 사이의 분수 공적분 관계에 대한 연구도 병행하는 것이 연구 결과를 더욱 견고히 할 수 있을 것이다.

## 참고문헌

- 권택호, 박종원, “KOSPI 200 선물거래, 주식시장의 변동성 그리고 시장마찰요인”, 재무관리연구, 제 17권 제 2호, 143-174
- 김술, 김동석, “주가지수 선물과 주가지수의 가격발견기능에 관한 실증 연구 : 공적분과 오차수정모형”, 선물연구, 2000, 제 7호, 87-113
- 김찬웅, 문규현, “우리나라 주식, 선물, 옵션시장에서의 선도/지연효과에 관한 연구”, 재무연구, 제 18권 제 1호, 2001.6. 129-156
- 박종원, “KOSPI 200 파생상품 거래와 주식수익률 변동성의 비대칭성”, 재무관리연구, 제 23권 제 1호, 2006.06, 101-133

- 변종국, 조정일, “KOSPI 200 주가지수선물 도입과 주식시장의 비대칭적 변동성”, 재무관리연구, 제 16권 제2호, 1-35
- 이일균, “분수차분 장기기억과정과 증권의 가격결정”, 재무관리연구, 제18권 제1호, 2001, 1-21.
- 이정형, 강관중, 조신섭, “한국선물시장의 수익률과 변동성에 대한 장기기억 특성”, *Journal of the Koeran Data Analysis Society*, Vol. 6, No. 4. 2004, 1063-1072
- 은철수, 장호윤, “한국주식시장에서의 주가지수 선물과 현물시장 간의 상호작용에 관한 연구”, 한국재무학회 춘계학술연구 발표논문집, 1998
- 조하현, 이승국, “우리나라 환율과 환율변동성의 장기기억에 관한 연구”, *경제분석*, 제9권 1호, 2003, 106-144.
- 조하현, 이승국, 『카오스와 금융시장 : 복잡계경제학의 이해』, 세경사, 2002.
- Antoniou, A. and P. Holmes, "Futures Trading, Information and Spot Price Volatility : Evidence for the FTSE-100 Stock Index Futures Contract Using GARCH", *Journal of Banking and Finance*, 19, 1995, 117-129
- Antoniou, A., P. Holmes and R. Priestley, "The Effect of stock Index Futures Trading on Stock index Volatility : An Analysis of the Asymmetric Response of Volatility to news ", *Journal of Futures Market*, 18m 1998, 151-166
- Andrew, D. W. K. and P. Guggenberger, "A Bias-Reduced Log-Periodogram Regression Estimator for the Long Memory Parameter," *Econometrica*, 71, 2003, 675-712.
- Baillie, "Long memory processes and fractional integration in econometrics," *Journal of Econometrics* 73, 1996.
- Baillie, Bollerslev, "Cointegration, fractional cointegration, and Exchange rate dynamics," *Journal of Finance* 49, 1994.
- Baillie, Bollerslev, Mikkelsen, "Fractionally Integrated GARCH," *Journal of Econometrics* 74, 1996
- Bandi, F. M. and B. Perron, "Long memory and the relation between implied and realized volatility", Mimeo, 2006.
- Baum, Barkoulas, Caglayan, "Long memory or structural breaks : Can either explain nonstationary real exchange rates under the Current float?" *Journal of International Financial Markets, Institutions, and Money*, 1999.
- Bollerslev, T. and H. O. Mikkelsen, "Modeling and Pricing Long-Memory in Stock Market Volatility," *Journal of Econometrics*, 73, 1996, 151-184.

