모기지론 (Fixed-rate mortgage)의 가치평가모형- 부도위험과 이자율위험을 고려한 2-요인 재결합 이항트리모형

성 한 기[1,2]

[1] 한양대학교 경영대학 박사과정
[2] 연락담당 저자 주소: 서울시 성동구 행당동 17 한양대학교 경영대학, 133-791; email: hanki@hanyang.ac.kr Tel: 02)2220-1057; Fax:02)2298-5451.

모기지론 (Fixed-rate mortgage)의 가치평가모형- 부도위험과 이자율위험을 고려한 2-요인 이항트리모형

<연구요약>

본 논문에서는 모기지론의 가치평가를 위해 크게 두 가지를 고려하였다. 첫 번째는 재무적 요인외에 비재무적 요인을 고려하는 것이고, 두 번째는 모기지론에 내재된 옵션의 가치는 조기상환옵션과 부도옵션의 합이 아니라는 점이다.

우선 모기지론의 가치평가를 위해 이자율의 움직임과 주택가격의 움직임이 서로 상관관계를 가지는 2-요인 재결합 이항트리를 사용하였고, 생성된 2-요인 재결합 이항트리를 이용하여 만기시점에서부터 후방축차법으로 모기지론의 가치를 평가하였다. 매 상환시점에서 대출자가 선택하는 옵션에 따라 결합옵션의 가치는 두 옵션의 합과 괴리가 생기게 된다. 또한 비재무적 상환은 대출자로 하여금 재무적 상환 요인만 존재하는 경우와 다른 의사결정을 유도한다. 이자율변동과 주택가격변동외에 결혼, 취업, 이직, 출산 등과 같은 여러 가지 비재무적 요인들은 대출자로 하여금 의사결정시 영향을 미치는 중요한 요인들임을 알 수 있다.

핵심단어: 모기지론 (fixed-rate mortgage), 조기상환위험 (prepayment risk), 부도위험 (default risk), 2-요인 재결합 이항트리(recombining bivaritate binomial tree), 뒤틀림효과(torsion effect)

Ⅰ. 서론

1998년 '자산유동화에 관한 법률'이 시행되면서 MBS(mortgage backed securities)가 처음 발행되어 주택을 증권화하는 기초가 마련되었지만 판매성장이 그다지 활발하지 않았다. 그러다가 2004년 3월 25일에 한국주택금융공사(이하 공사)가 고정금리 모기지론(fixed-rate mortgage loan, 이하 모기지론)[3]을 최장 20년 만기(10년 및 15년 선택가능)와 고정금리로 출시한 이후 모기지론의 판매액은 5일만에 1천억 원을 돌파하고 4월 30일까지 5천억 원 이상이 판매되었다. 그 이후, 꾸준히 상승하여 그 해 12월에는 3조 원을 돌파, 2007년 2월 기준으로 대출잔액은 약 182조에 육박하고 있다[4].

이렇게 모기지론과 MBS시장의 급속한 성장에 발맞춰 이들의 가치평가에 대한 연구가 필요하게 되었다. 모기지론은 일반채권과 달리 대출자가 모기지론을 만기이전에 대출잔금을 조기상환할 수 있는 조항이 포함되어 있다. 조기상환을 결정짓는 주된 요인으로는 이자율과 주택가격의 변동을 꼽을 수 있다. 이자율이 변동하는 상황에서 대출받을 당시에 결정된 금리보다 대출기간 동안 결정되는 대출금리가 낮게 되는 경우 대출자는 자신의 대출잔금을 상환하고 유리한 조건으로 새로운 대출을 하게 된다. 또한 대출기간 동안 주택가격이 대출잔액보다 낮게 되었을 경우 대출자는 자신의 주택을 인도함으로써 대출을 상환할 수 있다. 이자율변동에 의한 조기상환과 주택가격변동으로 인한 부도[5]는 재무적 조기상환이라고 할 수 있다.

재무적 조기상환 이외에 대출자가 모기지론을 조기상환하는 이유들로는 결혼, 이사, 출산, 전근, 이혼 등과 같은 생활여건의 변화들을 생각해볼 수 있다. 이런 이유들로 인한 조기상환은 이자율변동이나 주택가격변동과는 달리 비재무적 조기상환이라고 할 수 있다. 본 논문에서는 대출자가 재무적 상환과 비재무적 상환을 통해 모기지론을 조기상환하는 의사결정과정을 살펴보고 그런 의사결정의 가치를 분석하고자 한다.

본 논문은 다음과 같이 구성되어 있다. 2절에서는 모기지론의 가치평가에 관련된 선행연구들에 대해서 살펴보고 선행연구들과 비교하여 본 논문이 가지는 특징에 대해서 언급한다. 3절에서는 부도위험과 조기상환위험을 함께 고려한 모기지론의 가치평가모형을 제시하고, 4절에서는 2-요인 이항트리상에서 가치평가하는 방법을 설

[3] 한국주택금융공사에서 판매하는 모기지론의 명칭은 처음 출시될 당시 '장기주택대출'이나 '공사 모기지론'으로 불리워지다가 2005년 2월 1일부터 '보금자리론'으로 변경되었다.
[4] 한국주택금융공사(www.khfc.co.kr)
[5] 여기서 사용된 부도의 정의는 주택가격이 대출잔액보다 낮아지는 것을 의미한다.

명한다. 5절에서는 시뮬레이션결과를 통해 모기지론에 내재된 옵션의 가치와 대출자의 의사결정에 대해 분석하고, 마지막 6절에서는 결론을 제시하고 있다.

Ⅱ. 선행연구

모기지론의 가치평가에 관한 연구는 크게 세 가지로 나누어 볼 수 있다. 첫째는 이자율위험을 포함한 조기상환위험을 연구한 것이고 둘째는 주택가격변동을 포함한 부도위험을 연구한 것이고, 셋째는 평가방법에 관한 연구이다.

이자율변동에 의해 발생하는 조기상환위험에 대한 연구는 조기상환함수를 추정하는 것이 중요한데 이에 관련된 연구들은 Richard and Roll (1989), Kang and Zenios (1992), Dunn and McConnell (1981a, 1981b), Kutner and Seifert (1989), Hilliard, Kau, Slawson (HKS, 1998) 그리고 Kalotay, Yang, and Fabozzi (2005) 등이 있다. Richard and Roll (1989)와 Kang and Zenios (1992)는 실증모형(empirical models)을 사용하여 추정하였고, Dunn and McConnell (1981a, 1981b)과 Kutner and Seifert (1989)는 option-theoretic prepayment model을 사용하였다. 또한 Dunn and McConnell (1981a, 1981b)와 Hilliard, Kau, Slawson (1998), 그리고 Kalotay, Yang, and Fabozzi (2005)는 재무적 상환과 비재무적 상환을 고려한 조기상환모형을 연구했는데, 특히 Dunn and McConnell 과 HKS는 포아송 분포를 이용하여 비재무적 상환을 모형화했다.

주택가격변동에 의해 발생하는 부도위험에 대한 연구는 축약모형(reduced model)과 구조모형(structural model)으로 나누어 볼 수 있다. 축약모형에 대한 연구로는 LaCour-Little and Huszar (2005), Deng, Pavlov, and Yang (2005), Titman, Tompaidis and Tsyplakov (2005), Titman and Torous (1989) 등이 있다. 구조모형에 대한 연구로는 Dierker, Quan and Torous (2005), Downing, Stanton, and Wallace (2005), Dunn and Spatt (2005), 그리고 Longstaff (2005) 등이 있다.

이자율변동과 주택가격변동을 함께 고려한 조기상환모형에 대한 연구는 Leung and Sirmans (1990), Kau, Keenan, Muller, and Epperson (KKME, 1992, 1995), Schwartz and Torous (1992), DeFranco (1994), Hilliard, Kau, Slawson (HKS, 1998), Kau and Slawson (2002), 그리고 Downing, Stanton, and Wallace (DSW, 2005) 등이 있다. KKME, Schwartz and Torous, DeFranco, Kau and Slawson, 그리고 DSW는 유한차분법(finite difference method, FDM)을 사용하였다. Leung and Sirmans는 삼항트리모형(trinomial tree model)을 사용하였고, HKS는 2-요인 이항트리모형을 사용하였다.

국내 연구는 공사 모기지론이 출시되기 이전에 MBS의 가치평가에 대한 연구가 주를 이룬 반면, 모기지론에 대한 연구는 활발히 이루어지지 않았다. 유승동(2004)는 금리, 주택가격, 그리고 거시경제지표를 이용한 3-요인 벡터자기회귀(VAR)모형으로 MBS 2000-1에 대한 조기상환의 동태적 변화를 분석하였다. 이한재・김규영・노병인(2004)는 모기지론이 옵션성격을 내재한 채권인 점에 착안하여 듀레이션모형을 통해 조기상환함수를 추정하였다.

본 논문은 이자율변동위험과 주택가격변동위험을 각각 모형화하고 이를 결합하여 2-요인 재결합이항트리모형을 생성한다. 생성된 2-요인 재결합이항트리를 이용하여 모기지론의 가치를 매 상환시점에서 평가하고 Dunn and McConnell과 KKME의 방법에 따라 비재무적 상환을 고려한다. 2-요인 재결합이항트리상에서 대출자의 의사결정모형으로 모기지론의 가치를 평가하고 대출자의 의사결정과정을 분석한다.

Ⅲ. 모기지론의 가치평가모형

모기지론은 주택을 담보로 이루어지는 대출이므로 기본적으로 주택가격에 의해 영향을 받는다. 주택시장에서 주택가격은 주택의 본질적인 가치와 이자율에 의해 영향을 받는다. 또한 이자율은 모기지론의 대출금리에 영향을 주는데 고정금리 모기지론의 경우 시장이자율과 동일하게 모기지론의 이자율이 결정된다. 이는 시장이자율이 대출시점에 대출금리로 결정될 뿐만 아니라 대출기간 동안 새로운 대출의 대출금리로 결정됨을 의미한다.

1. 이자율과 주택가격의 확률확산모형

주택가격이 다음과 같은 확률미분방정식(stochastic differential equation: SDE)를 따른다고 가정한다.

$$\frac{dH}{H} = \left(r - s\right) dt + \sigma_H dZ_H . \qquad (1)$$

H는 주택가격, r은 무위험 이자율, s는 임대수익률, 그리고 σ_H는 주택가격변동성, 그리고 dZ_H는 표준브라우니언운동(standard Brownian motion)을 나타낸다. 이자율은 다음과 같은 SDE[6]를 따른다고 가정하면,

[6] Cox, J.C., J.E. Ingersoll, and S.A. Ross, 1985, A Theory of the Term Structure of Interest. Rates.

$$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma_r \sqrt{r} dZ_r. \tag{2}$$

r 은 단기이자율, κ 는 평균회귀속도, θ 는 장기평균이자율, 그리고 σ_r 는 이자율 변동성, 그리고 dZ_r 은 표준브라우니언운동을 나타낸다. 이때 비재무적 상환이 존재하지 않는다면 주택가격(H)와 이자율(r) 그리고 시간의 함수인 모기지론(V)의 가치평가를 위한 편미분방정식(PDE)은 다음과 같다[7].

$$\begin{aligned}&(r-s)H\frac{\partial V}{\partial H} + \kappa(\theta - r)\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{2}H^2\sigma_H^2\frac{\partial^2 V}{\partial H^2} + \frac{1}{2}r\sigma_r^2\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \\ &\quad + \rho H\sqrt{r}\sigma_H\sigma_r\frac{\partial^2 V}{\partial H \partial r} + \frac{\partial V}{\partial t} - rV = 0.\end{aligned} \tag{3}$$

한편, Dunn and McConnell(1981a)과 KKME는 비재무적 상환의 발생을 불연속적인 점프로 보아 다음과 같은 포아송 과정으로 설정하였다.

$$\begin{aligned}&dy = \begin{cases} 0 \text{ , 비재무적 상환이 발생하지 않는 경우} \\ 1 \text{ , 비재무적 상환이 발생하는 경우} \end{cases}, \\ &\text{단,} \\ &E(dy) = \lambda(r,T)dt.\end{aligned} \tag{4}$$

$\lambda(r,T)$ 는 이자율 r 과 만기 T 에 대해 비재무적 상환이 발생할 단위시간당 확률이다. 식(1), (2), 그리고 (4)를 이용하여 비재무적 상환이 존재한다면 모기지론의 가치평가를 위한 SDE는

[7] 식 (1)과 (2)를 이용하여 Ito정리를 적용하면
$$dV = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial H}H(r-s) + \frac{\partial V}{\partial r}\kappa(\theta - r) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial H^2}H^2\sigma_H^2 + \\ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}r\sigma_r^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial H \partial r}H\sigma_H\sigma_r\sqrt{r}\rho + \frac{\partial V}{\partial t} \end{bmatrix} dt + \frac{\partial V}{\partial H}H\sigma_H dz_H + \frac{\partial V}{\partial r}\sigma_r\sqrt{r}dz_r, \text{ 단 } dz_H dz_r = \rho dt.$$

$$dV = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial H} H(r-s) + \frac{\partial V}{\partial r}\kappa(\theta - r) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial H^2} H^2 \sigma_H^2 \\ + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} r\sigma_r^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial H \partial r} H\sigma_H \sigma_r \sqrt{r}\rho + \frac{\partial V}{\partial t} - \lambda\big(\min(H,F) - V\big) \end{bmatrix} dt + \frac{\partial V}{\partial H} H\sigma_H dz_H + \frac{\partial V}{\partial r}\sigma_r \sqrt{r} dz_r + \big(\min(H,F) - V\big) dy, \tag{5}$$

이고 이에 대한 PDE는 다음과 같다.

$$(r-s)H\frac{\partial V}{\partial H} + \kappa(\theta - r)\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{2}H^2\sigma_H^2 \frac{\partial^2 V}{\partial H^2} + \frac{1}{2} r\sigma_r^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \rho H\sqrt{r}\sigma_H \sigma_r \frac{\partial^2 V}{\partial H \partial r} + \frac{\partial V}{\partial t} - \lambda\big(\min(H,F) - V\big) - rV = 0. \tag{6}$$

2. 이자율모형과 주택가격모형을 결합한 2-요인 재결합 이항트리모형 (recombining bivariate binomial tree)

모기지론의 가치평가를 위해서 PDE의 닫힌 해(closed-form solution)를 구할 수도 있지만 닫힌 해를 유도하는 것이 항상 가능한 것은 아니다. 따라서 본 논문에서는 보다 직관적이고 간편한 계산을 위해 재결합 이항트리(recombining binomial tree)를 확장한 2-요인 재결합 이항트리(recombining bivariate binomial tree)를 이용하여 PDE의 해를 수치적으로 근사하고자 한다. 2-요인 재결합 이항트리는 다음과 같은 절차를 통해 구축할 수 있다.

1) H와 r을 X와 R로 변환: 단위변동성 (unit volatility)를 가진 확률과정

2-요인 재결합 이항트리를 유도하기 위한 첫번째 단계는 식(1)과 (2)에 나타난 주택가격과 이자율의 확률과정을 단위변동성을 가진 과정으로 변환하는 것이다.

$$dX = \frac{r - s - \sigma_H^2/2}{\sigma_H} dt + dZ_H, \quad X = \frac{\ln H}{\sigma_H}, \tag{7}$$

$$dR = \mu_R dt + dZ_r,\ R = \frac{2\sqrt{r}}{\sigma_r},$$
$$\mu_R = \left[\frac{\kappa(\theta - r)}{\sigma_r\sqrt{r}}\right]. \tag{8}$$

2) X가 R에 직교하도록 변환: Wei (1993)

이 단계에서는 X가 R에 대해 직교하도록 변환한다. R에 대해 직교하는 Y는 다음과 같다[8].

$$Y = \frac{X - \rho R}{\sqrt{1-\rho^2}},\ \text{단 } \rho \text{는 } H\text{와 } r\text{의 상관계수} \tag{9}$$

이 식에 Ito정리를 적용하면 다음과 같이 정리할 수 있다.[9]

$$dY(t) = \mu_Y dt + dZ_Y,$$
$$\mu_Y = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left[\frac{\sigma_r^2 R^2/4 - s - \sigma_H^2/2}{\sigma_H} - \rho\frac{\kappa(\theta - \sigma_r^2 R^2/4)}{\sigma_r^2 R/2}\right], \tag{10}$$
$$dZ_Y = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left[dZ_H - \rho dZ_r\right].$$

식(10)에서 보듯이 Y는 R에 대해 수직이면서 단위변동성을 가진 확률과정임을 알 수 있다. 식(8)와 (10)에서 구해진 SDE를 이용하여 R과 Y의 확산과정을 생성하는 절차는 다음과 같다.

$$R^{up} \equiv R + \sqrt{h},\ \text{for } h = \frac{T}{m},$$
$$R^{down} \equiv R - \sqrt{h}. \tag{11}$$

$$Y^{up} \equiv Y + \sqrt{h},$$
$$Y^{down} \equiv Y - \sqrt{h}. \tag{12}$$

---

[8] Wei, J.Z., 1993, Valuing American Equity Options with a Stochastic Interest Rate: A Note, *Journal of Financial Engineering*, Vol.2, No.2, 195-206.

[9] 자세한 유도과정은 부록을 참고하기 바란다.

m 은 전체 대출기간을 나누는 횟수이고 h 는 한 기간에 해당하는 시간을 나타낸다. 식(11)과 (12)을 이용해서 R 과 Y 의 재결합 이항트리를 각각 생성할 수 있다.

3) R 과 Y 에서 r 과 H 로 역변환

식(11)과 (12)에 의해 생성된 각 이항트리의 마디값들을 식(14)를 이용하여 결합하면 주택가격의 움직임을 위한 2-요인 재결합 이항트리를 생성할 수 있다.

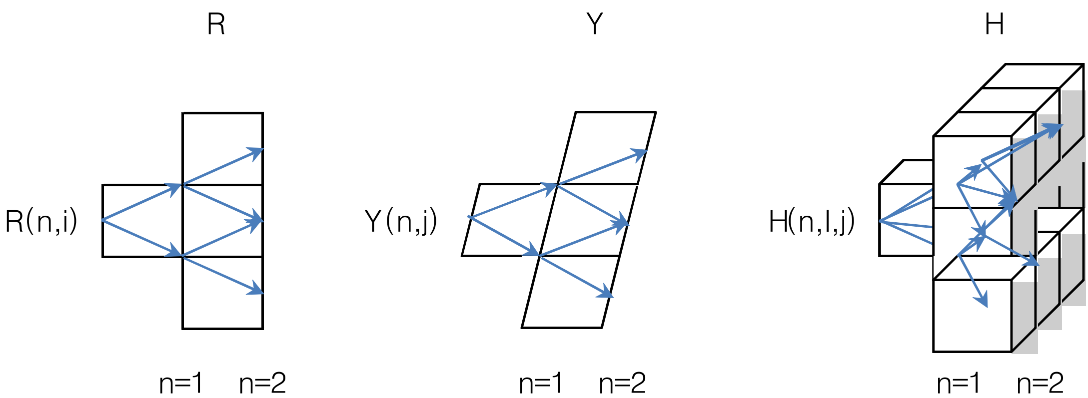
$$r = \frac{R^2 \sigma_r^2}{4}. \tag{13}$$

$$H = \exp\left(\sigma_H Y \sqrt{1-\rho^2} + \rho \sigma_H R\right). \tag{14}$$

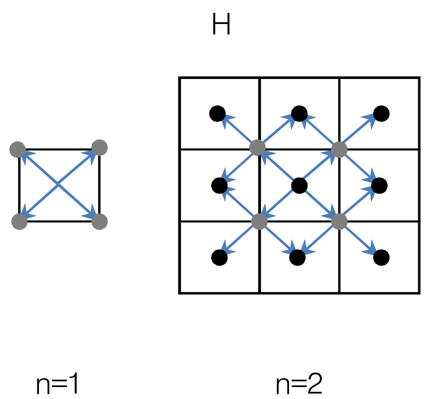
Figure 1의 Panel A는 생성된 R 과 Y , 그리고 H 의 이항트리를 기하학적으로 표현한 것이다. Panel B는 H 의 오른쪽 측면에서 투사한 것인데 n=1일 때 H 는 4개의 마디를 가지게 되고 n=2일 때 검은 점으로 표시된 9개의 마디를 가지게 된다.

Figure 1. Recombining bivariate binomial tree

Panel A



Panel B



3. 비음(non-negative)의 확률과 다중점프(multiple jumps)

Nelson•Ramaswamy (1990)는 이항트리모형을 이용하여 SDE를 근사하기 위해서는 $n \to \infty$ 일 때, 확률과 점프크기는 다음 조건을 만족하도록 정의되어야 한다고 했다[10].

$$\begin{aligned} &0 \le p \le 1, \\ &-\infty < R - \sqrt{h} \le R + \sqrt{h} < \infty. \end{aligned} \tag{15}$$

만약 위의 조건들이 충족되지 않는다면 R 에 대해 다중점프(multiple jumps)를 허용할 수 있다. 이를 Y 에도 적용하면 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned} p &= \frac{R + \mu_R h - \left[R - Jump_R^{down} \cdot \sqrt{h} \right]}{Jump_R^{up} \cdot \sqrt{h} + Jump_R^{down} \cdot \sqrt{h}} \\ &= \frac{\mu_R h + Jump_R^{down} \cdot \sqrt{h}}{Jump_R^{up} \cdot \sqrt{h} + Jump_R^{down} \cdot \sqrt{h}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Jump_R^{up} &\equiv \left[\begin{array}{l} \left[R + k\sqrt{h} \right] \sigma_r - r \ge \theta h \Rightarrow k\sqrt{h} \ge \mu_R h \\ \text{을 만족하는 가장 작은 양의 홀수 } k \end{array} \right], \\ Jump_R^{down} &\equiv \left[\begin{array}{l} \left[R - k\sqrt{h} \right] \sigma_r - r \le \theta h \Rightarrow -k\sqrt{h} \le \mu_R h \\ \text{을 만족하는 가장 작은 양의 홀수 } k \end{array} \right]. \end{aligned} \tag{16}$$

$$q = \frac{\mu_Y h + Jump_Y^{down} \cdot \sqrt{h}}{Jump_Y^{up} \cdot \sqrt{h} + Jump_Y^{down} \cdot \sqrt{h}},$$

$$\begin{aligned} Jump_Y^{up} &\equiv \left[\begin{array}{l} \left[Y + k\sqrt{h} \right] - Y = k\sqrt{h} \ge \mu_Y h \\ \text{을 만족하는 가장 작은 양의 홀수 } k \end{array} \right], \\ Jump_Y^{down} &\equiv \left[\begin{array}{l} \left[Y - k\sqrt{h} \right] - Y = -k\sqrt{h} \le \mu_Y h \\ \text{을 만족하는 가장 작은 양의 홀수 } k \end{array} \right]. \end{aligned} \tag{17}$$

[10] Nelson and Ramaswamy, 1990, Simple Binomial Processes as Diffusion Approximations in Financial Models.

Ⅳ. 모기지론과 내재된 옵션(embedded option)의 가치평가

일반적으로 모기지론에는 여러 가지 옵션들이 포함되어 있다. 고정금리 모기지론의 경우 만기이전에 조기상환할 수 있는 옵션과 주택가격이 대출잔액보다 낮아졌을 때 주택으로 상환할 수 있는 부도옵션이 그 대표적인 것들이다. 대출자는 옵션행사 시점에서 자신에게 이 옵션들을 행사할 수 있고 이를 통해 모기지론의 가치를 극소화하고자 할 것이다. 이런 의사결정의 가치는 내재된 옵션들의 단순 합과 다를 수 있는데 이를 여러 옵션들이 결합된 결합옵션(joint option)으로 보아야 한다. 따라서 모지지론의 가치는 옵션이 내재되어 있지 않은 일반채권(option-free bond)에 비해 가치가 낮을 것이고 모기지론과 내재된 옵션, 그리고 일반채권은 다음의 관계를 가지게 된다.

$$OB = V + J. \tag{18}$$

OB 는 일반채권을 나타내고, V 와 J 는 모기지론과 내재된 결합옵션의 가치를 의미한다. 식(18)에서 모기지론의 가치는 일반채권과 결합옵션의 차이가 되고, 결합옵션의 가치는 일반채권과 모기지론의 차이로 구할 수 있다. 다음에서 일반채권과 모기지론의 가치, 결합옵션, 그리고 각 개별 옵션의 가치평가를 위해 위의 관계를 2-요인 재결합 이항트리에서 적용하고자 한다.

1. 만기시점($n = m$)에서의 상환조건

2-요인 재결합 이항트리에서 모기지론과 내재된 옵션들의 가치를 평가하기 위해서 우선 만기시점에서의 상환조건을 고려해야 한다. 또한 비재무적 상환이 모기지론의 가치나 옵션의 가치에 영향을 주는지를 살펴보기 위해 비재무적 상환이 없는 경우와 비재무적 상환이 있는 경우로 나누어서 살펴보아야 한다.