- Brunetti, Gilbert, "Bivariate FIGARCH and fractional cointegration," *Journal of Empirical Finance* 7, 2000.
- Chan, K., "A further Analysis of the Lead/Lag Relationship between the Cash market and Stock Index Futures Market", *Review of Financial Studies*, 5, 1992, 123-152
- Christensen, B. J. and M. Nielsen, "Semiparametric Analysis of Stationary Fractional Cointegration and the Implied-Realized Volatility Relation," *Journal of Econometrics*, 2005.
- Christensen, B. J. and M. Nielsen, "Asymptotic normality of narrow-band least squares in the stationary fractional cointegration model and volatility forecasting" *Journal of Economics*. 2006
- De Lima, P. and Crato, N., "Long-memory in stock returns and volatilities, American Statistical Association", *Proceedings of the Business and Economic Statistics Section*. 1993
- Diebold, Gardeazabal, Yilmaz, "On cointegration and exchange rate dynamics," *Journal of Finance* 49, 1994.
- Ding, Z., C.W. Granger and R. F. Engle, "Long Memory Property of Stock Returns and a New Model," *Journal of Empirical Finance*, 1, 1993, 83-106.
- Fama, "Market Efficiency, Long-term Returns and Behavioral Finance," *Journal of Financial Economics* 49, 1998.
- Fox, Taqqu, "Large sample properties of parameter estimates for strongly dependent gaussian time-series," *Annals of Statistics* 14, 1986, p.517-532.
- Geweke, J. and S. Porter-Hudak, "The Estimation and Application of Long Memory Time Series Models," *Journal of Time Series Analysis*, 4, 1983, 221-238.
- Granger, Joyeux, "An introduction to long memory time series models and fractional differencing," *Journal of Time Series analysis* 1, 1980.  
p15-39
- Hassler, Wolters, "Long memory in inflation rates : International evidence," *Journal of Business & Economic Statistics* 13, 1995.
- Herbst, McCormack and West, "Investigation of a Lead/Lag Relationship between Spot Stock Indices and Their future contracts", *Journal of Futures Market*, 1987, 7, 373-381
- Kawaller, I. G, P. D. Koch, and T. W. Koch, "The Temporal Price Relationship Between S&P 500 Futures and S&P 500 Index", *Journal of Finance*, 42, 1987,

- Lo, Andrew W., "Long-term Memory in Stock Market Prices," *Econometrica* 59, 1991.
- Mandelbrot, "The variation of certain speculative prices," *Journal of Business* 36, 1963.
- Marinucci, D. and P. M. Robinson, "Semiparametric fractional cointegration analysis," *Journal of Econometrics*, 105, 2001, 225-247.
- Pizzi, Economopoulos, O'Neill, "An Examination of the relationship between Stock and Index Cash and Futures Markets : A cointegration Approach", *Journal of Futures Market*, 18, 1998, 297-305
- Poteshman, A. M. "Forecasting future Volatility from Option Prices," Mimeo, 2000.
- Robinson, P. M., "Log-Periodogram Regression of Time Series with Long Range Dependence," *Annals of Statistics*, 23, 1995a, 1048-1072.
- Robinson, P. M., "Gaussian Semiparametric Estimation of Long Range Dependence," *Annals of Statistics*, 23, 1995b, 1630-1661.
- Sowell, "Maximum likelihood estimation of stationary univariate fractionally-integrated time-series models." *Journal of Econometrics*, 53, 1992.
- Stoll, H. R., and Whaley, R. E., "The Dynamics of Stock Index and Stock Index Futures Returns", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 25, 1990, 441-468
- Taylor, S. "Modeling Financial Time Series", Wiley, New York. 1986
- Tsay, "Nonlinearity tests for time series," *Biometrika* 73, 1986.
- Tsay, Chung, "The spurious regression of fractionally integrated processes," *Journal of Econometrics* 96, 2000.
- Velasco, C., "Non-Stationary Log-Periodogram Regression," *Journal of Econometrics*, 91, 1999, 325-371.
- Velasco, C., "Non-Gaussian Log-periodogram Regression," *Econometric Theory*, 16, 2000, 44-79.
- Wahab and Lashgari, "Price Dynamics and Error Correction in Stock Index and Stock Index Futures Market : A cointegration Approach", *Journal of Futures Market*, 1993, 13, 711-742
- Wei, William, *Time Series Analysis*, Pearson. 2006.
- Wei, Leuthold, "Long agricultural futures prices : ARCH, Long memory, or Chaos processes?" *OFOR* 98-03, 1998.