우선 재무적 상환만 존재하는 경우를 살펴보면 만기시점에서 대출자는 대출금액을 상환하는 것과 주택으로 양도하는 것 그리고 새로운 대출로 대출금액을 상환하는 것을 선택하게 된다. 즉, 대출금액과 주택가격 그리고 채권가격 중에서 가장 작은 것을 선택한다.

$$
\begin{aligned}
OB(\tau_n) &= M, \\
CB(\tau_n) &= \min\left[M, F(\tau_n)\right], \\
DB(\tau_n) &= \min\left[M, H(\tau_n)\right], \\
V(\tau_n) &= \min\left[M, H(\tau_n), F(\tau_n)\right].
\end{aligned} \tag{19}
$$

τ_n 은 년으로 표시된 n번째 달의 상환시점(즉, $\tau_n = n/12$)을 나타내고 M [11]은 대출시점마다 고정적으로 상환되는 금액, $F(\tau_n)$ 은 n시점에서 대출잔액의 시장가치, 그리고 $H(\tau_n)$은 n시점의 주택가격을 나타낸다. 또한 $OB(\tau_n)$ 은 n시점에서 일반채권의 가치, $CB(\tau_n)$은 조기상환조항이 포함된 채권(callable bond)의 가치, $DB(\tau_n)$은 부도위험이 포함된 채권(defaultable bond)의 가치, 그리고 $V(\tau_n)$은 모기지론의 가치를 나타낸다.

$$
\begin{aligned}
P(\tau_n) &= OB(\tau_n) - CB(\tau_n), \\
D(\tau_n) &= OB(\tau_n) - DB(\tau_n), \\
J(\tau_n) &= OB(\tau_n) - V(\tau_n).
\end{aligned} \tag{20}
$$

$P(\tau_n)$은 조기상환옵션의 가치, $D(\tau_n)$은 부도옵션의 가치, 그리고 $J(\tau_n)$은 모기지론에 내재된 결합옵션의 가치를 나타낸다. 즉, 옵션부 채권에 내재된 옵션의 가치는 일반채의 가치와 옵션부 채권의 가치의 차이가 됨을 의미한다.

비재무적 상환이 만기시점에서는 발생하지 않는다고 가정하면 비재무적 상환을 포함하는 모기지론의 가치는 비재무적 상환을 포함하지 않는 모기지론의 가치와 같다.

$$
V^{-}(\tau_n) = V(\tau_n). \tag{21}
$$

이때 $V^{-}(\tau_n)$ 은 재무적 상환과 비재무적 상환이 고려한 후의 모기지론의 가치를 나타낸다.

2. 만기이전 시점($0 < n < m$)에서 상환조건: 후방축차법(Backward recursive method)

---

[11] $M = \dfrac{(r_m/12)(1+r_m/12)^T}{(1+r_m/12)^T - 1}$, 단 r_m 은 모기지 이자율.

만기이전 시점에서는 대출자는 그 시점에서의 모기지론의 가치와 대출잔액의 시장가치 그리고 주택가격을 근거로 자신의 포지션을 결정하게 된다. 이항트리모형에서 일반채권과 옵션부 채권, 그리고 모기지론의 가치가 식(22)에 의해 후방축차법으로 결정되어짐과 동시에 대출자는 식(23)에 의해 조기상환의 여부와 부도 여부를 선택하게 된다.

$$\begin{aligned}
OB\left(\tau_n^+,i\right) &= \left[OB\left(\tau_{n+1},i\right)p\left(n,i\right)+OB\left(\tau_{n+1},i\right)\left(1-p\left(n,i\right)\right)\right]e^{-r(n,i)h}, \\
CB\left(\tau_n^+,i\right) &= \left[CB\left(\tau_{n+1},i\right)p\left(n,i\right)+CB\left(\tau_{n+1},i\right)\left(1-p\left(n,i\right)\right)\right]e^{-r(n,i)h}, \\
DB\left(\tau_n^+,i,j\right) &= \begin{bmatrix} DB\left(\tau_{n+1},i+1,j+1\right)p\left(n,i\right)q\left(n,j\right)+ \\ DB\left(\tau_{n+1},i+1,j\right)p\left(n,i\right)\left(1-q\left(n,j\right)\right)+ \\ DB\left(\tau_{n+1},i,j+1\right)\left(1-p\left(n,i\right)\right)q\left(n,j\right)+ \\ DB\left(\tau_{n+1},i,j\right)\left(1-p\left(n,i\right)\right)\left(1-q\left(n,j\right)\right) \end{bmatrix} e^{-r(n,i)h}, \\
V\left(\tau_n^+,i,j\right) &= \begin{bmatrix} V\left(\tau_{n+1},i+1,j+1\right)p\left(n,i\right)q\left(n,j\right)+ \\ V\left(\tau_{n+1},i+1,j\right)p\left(n,i\right)\left(1-q\left(n,j\right)\right)+ \\ V\left(\tau_{n+1},i,j+1\right)\left(1-p\left(n,i\right)\right)q\left(n,j\right)+ \\ V\left(\tau_{n+1},i,j\right)\left(1-p\left(n,i\right)\right)\left(1-q\left(n,j\right)\right) \end{bmatrix} e^{-r(n,i)h}.
\end{aligned} \tag{22}$$

n번째 달의 상환시점에서 τ_n^+는 재무적 상환이 발생하기 직전의 시점을 나타낸다. $OB\left(\tau_n^+,i\right)$, $CB\left(\tau_n^+,i\right)$, $DB\left(\tau_n^+,i,j\right)$, $V\left(\tau_n^+,i,j\right)$는 재무적 상환을 결정하기 전에 후방축차적으로 결정된 값들이다. n번째 달의 상환시점에서 재무적 상환은 다음과 같이 발생한다.

$$\begin{aligned}
OB\left(\tau_n,i\right) &= OB\left(\tau_n,i\right)+M, \\
CB\left(\tau_n,i\right) &= \min\left[CB\left(\tau_n,i\right)+M,F\left(\tau_n,i\right)\right], \\
DB\left(\tau_n,i,j\right) &= \min\left[DB\left(\tau_n,i,j\right),H\left(\tau_n,i,j\right)\right], \\
V\left(\tau_n,i,j\right) &= \min\left[\min\left[V\left(\tau_n,i,j\right)+M,H\left(\tau_n,i,j\right)\right],F\left(\tau_n,i\right)\right].
\end{aligned} \tag{23}$$

위 식에서 $\min\left[V\left(\tau_n^+,i,j\right)+M,H\left(\tau_n^+,i,j\right)\right]$ 은 모기지론의 부도를 결정하는 조건이다. 즉, $H\left(\tau_n^+,i,j\right)$ 가 $V\left(\tau_n^+,i,j\right)+M$ 보다 크면 부도가 발생하고, 대출자는 자신의 주택으로 대출을 대신하게 되어 대출자의 포지션은 H가 된다. $V\left(\tau_n^+,i,j\right)+M$ 이 $H\left(\tau_n^+,i,j\right)$ 보다 크면 대출자의 포지션은 $V\left(\tau_n^+,i,j\right)+M$ 이 된다. 대출자는 자신의 주택가격이 모기지론의 가치보다 낮아지게 되면 대출자의 입장에서는 가치가 높은 모기지론을 보유하는 것보다 가치가 낮은 주택을 양도함으로써 자신의 대출포지션을 극소화하려는 것이다.

$\min\left[\min\left[V\left(\tau_n^+,i,j\right)+M,H\left(\tau_n^+,i,j\right)\right],F\left(\tau_n^+,i\right)\right]$ 는 모기지론의 조기상환을 결정하는 조건이다. $\min\left[V\left(\tau_n^+,i,j\right)+M,H\left(\tau_n^+,i,j\right)\right]$ 가 $F\left(\tau_n^+,i\right)$ 보다 작으면 조기상환이 발생하여 대출자의 포지션은 $F\left(\tau_n^+,i\right)$ 가 된다. 그렇지 않을 경우에는 조기상환이 발생하지 않아 $\min\left[V\left(\tau_n^+,i,j\right)+M,H\left(\tau_n^+,i,j\right)\right]$ 가 최종적인 장기주택대출의 가치가 된다. 이것은 대출자가 자신의 모기지 이자율과 현재 시장에서 정해지고 있는 모기지 이자율의 차이에 의해 결정함을 의미한다. 즉, 대출자의 모기지 이자율이 현재 모기지 이자율보다 높으면 대출자는 자신의 모기지론을 상환하고 낮은(유리한) 모기지 이자율로 새로운 모기지론을 대출받게 된다.

KKME(1992)는 비재무적 상환을 다음과 같이 정의하였다.

$$\begin{aligned} V\left(\tau_n^-,i,j\right) &= V\left(\tau_n,i,j\right)+\lambda(n)\left(\min\left[H\left(\tau_n,i,j\right),F\left(\tau_i,i\right)\right]-V\left(\tau_n,i,j\right)\right) \\ &= V\left(\tau_n,i,j\right)\left(1-\lambda(n)\right)+\lambda(n)\min\left[H\left(\tau_n,i,j\right),F\left(\tau_i,i\right)\right]. \end{aligned} \tag{24}$$

n번째 달의 상환시점에서 비재무적 상환은 부도가 발생하면 $\lambda(n)\left(F\left(\tau_n^-,i\right)-V\left(\tau_n,i,j\right)\right)$ 가 되고, 그렇지 않으면 $\lambda(n)\left(H\left(\tau_n,i,j\right)-V\left(\tau_n,i,j\right)\right)$ 가 된다. 이것은 부도가 발생하지 않을 경우에는 비재무적 상환이 잔존하는 대출금액에 대해서 발생하게 되고, 부도가 발생하는 경우에는 주택가격에 대해서 발생하게 됨을 나타

낸다.

3. 대출시점($n=0$)에서의 가치평가

대출시점에서는 비재무적 상환을 포함하는 모기지론의 가치와 비재무적 상환을 포함하는 모기지론의 가치 모두 후방축차법으로 결정된 가치들이다.

$$\begin{aligned} OB\left(\tau_0^-,0\right) &= OB\left(\tau_0,0\right) = OB\left(\tau_0^+,0\right), \\ CB\left(\tau_0^-,0\right) &= CB\left(\tau_0,0\right) = CB\left(\tau_0^+,0\right), \\ DB\left(\tau_0^-,0,0\right) &= DB\left(\tau_0,0,0\right) = DB\left(\tau_0^+,0,0\right), \\ V\left(\tau_0^-,0,0\right) &= V\left(\tau_0,0,0\right) = V\left(\tau_0^+,0,0\right). \end{aligned} \tag{25}$$

Ⅴ. 시뮬레이션과 분석

본절에서는 앞에서 정의된 변수들이 모기지론의 가치에 어떤 영향을 주는지 시뮬레이션을 통해 분석하고자 한다. 분석을 위한 측정도구로 뒤틀림(torsion)이란 개념을 사용한다. 이것은 모기지론에 내재된 결합옵션의 가치가 두 옵션의 합과 다를 수 있음을 나타낸다. 뒤틀림의 정도를 측정하기 위한 지표로 뒤틀림비율(torsion ratio)와 뒤틀림효과(torsion effect)를 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} \text{뒤틀림효과}\left(\text{torsion effect}\right) &= 1 - \text{뒤틀림비율}\left(\text{torsion ratio}\right), \\ \text{torsion ratio} &\equiv \frac{J}{C+P}. \end{aligned} \tag{26}$$

식(26)에서 조기상환옵션과 부도옵션의 가치가 0보다 크다면 ($0<P$ and $0<D$) 결합옵션은 두 옵션 중 가치가 큰 옵션 하나만 선택하기 때문에 뒤틀림비율은 0보다 크고 1보다 작다($0<\text{torsion ratio}<1$). 조기상환옵션이나 부도옵션의 가치가 0인 경우($0=P$ or $0=D$)에는 뒤틀림비율이 1이 됨을 알 수 있다.

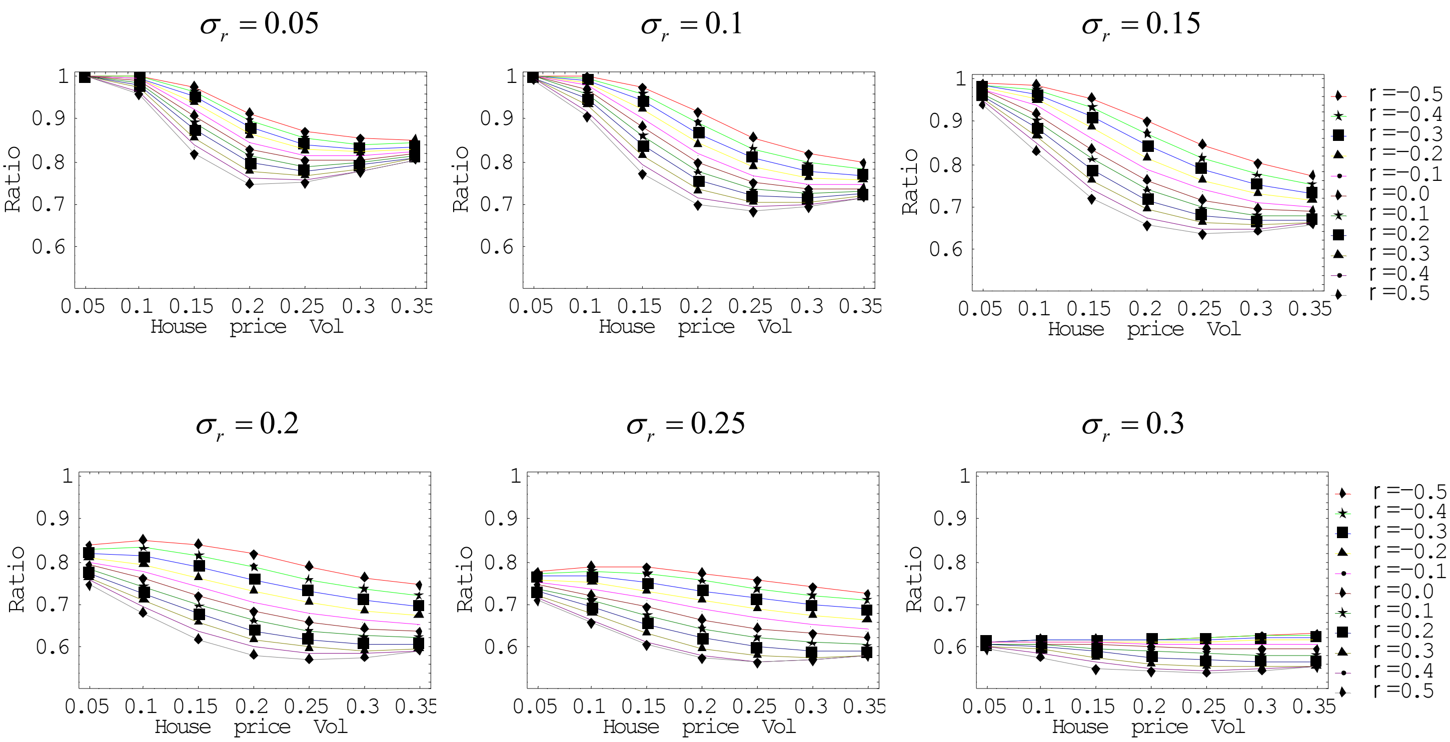
다음에서는 모기지론의 가치에 영향을 주는 변수들 중 채권가치와 주택가치에 영향을 주는 변수들에 대해 비틀림비율이 어떻게 변하는지 살펴보고 이를 통해 대출자의 의사결정을 분석한다.

1. 재무적 상환만 존재하는 경우 뒤틀림비율의 변화

우선 재무적 상환만 존재하는 경우 주택가격변동성과 이자율변동성 그리고 둘의 상관관계의 변화에 대한 뒤틀림비율의 변화를 살펴보도록 한다. Figure 2는 주택가격변동성에 대한 뒤틀림비율의 변화를 나타낸 것이다. 주택가격변동성과 이자율변동성이 모두 낮으면 뒤틀림비율은 1에 가깝게 된다. 이때에는 옵션가치가 0에 가깝기 때문에 뒤틀림효과가 거의 발생하지 않음을 알 수 있다. 반면 이자율변동성과 주택가격변동성 중 하나가 높고 둘의 상관관계가 양일 때는 뒤틀림효과가 높게 나타난다. 상관관계가 음(-)인 경우 주택가격변동성이 증가할수록 뒤틀림비율은 감소하지만 상관관계가 양(+)인 경우 주택가격변동성이 0.25지점을 기준으로 뒤틀림비율은 감소하다가 다시 증가하는 스마일(smile)현상이 나타난다. 이는 Figure 3에서 보여지는 것과 같이 이자율변동성이 0.05이나 0.1로 주어지고 주택가격변동성이 증가하는 경우, 조기상환옵션의 가치는 하나의 값으로 고정되지만 부도옵션과 결합옵션의 가치는 증가하기 때문이다. 특히, 결합옵션의 가치는 식(23)에 의해 조기상환옵션과 부도옵션의 상호작용(interaction)이 발생하여 부도옵션보다 늦게 증가하기 시작하여 주택가격변동성이 0.25지점을 기준으로 더 빨리 증가하기 때문이다.

Figure 2. Torsion ratio as the house price volatility

T = 360 months, m = 720, $r_0 = 0.1$, $\kappa = 0.25$, $\theta = 0.0$, $\mu = 0.1$, $s = 0.0$, $H_0 = 100$, LTV = 0.8, $r_m = 0.1$, $\lambda = 0$.



$\sigma_r = 0.35$

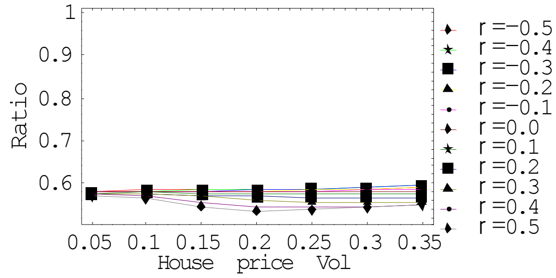
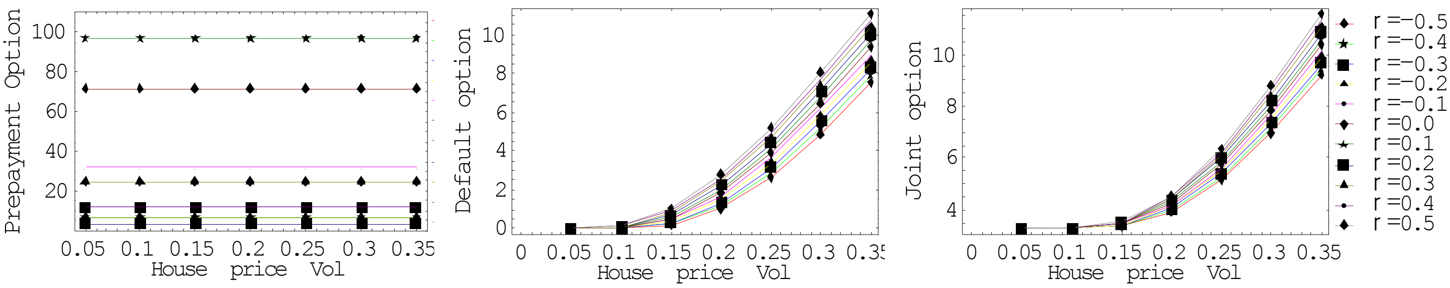


Figure 3. Option profiles as the house price volatility

T = 360 months, m = 720, r_0 = 0.1, κ = 0.25, θ=0.0, μ = 0.1, s = 0.0, H_0 = 100, LTV = 0.8, r_m = 0.1, λ = 0.

$\sigma_r = 0.05$



$\sigma_r = 0.1$

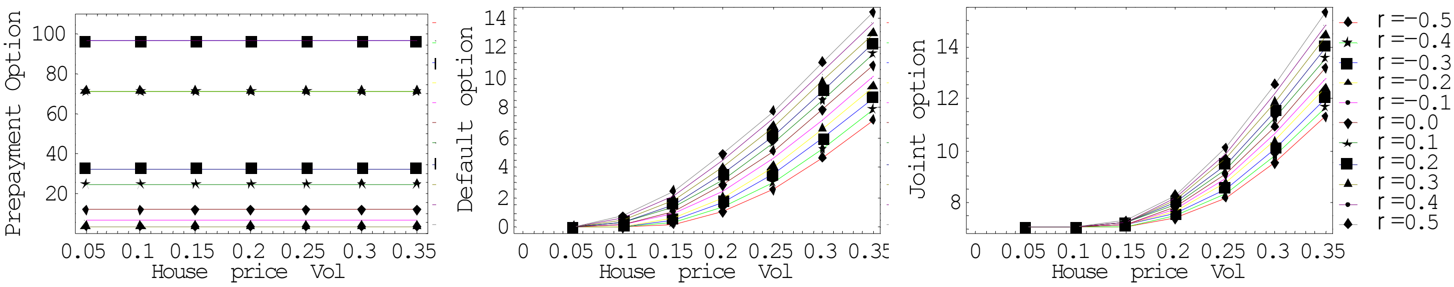


Figure 4에 나타난 이자율변동성에 대한 뒤틀림비율의 변화를 보면 주택가격변동성과 상관계수가 주어졌을 때 이자율변동성이 증가할수록 뒤틀림비율은 감소함을 알 수 있다. 이것은 Figure 5에서 보듯이 이자율변동성이 증가하면 조기상환옵션과 부도옵션 그리고 결합옵션의 가치가 모두 유사하게 증가함을 볼 수 있고 이로 인해 뒤틀림비율은 이자율변동성이 증가할수록 감소하게 된다. 또한 Figure 2와 달리 이자율변동성의 증가에 따른 스마일현상은 보이지 않는다.

Figure 4. Torsion ratio as the interest rate volatility

T = 360 months, m = 720, $r_0 = 0.1$, $\kappa = 0.25$, $\theta = 0.0$, $\mu = 0.1$, $s = 0.0$, $H_0 = 100$, LTV = 0.8, $r_m = 0.1$, $\lambda = 0$.

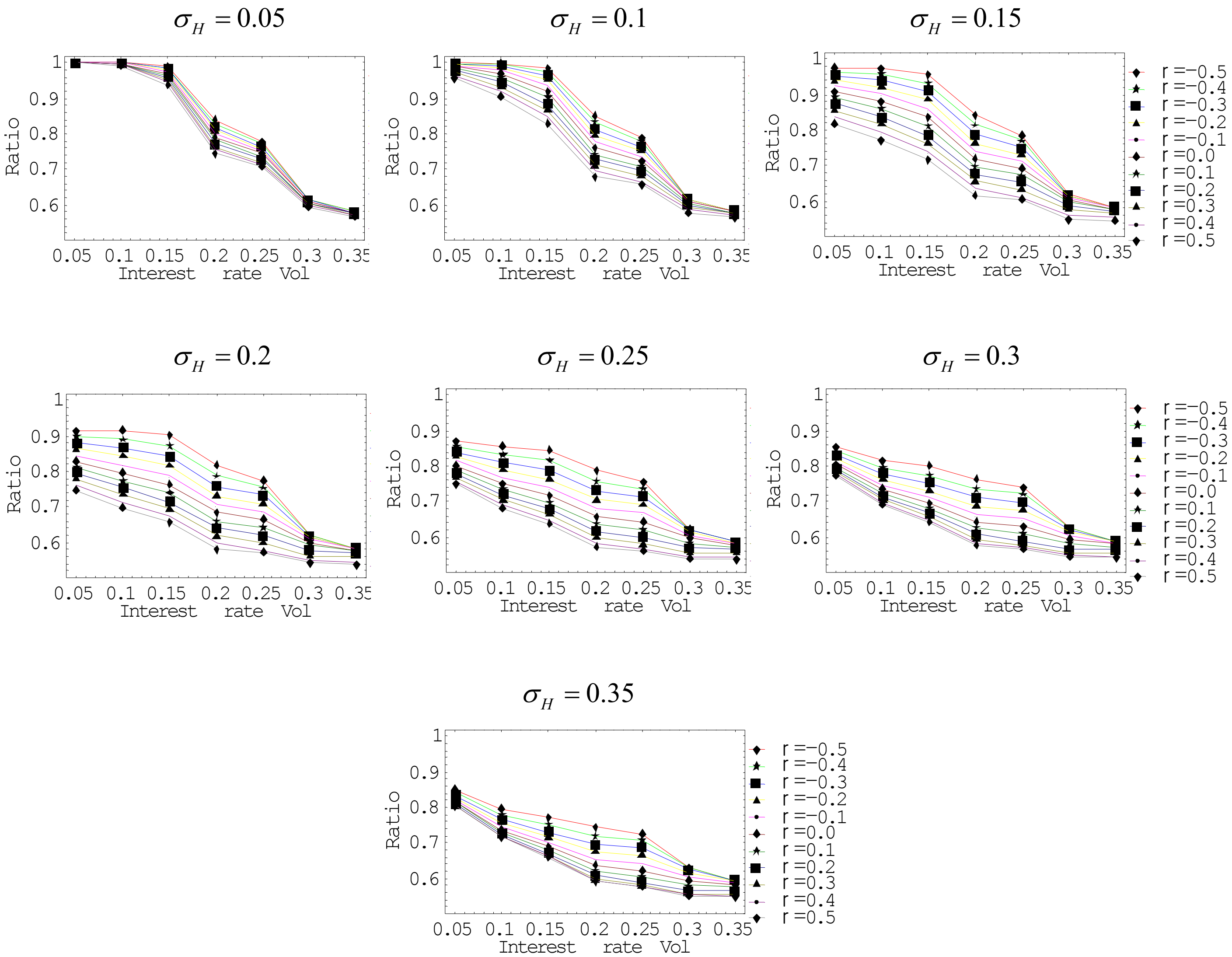
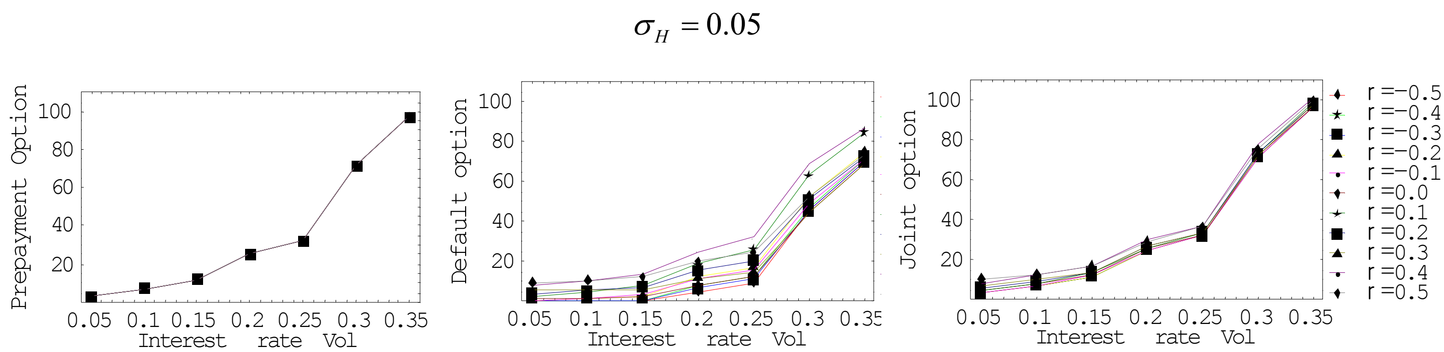


Figure 5. Option profiles as the interest rate volatility

T = 360 months, m = 720, $r_0 = 0.1$, $\kappa = 0.25$, $\theta = 0.0$, $\mu = 0.1$, $s = 0.0$, $H_0 = 100$, LTV = 0.8, $r_m = 0.1$, $\lambda = 0$.



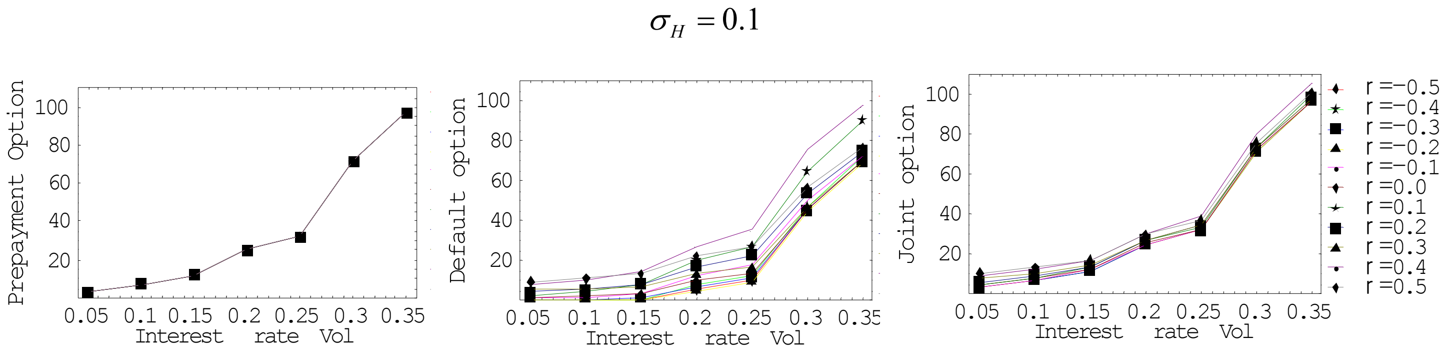
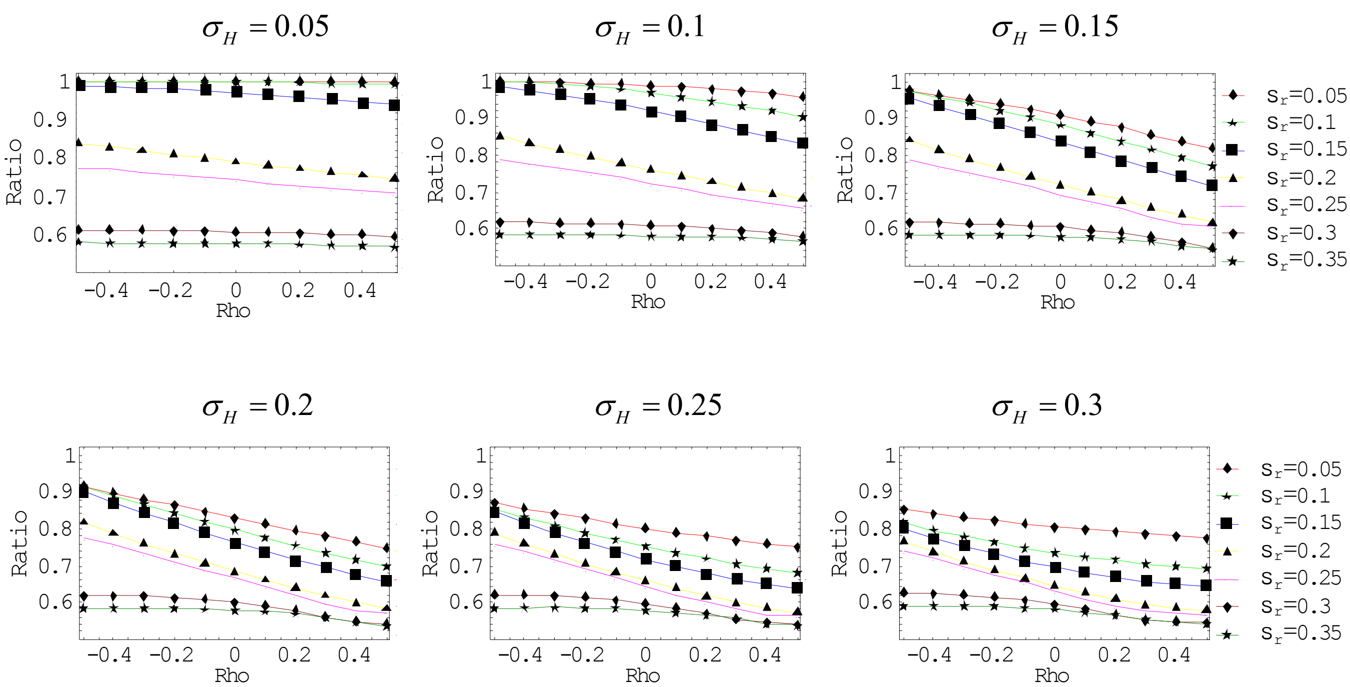


Figure 6에서 상관계수에 대한 뒤틀림비율의 변화를 보면 주택가격변동성과 이자율변동성이 주어졌을 때 뒤틀림비율은 상관관계가 증가할수록 감소한다. 이는 Figure 7에서 볼 수 있듯이 주택가격변동성과 이자율변동성이 주어지면 조기상환옵션의 가치와 결합옵션의 가치는 상관계수에 관계없이 하나의 값으로 고정되지만 부도옵션의 가치는 증가하기 때문이다.

Figure 6. Torsion ratio as the rho

T = 360 months, m = 720, $r_0 = 0.1$, $\kappa = 0.25$, $\theta = 0.0$, $\mu = 0.1$, $s = 0.0$, $H_0 = 100$, LTV = 0.8, $r_m = 0.1$, $\lambda = 0$.



$\sigma_H = 0.35$

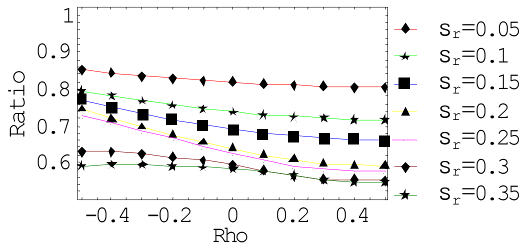
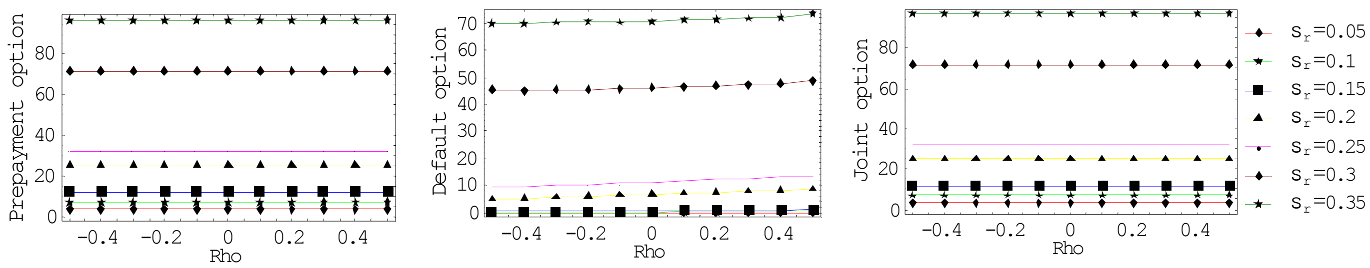


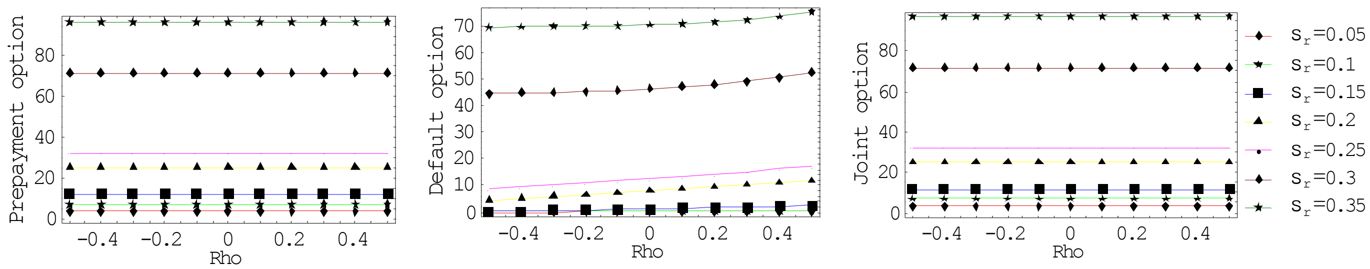
Figure 7. Option profiles as the rho

T = 360 months, m = 720, r_0 = 0.1, κ = 0.25, θ=0.0, μ = 0.1, s = 0.0, H_0 = 100, LTV = 0.8, r_m = 0.1, λ = 0.

$\sigma_H = 0.05$



$\sigma_H = 0.1$



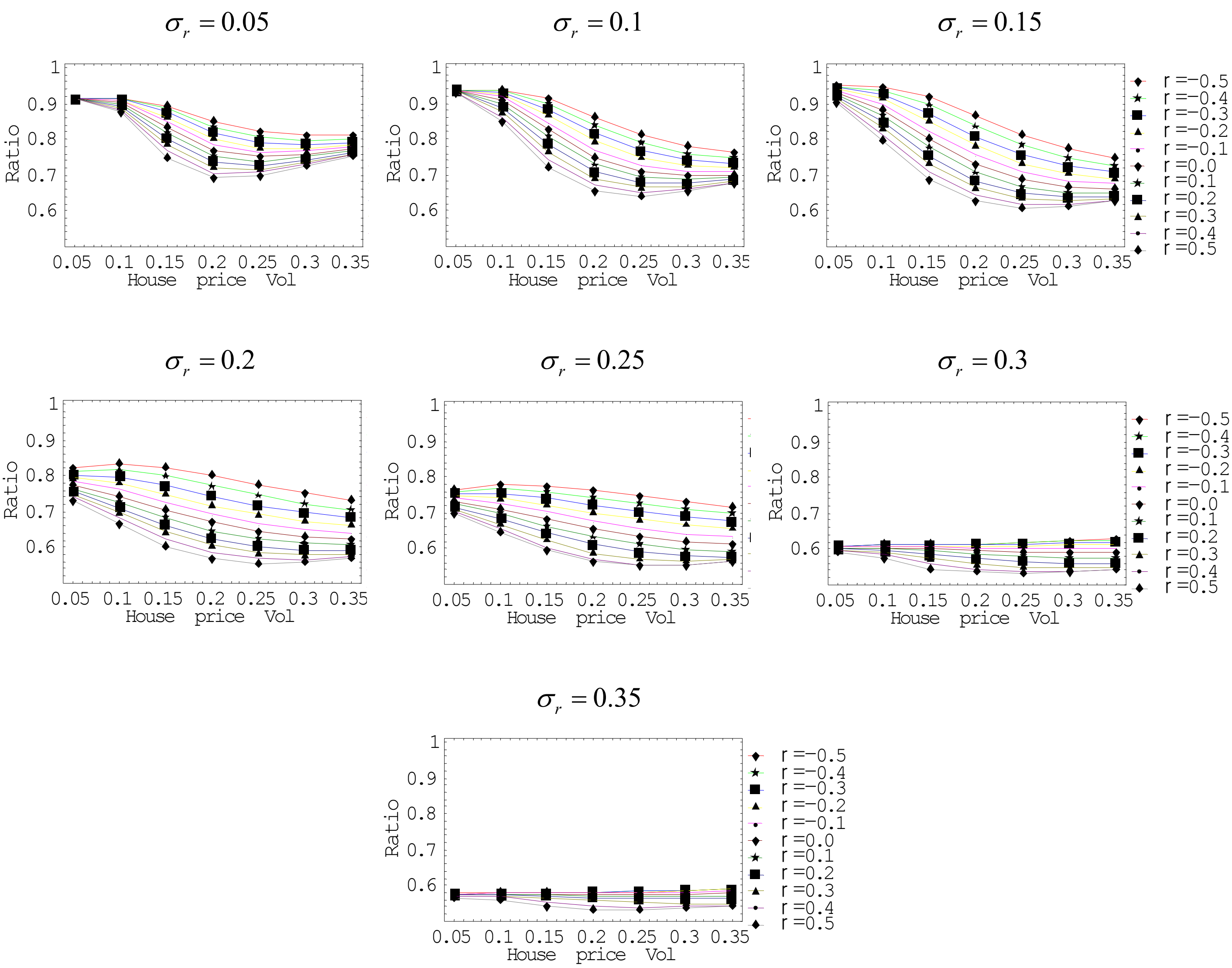
2. 비재무적 상환이 존재하는 경우 뒤틀림비율의 변화

비재무적 상환은 발생시점에서만 모기지론과 결합옵션의 가치에 영향을 주는 것이 아니라 만기시점까지 영향이 누적된다. 따라서 비재무적 상환이 존재하는 경우 대출자의 의사결정에 변함이 있는지를 살펴보기 위해 비재무적 상환이 존재하지 않는 경우와 비교해 보아야 한다.

Figure 8는 비재무적 상환이 존재하는 경우 주택가격변동성에 대한 뒤틀림비율의 변화를 나타낸 것이다. 비재무적 상환이 있는 경우의 뒤틀림비율은 비재무적 상환이 없는 경우(Figure 2)에 비해 아래로 이동한 모습이고 그 차이는 Figure 9에서 보여주고 있다. 뒤틀림비율의 차이는 이자율변동성이 낮을수록 크게 나타나고 이자율변동성이 주어지면 주택가격변동성이 증가할수록 차이는 감소하다가 증가하는 것을 볼 수 있다.

Figure 8. Torsion ratio as house price volatility with non-financial termination

T = 360 months, m = 720, $r_0 = 0.1$, $\kappa = 0.25$, $\theta = 0.0$, $\mu = 0.1$, $s = 0.0$, $H_0 = 100$, LTV = 0.8, $r_m = 0.1$, $\lambda = 50\%PSA$[12].



12 Fabozzi, Frank, 2006, The Handbook of Mortgage-Backed Securities, 6th ed., 27-28.

Figure 9. Difference of torsion ratio between with and without non-financial termination as house volatilities

T = 360 months, m = 720, r_0 = 0.1, κ = 0.25, θ=0.0, μ = 0.1, s = 0.0, H_0 = 100, LTV = 0.8, r_m = 0.1, λ = 50%PSA.

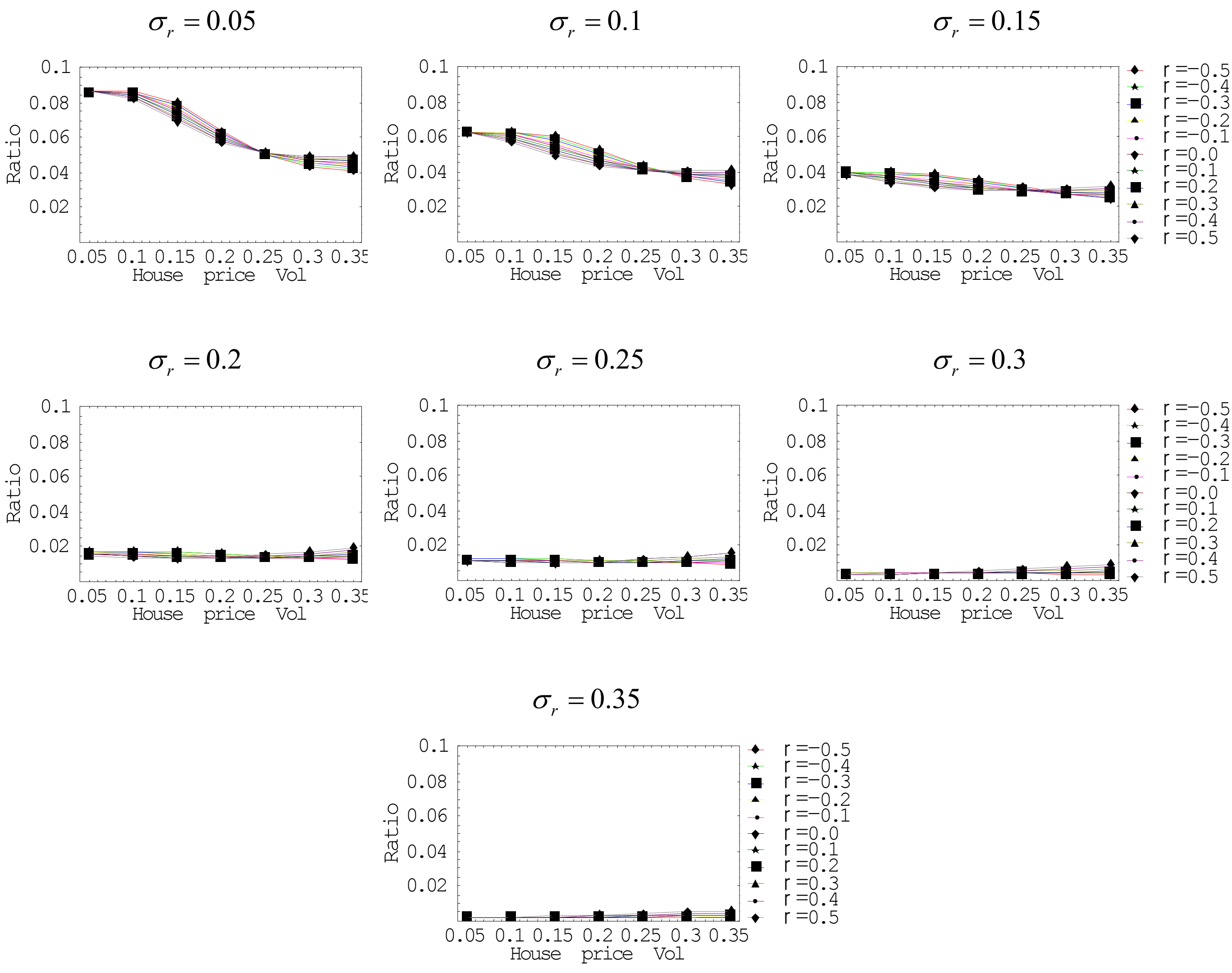


Figure 10는 비재무적 상환이 존재하는 경우 이자율변동성에 따른 뒤틀림비율의 변화를 나타낸 것이다. 주택가격변동성이 0.2이하인 경우에는 이자율변동성이 증가할수록 뒤틀림비율이 증가하다가 감소하고 주택가격변동성이 0.25이상인 경우에는 이자율변동성이 증가할수록 뒤틀림비율은 감소함을 볼 수 있다. 예를 들면, $\sigma_H = 0.05$ 이고 $\sigma_r = 0.05$ 인 경우 뒤틀림비율이 약 0.91정도로 시작하여 σ_r 이 증

가함에 따라 뒤틀림비율은 증가했다가 감소한다. 비재무적 상환이 없는 경우(Figure 3)와 비교했을 때 비재무적 상환이 존재하면 뒤틀림비율이 낮은 결과를 보여준다. Figure 11에서 보듯이 이자율변동성이 증가할수록 뒤틀림비율의 차이는 감소하고 있음을 알 수 있다.

Figure 10. Torsion ratio as interest rate volatility with non-financial termination

T = 360 months, m = 720, $r_0 = 0.1$, $\kappa = 0.25$, $\theta = 0.0$, $\mu = 0.1$, $s = 0.0$, $H_0 = 100$, LTV = 0.8, $r_m = 0.1$, $\lambda = 50\%$PSA.

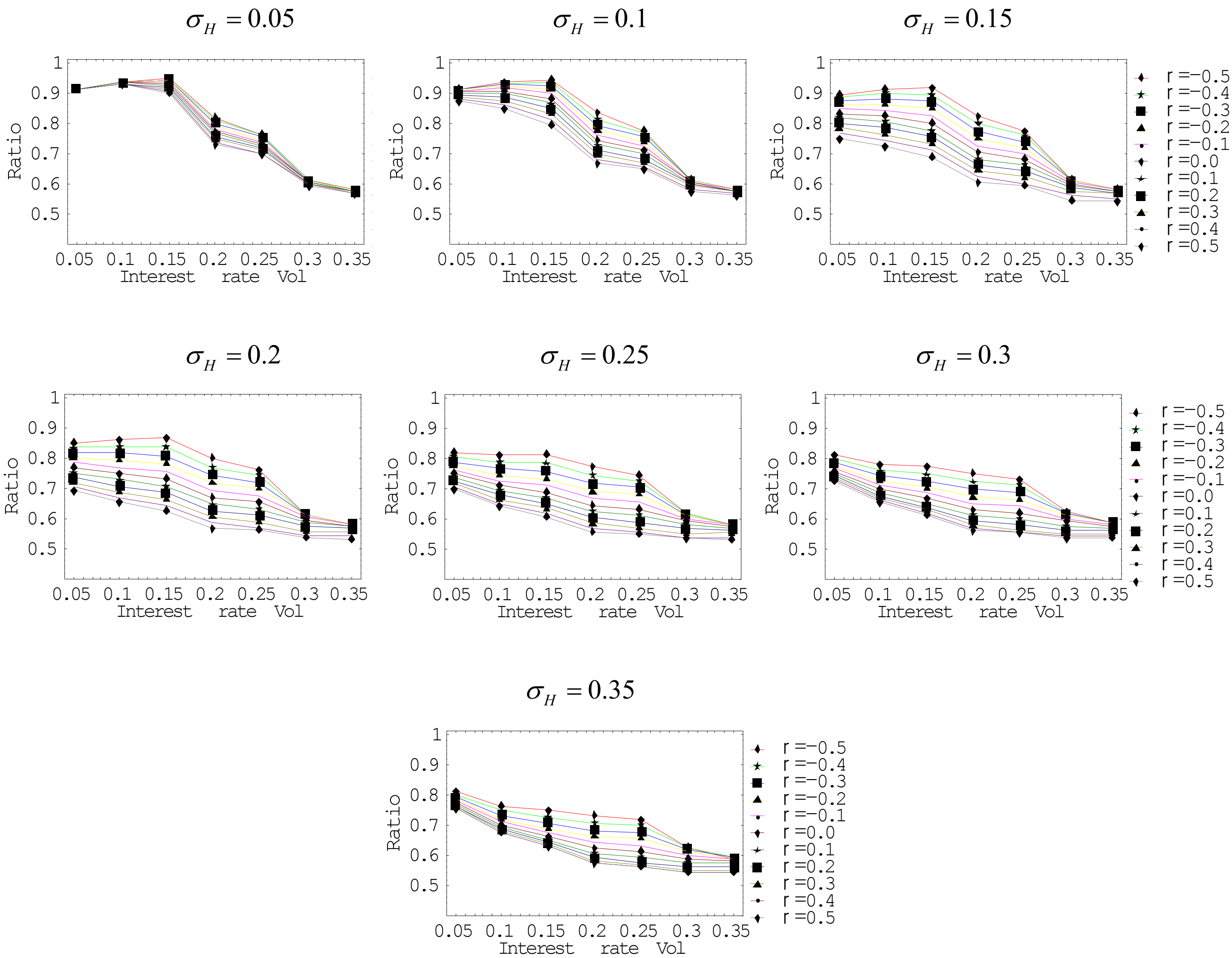
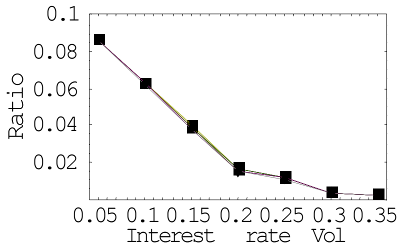


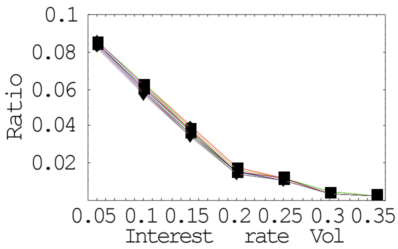
Figure 11. Difference of torsion ratio between with and without non-financial termination as interest rate volatility

T = 360 months, m = 720, $r_0 = 0.1$, $\kappa = 0.25$, $\theta = 0.0$, $\mu = 0.1$, $s = 0.0$, $H_0 = 100$, LTV = 0.8, $r_m = 0.1$, $\lambda = 50\%$PSA.

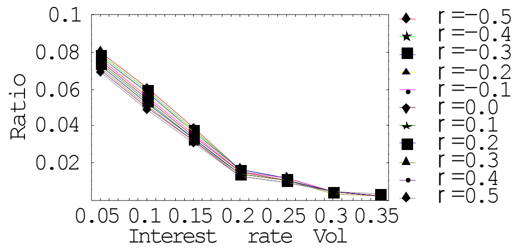
$\sigma_H = 0.05$



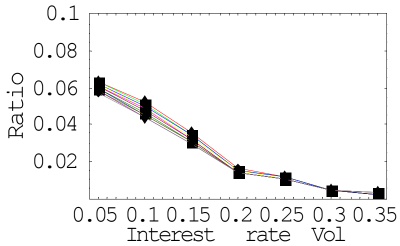
$\sigma_H = 0.1$



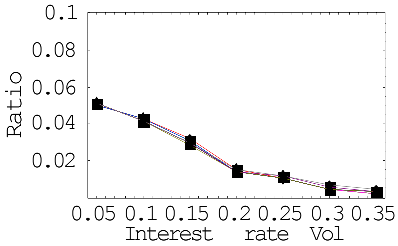
$\sigma_H = 0.15$



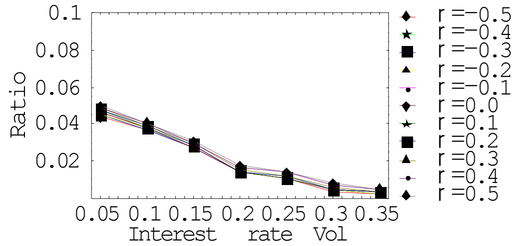
$\sigma_H = 0.2$



$\sigma_H = 0.25$



$\sigma_H = 0.3$



$\sigma_H = 0.35$

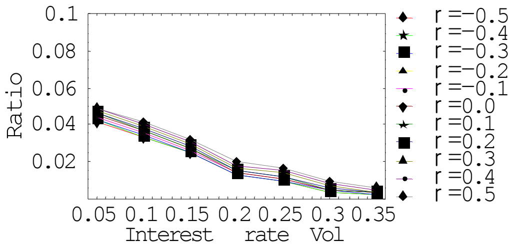


Figure 12은 비재무적 상환이 존재하는 경우 상관계수에 따른 뒤틀림비율의 변화를 나타낸 것이다. 주택가격변동성과 이자율변동성이 주어졌을 때 상관계수가 증가함에 따라 뒤틀림비율은 점차 감소함을 볼 수 있다. 비재무적 상환이 존재하지 않는 경우와 마찬가지로 주택가격변동성이 작은 경우에는 뒤틀림비율의 변화가 크지 않고 주택가격변동성이 클 경우 뒤틀림비율의 변화가 상대적으로 크다는 것을 알 수 있다.

비재무적 상환이 없는 경우와 있는 경우의 차이는 Figure 13에서 보듯이 상관계수의 변화에 따라 변화가 크지 않음을 알 수 있다. 특히 주택가격변동성이 0.25보다

낮은 경우에는 뒤틀림비율의 차이가 감소하다가 그 이후에는 뒤틀림비율의 차이가 증가함을 알 수 있다. 이것으로 Figure 9에서 나타난 결과를 확인할 수 있다.

Figure 12. Torsion ratio as correlation with non-financial termination

T = 360 months, m = 720, r_0 = 0.1, κ = 0.25, θ=0.0, μ = 0.1, s = 0.0, H_0 = 100, LTV = 0.8, r_m = 0.1, λ = 50%PSA.

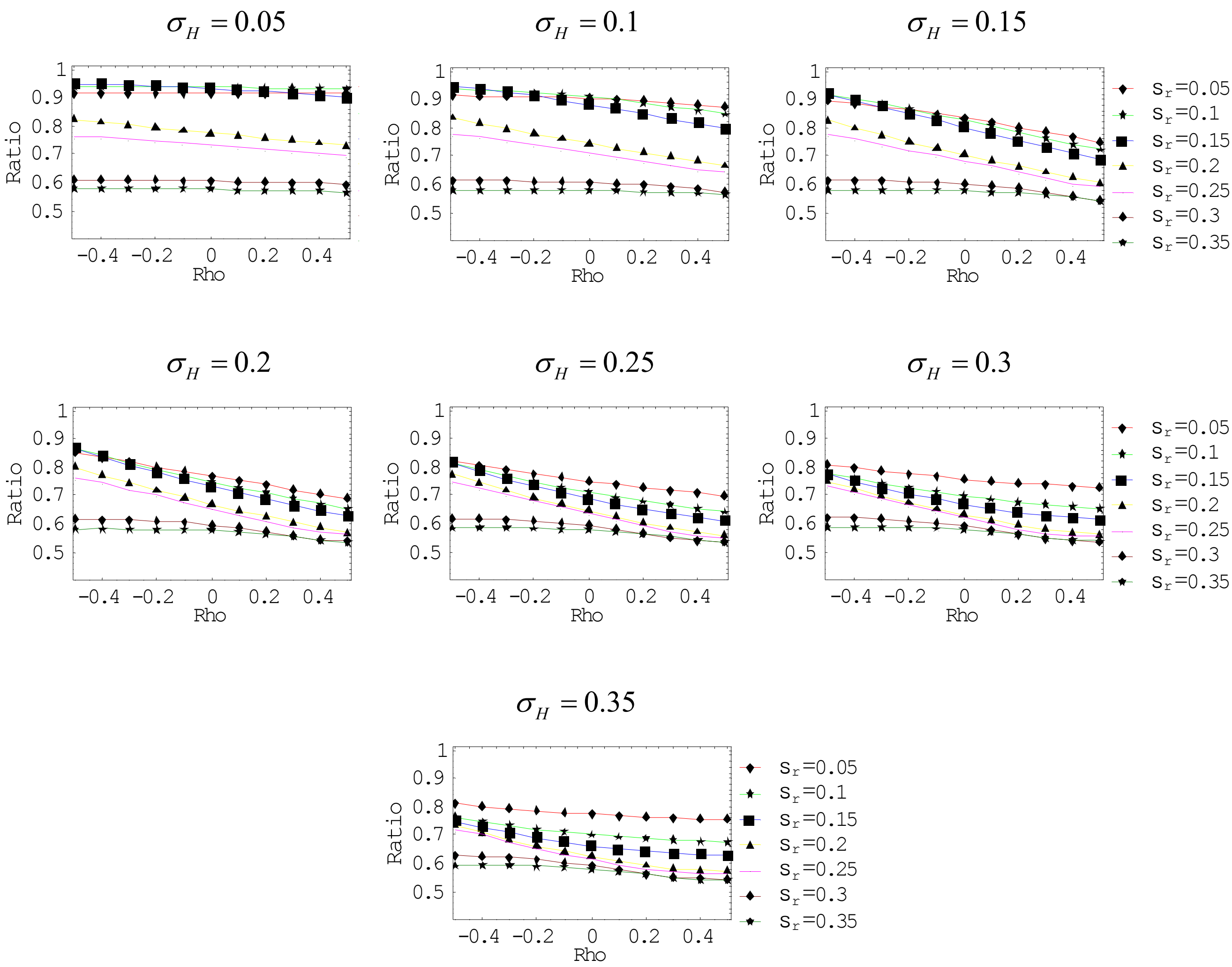
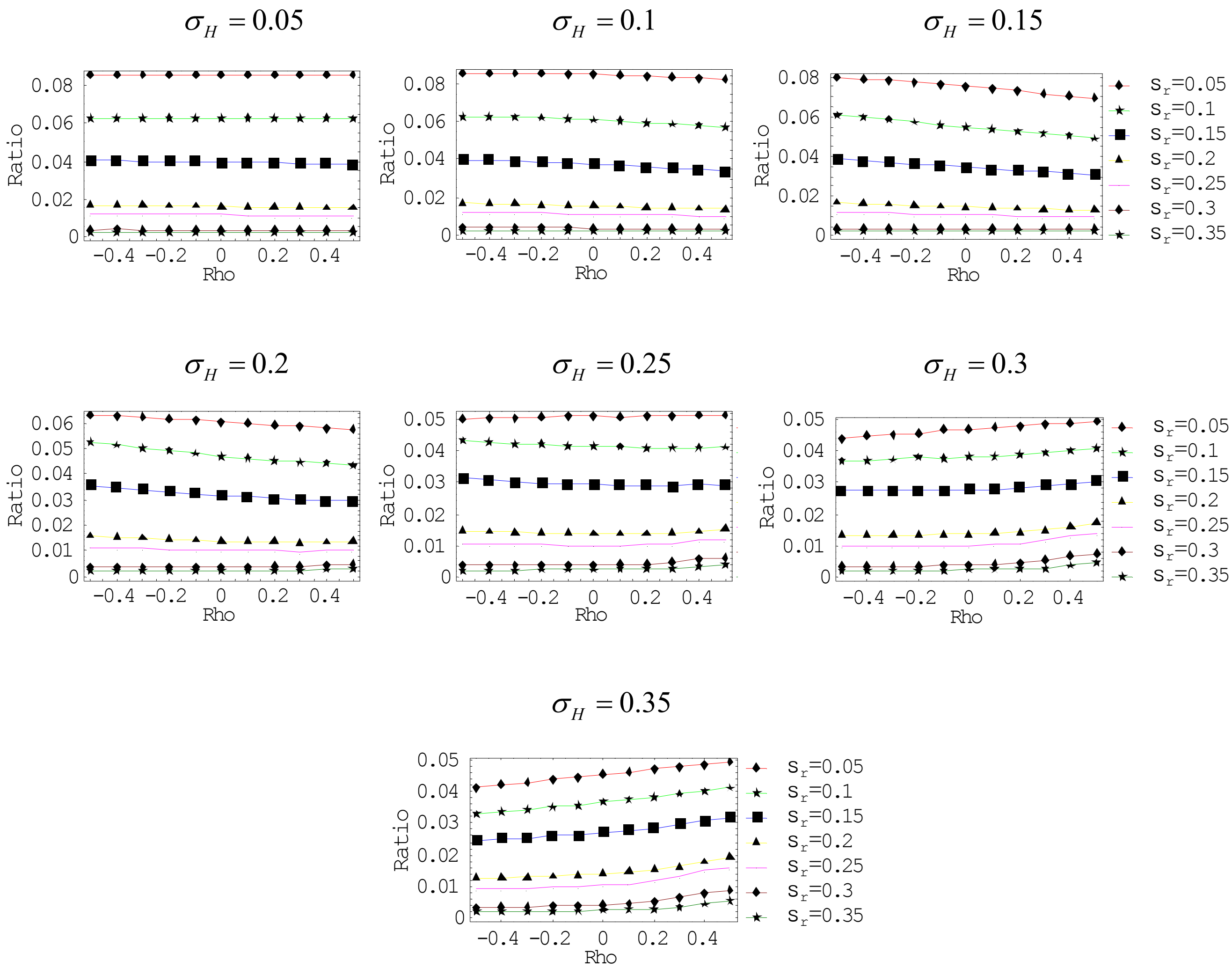


Figure 13. Difference of torsion ratio between with and without non-financial termination as correlation

T = 360 months, m = 720, r_0 = 0.1, κ = 0.25, θ=0.0, μ = 0.1, s = 0.0, H_0 = 100, LTV = 0.8, r_m = 0.1, λ = 50%PSA.



Ⅵ. 결론

지금까지 살펴본 바와 같이 본 논문에서는 모기지론의 가치평가를 위한 적절한 모형을 제시하고 그를 통해 매 상환시점에서 대출자가 자신의 대출포지션을 위해 어떤 선택을 하게 되는지 살펴 보았다.

우선 모기지론의 가치평가를 위해 이자율과 주택가격의 움직임을 결합한 2-요인 이항트리를 사용하였다. 2-요인 이항트리를 생성하기 위해 이자율의 움직임과 주택가격의 움직임을 각각 단위변동성을 가지도록 변환하였고 다음은 이들이 서로 직교하도록 변환을 하였다. 모기지론의 가치평가를 위한 2-요인 이항트리를 이자율과 주택가격의 이항트리를 결합함으로써 생성할 수 있다.

생성된 2-요인 이항트리를 이용하여 만기시점에서부터 후방축차법으로 모기지론의 가치를 평가하였다. 이때, 대출자는 자신의 대출포지션을 최소화하기 위해 모기지론에 내재된 조기상환옵션과 부도옵션 중 대출포지션을 최소화하는 하나의 옵션만 선택하는 의사결정을 하게 된다. 따라서 모기지론에 내재된 옵션의 성격은 조기상환옵션과 부도옵션의 합이 아니라 두 옵션이 결합된 형태를 가지게 된다.

매 상환시점에서 대출자가 조기상환옵션을 행사할지 부도옵션을 행사할지에 따라 결합옵션의 가치는 다르게 된다. 대출자가 선택하는 옵션이 변할수록 결합옵션의 가치는 두 옵션의 합과 차이가 발생하고 이를 측정하기 위해 뒤틀림비율을 사용하였다. 뒤틀림비율은 주택가격변동성에 대해서는 스마일 현상을 보이고, 이자율변동성과 상관계수에 대해서는 감소하는 경향을 보인다. 또한 비재무적 상환이 존재하면 비재무적 상환이 존재하지 않는 경우와 차이가 발생함을 볼 수 있고 이는 이자율변동과 주택가격변동 외에 결혼, 취업, 이직, 출산 등과 같은 여러 가지 요인들은 대출자의 의사결정시 영향을 미치는 것을 알 수 있다.

앞으로의 연구과제는 다양한 이자율모형과 주택가격의 움직임을 반영할 수 있도록 확장하는 것이 첫 번째이고 그 다음으로 확장된 모형들이 실제 시장에 존재하는 모기지 상품들을 얼마나 잘 설명하는지 살펴보는 실증분석이 두 번째라고 할 수 있다. 두 과제 모두 주택담보대출시장의 확대와 중요성이 증가하는 시점에 많은 공헌을 할 수 있을 것이라 본다.

부록 A: Y의 유도

$$dY(t)=\frac{\partial Y}{\partial R}dR(t)+\frac{\partial Y}{\partial X}dX(t)$$

$$=\frac{-\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\left[\left[\frac{\gamma(\theta-r)}{\sigma_r\sqrt{r}}\right]dt+dZ_r\right]+\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left[\frac{r-s-\sigma_H^2/2}{\sigma_H}dt+dZ_H\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left[\frac{r-s-\sigma_H^2/2}{\sigma_H}-\rho\frac{\gamma(\theta-r)}{\sigma_r\sqrt{r}}\right]dt+\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left[dZ_H-\rho dZ_r\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left[\frac{\sigma_r^2R^2/4-s-\sigma_H^2/2}{\sigma_H}-\rho\frac{\gamma\left(\theta-\sigma_r^2R^2/4\right)}{\sigma_r^2R/2}\right]dt+\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left[dZ_H-\rho dZ_r\right]$$

$$=\mu_Y dt+dZ_Y.$$

$$E\left[dZ_Y\right]=E\left[\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left(dZ_H-\rho dZ_r\right)\right]=\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left[E\left(dZ_H\right)-E\left(\rho dZ_r\right)\right]$$
$$=0.$$

$$Var\left[dZ_Y\right]=Var\left[\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left(dZ_H-\rho dZ_r\right)\right]$$
$$=\frac{1}{1-\rho^2}\left[E\left[\left(dZ_H-\rho dZ_r\right)^2\right]-\left[E\left(dZ_H-\rho dZ_r\right)\right]^2\right]$$
$$=\frac{1}{1-\rho^2}\left[dt-2\rho^2dt+\rho^2dt\right]$$
$$=dt.$$

Reference

유병권,김재정, 2004, 주택저당증권(MBS)의 이해, 보성각.
한국주택금융공사, 2004, 주택금융공사: 모기지론 개요
한국주택금융공사, 2007, 주택금융월보 2007년 2월호31권.
이한재, 김규영, 노병인, 2004, MBS 조기상환함수의 추정에 관한 연구, 산업경제연구.

Ambrose, B.W., M. LaCour-Little, and Z.R. Huszar, A Note on Hybrid Mortgage, Real Estate Economics, Vol.33, No.4, 765-782.

Black, F. and M. Scholes, 1973, The Pricing of Options and Corporate Liabilities, *Journal of Political Economy*, Vol.81, No.3, 637-654.

Boyle, P. 1988, A Lattice Framework for Option Pricing with Two State Variables, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol.23, No.1, 1-12.

Boyle, P. and T. Vorst, 1992, Option Replication in Discrete Time with Transaction Costs, *Journal of Finance*, Vol.47, No.1, 271-293.

Brennan, M.J. and E.S. Schwartz, 1978, Finite Difference Methods and Jump Processes Arising in the Pricing of Contingent Claims: A Synthesis, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol.13, No.3, 461-474.

Cairns, A.J.G., 2004, *Interest Rate Models: An Introduction*, Princeton University Press, NJ.

Clewlow, L. and C. Strickland, 2000, *Implementing Derivatives Models*, John Wiley and Sons, Chichester.

Cox, J.C., J.E. Ingersoll, and S.A. Ross, 1981, A Re-examination of Traditional Hypotheses about the Term Structure of Interest Rates, *Journal of Finance*, Vol.36, No.4, 760-799.

Cox, J.C., J.E. Ingersoll, and S.A. Ross, 1985, A Theory of the Term Structure of Interest Rates, *Econometrica*, Vol.53, No.2, 385-408.

Cox, J.C., S.A. Ross, and M. Rubinstein, 1979, Option Pricing: A Simplified Approach, *Journal of Financial Economics*, Vol.7, No.3, 229-263.

Dierker, M., D. Quan, and W. Torous, 2005, Valuing the Defeasance Option in Securitized Commercial Mortgages, Real Estate Economics, Vol.33, No.4, 663-680.

Downing, C., R. Stanton, and N. Wallace, 2005, An Empirical Test of a Two-Factor Mortgage Valuation Model: How Much Do House Prices Matter?, *Real Estate Economics*, Vol.33, No.4, 681-710.

Dunn, K.B. and C.S. Spatt, 2005, The Effect of Refinancing and Market Imperfections on the Optimal Call Strategy and the Pricing of Debt Contracts, *Real Estate Economics*, Vol.33, No.4, 595-617.

Dunn, K.B. and J.J. McConnell, 1981a, Valuation of GNMA Mortgage-Backed Securities, *Journal of Finance*, Vol.36, No.3, 599-616.

Dunn, K.B. and J.J. McConnell, 1981b, A Comparison of Alternative Models for Pricing GNMA Mortgage-Backed Securities, *Journal of Finance*, Vol.36, No.2, 471-484.

Fabozzi, F.J., 2006, *Fixed Income Mathematics*, 4th ed., McGraw-Hill, NJ .

Hilliard, J.E., A.L. Schwartz, and A.L. Tucker, 1996, Bivariate Binomial Options Pricing with an Application to American Futures Options with Stochastic Interest Rates, *Journal of Financial Research*, Vol.19, No.4, 585-602.

Hilliard, J.E., J.B. Kau, and V.C. Slawson, 1998, Valuing Prepayment and Default in a Fixed-Rate Mortgage: A Bivariate Binomial Options Pricing Technique, *Real Estate Economics*, Vol.26, No.3, 431-468.

Ho, S.Y. and S.B. Lee, 2004, *The Oxford Guide to Financial Modeling*, Oxford University Press, NJ.

Hull, J., 2003, *Options, Futures, and Other Derivatives*, 5th ed., Prentice Hall, NJ.

Kalotay, A., D. Yang, and F.J. Fabozzi, 2004, An Option-Theoretic Prepayment Model for Mortgages and Mortgage-Backed Securities, *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, Vol.7, No.8, 949-978.

Kang, P. and S.A. Zenios, 1992, Complete Prepayment Models for Mortgage-Backed Securities, *Management Science*, Vol.38, No.11, 1665-1685.

Kau, J.B. and D.C., 1995, An Overview of the Option-Theoretic Pricing of Mortgages, *Journal of Housing Research*, Vol.6, No.2, 217-244.

Kau, J.B. and V.C. Slawson Jr., 2002, Frictions, Heterogeneity and Optimality in Mortgage Modeling, *Journal of Real Estate Finance and Economics*, Vol.24, No.3, 239-260.

Kau, J.B., D.C. Keenan, and T. Kim, 1993, Transaction Costs, Suboptimal Termination and Default Probabilities, *Journal of the American Real Estate and Urban Economics Association*, Vol.21, No.3, 247-263.

Kau, J.B., D.C. Keenan, W.J. Muller, and J.F. Epperson, 1992, A Generalized Valuation Model for Fixed-Rate Residential Mortgages, *Journal of Money, Credit and Banking*, Vol.24, No.3, 279-299.

Kutner, G.W. and J.A. Seifert, 1989, The Valuation of Mortgage Loan Commitments Using Option Pricing Estimates, *Journal of Real Estate Research*, Vol.4, No.2, 13-20.

Leung, W.K. and C.F. Sirmans, 1990, A Lattice Approach to Pricing Fixed-Rate Mortgages with Default and Prepayment Options, *AREUEA*, Vol.18, No.1, 91-104.

Levin, A. and A. Davison, 2005, Prepayment Risk- and Option-Adjusted Valuation of MBS, *Journal of Portfolio Management*, Vol.31, No.4, 73-85.

Longstaff, F., 2005, Borrower Credit and the Valuation of Mortgage-Backed Securities, Real

Estate Economics, Vol.33, No.4, 619-661.
Merton, R., 1973, Theory of Rational Option Pricing, *Bell Journal of Economics and Management Science*, Vol.4, No.1, 141-183.
Merton, R.C., 1976, Option Pricing When Underlying Stock Returns Are Discontinuous, *Journal of Financial Economics*, Vol.3, No., 125-144.
Nelson, D. and K. Ramaswamy, 1990, Simple Binomial Processes as Diffusion Approximations in Financial Models, *Review of Financial Studies*, Vol.3, No.3, 393-430.
Page, F.H. and A.B. Sanders, 1986, A General Derivation of the Jump Process Option Pricing Formula, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol.21, No.4, 1986.
Richard, S.F. and R. Roll, 1989, Prepayments on Fixed-Rate Mortgage-Backed Securities: A Model with Innovations and Attributes to Extend the Understanding of Mortgage Prepayments, *Journal of Portfolio Management*, Vol 15, No.3, 73-82.
Schwartz, E.S. and W.N. Torous, 1992, Prepayment, Default, and the Valuation of Mortgage Pass-Through, *Journal of Business*, Vol.65, No.2, 221-239.
Stanton, R. and N. Wallace, 1998, Mortgage Choice: What's the Point, *Real Estate Economics*, Vol.26, No.2, 173-205.
Tian, Y., 1993, A Model Lattice Approach to Option Pricing, *Journal of Futures Markets*, Vol.13, No.5, 563-577.
Titman, S., S. Tompaidis, and S. Tsyplakov, 2005, Determinants of Credit Spreads in Commercial Mortgages, Real Estate Economics, Vol.33, No.4, 711-738.
Trigeorgis, L., 1991, A Log-transformed Binomial Numerical Analysis Method for Valuing Complex Multi-option Investments, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol.26, No.3, 309-326.
Vasicek, O., 1977, An Equilibrium Characterization of the Term Structure, *Journal of Financial Economics,* Vol.5, No.2, 177-188.
Wallace, N., 2005, Innovations in Mortgage Modeling: An Introduction, Real Estate Economics, Vol.33, No.4, 587-593.
Wei, J.Z., 1993, Valuing American Equity Options with a Stochastic Interest Rate: A Note, *Journal of Financial Engineering*, Vol.2, No.2, 195-206.
Xu, C., X. Qian, L., and Jiang, 2003, Numerical Analysis on Binomial Tree Methods for a Jump-Diffusion Model, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol.156, No., 23-45.