생존분석을 이용한 상장폐지율분석

2008. 5

백석대학교 경상학부

윤 종 인

phone : 041-550-0525,
H.P. : 016-326-0651,
e-mail : jiyoon@bu.ac.kr

생존분석을 이용한 상장폐지율분석

<요　약>

본 연구는 장기과잉반응가설의 검정에서 생존자편의가 나타날 수 있는가를 검정하였다. 이를 위하여 생존분석방법을 이용하였으며 상장폐지율에 영향을 미치는 요인으로 관리종목 여부, 직전기간 수익률, 주식시장가격, 주식시장가격/액면가격에 대하여 검정하였다. 결과에 따르면 주요내용은 다음과 같다. 첫째 관리종목의 경우 상장폐지율은 유의하게 높았던 것으로 나타났다. 둘째 직전기간을 6, 12, 24, 36개월로 설정하였을 때 직전기간 수익률에 따른 상장폐지율의 차이는 유의하지 않았던 것으로 나타났다. 셋째 관찰시점의 주식시장가격 또는 주식시장가격/액면가격이 낮을수록 예측기간 상장폐지율은 높았던 것으로 나타났다. 이 결과는 비교적 단기간의 직전기간 수익률을 이용하는 장기과잉반응가설의 검정에서 생존자편의가 그다지 중요하지 않을 수 있음을 시사한다. 하지만 장기간의 누적수익에 해당되는 주식시장가격과 예측기간 상장폐지율과 (-)의 상관관계를 갖는 것으로 나타났기 때문에 장기간의 직전 수익률이 낮았다면 예측기간 상장폐지율은 높다고 볼 수 있다.

주제어: 상장폐지율, 생존분석, 경쟁위험, 장기과잉반응

1. 문제제기

개별주식의 수익률을 이용한 여러 연구는 생존자편의(survivor bias)의 문제에 직면할 수 있다. 생존자편의란 표본기간 중 생존한 주식만을 표본으로 이용하기 때문에 발생한다. 따라서 자료의 제약이 많은 실증연구에서 생존자편의는 피할 수 없는 경우가 많다.

물론 생존자편의가 얼마나 중요한가는 연구에 따라 다르다. Elton, Gruber and Blake(1996)는 생존자편의의 크기를 추정하였고 그 크기가 무시할 수 없다는 결과를 보고하였다. 그들에 따르면 1976~1993년 펀드 수익률의 경우 생존자편의는 0.4~1%P 정도 되는 것으로 나타났다. 하지만 Fama and French(1996)는 생존자편의가 중요하지 않다는 결과를 제시하였다. 이들은 3요인모형을 검정하면서 3요인 중 장부가치/시장가치(book-to-market equity)와 수익률의 상관관계는 생존자편의에 의한 것이 아님을 보인 바 있다.

논란에도 불구하고 생존자편의는 여전히 중요한 고려 사항이다. 개별 주식수익률을 이용한 연구라면 생존자편의의 가능성은 항상 있게 마련인데 대표적인 경우가 주식수익률의 장기과잉반응(long-term overreaction)현상에 관한 연구이다[Jegadeesh and Titman(1993)]. 수익률의

장기과잉반응에 관한 연구는 보통 과거 직전기간(reference period) 수익률이 낮았던 주식으로 이루어진 패자포트폴리오(loser portfolio)의 수익률이 이후의 예측기간(prediction period) 동안 높았는가를 검정한다. 만약 검정의 결과가 이를 지지한다면 수익률의 장기과잉반응이 있었다고 말하며 이는 기술적 전략 중 반대전략(contrarian strategy)이 우월함을 시사한다.[1]

Loughran and Ritter(1996), Elton, Gruber and Blake(2001)에 따르면 장기과잉반응연구에서 생존자편의의 문제는 중요하다. 그 이유는 명확하다. 우선 관찰시점(observation time)에서는 예측기간 동안 개별주식의 생존율을 알 수 없다고 하자. 그리고 관찰시점에서 과거수익률이 낮았던 주식의 경우 예측기간 동안 생존하지 못할 가능성이 더 높다고 하자. 그렇다면 직전기간 수익률의 정보만으로 만들어진 패자포트폴리오의 예측기간 수익률은 생존가능성에 의해 영향을 받게 된다. 만약 예측기간 생존하지 못한 주식이 많았다면 그만큼 패자포트폴리오의 수익률은 낮아질 것이다. 따라서 이들 주식을 표본에서 제외하는 것은 패자포트폴리오의 수익률은 과대평가하는 것이다. 즉 패자포트폴리오의 수익률은 높은 것으로 나타날 것이고 이로 인해 장기과잉반응가설이 채택될 수 있다. 이 때 생존자편의의 오류가 발생한다.

본 연구의 목표는 장기과잉반응가설에 초점을 맞추어 생존자편의가 얼마나 중요한 문제인가를 검정하는 것이다. 이를 다루기 위한 방법은 여러 가지 있을 수 있다. 본 연구는 개별주식의 생존율에 영향을 미치는 요인이 무엇인가를 분석하고자 한다. 예를 들어 과거 직전기간의 누적수익률이 향후 생존율에 영향을 미쳤는가를 검정한다. 만약 어떤 주식의 과거 직전기간 수익률이 낮을수록 예측기간 동안 생존율이 낮았다고 하자. 그렇다면 이 경우에는 생존자편의가 발생할 가능성이 높다. 하지만 과거의 직전기간 수익률과 예측기간 생존율의 상관관계가 없는 것으로 나타났다면 과거의 직전기간 수익률에 근거한 수익률예측에서 생존자편의가 나타나지는 않을 것이다.

결국 장기과잉반응가설의 연구에서 직전기간 수익률이 갖는 의미는 두 가지이다. 첫째 직전기간 수익률은 향후 예측기간 수익률을 예측하는데 유의한 정보를 가질 수 있다. 이를 검정하는 것은 장기과잉반응가설의 검정에 해당된다. 둘째 직전기간 수익률은 향후 예측기간 동안의 상장폐지율을 예측하는데 유의한 정보를 가질 수 있다. 만약 그렇다면 그리고 패자포트폴리오의 상장폐지율이 높은 것으로 나타난다면 직전기간 수익률만을 이용한 연구는 생존자편의에 노출될 수 있다. 본 연구는 이 중 둘째의 가설을 검정하는 것이다.

장기과잉반응가설에 초점을 맞추고 있으므로 상장폐지율의 설명변수로는 직전기간 누적수익률을 이용한다. 즉 직전기간 누적수익률에 따라 예측기간 동안 상장폐지율이 달라지는가가 귀무가설이다. 이외에도 여러 변수를 고려할 수 있다. 본 연구는 관리종목 여부, 관찰시점의 주식시장가격 또는 주식시장가격/액면가격을 이용하였다. 후자의 경우는 Loughran and Ritter(1996)에 따른 것인데 이들은 주식시장가격이 상장폐지율과 상관관계를 가질 수 있음을 지적하였다. 즉 주식시장가격이 낮을수록 상장폐지율이 높다는 것이다.

---

[1] 물론 반대의 가설도 가능하다. 관찰시점에서 과거 수익률이 높았던 주식으로 이루어진 승자포트폴리오(winner portfolio)의 수익률이 이후의 예측기간 동안 높았음을 지지한다면 이는 계속전략 또는 모멘텀전략(momentum strategy)이 우월함을 시사한다. 어쨌든 이 두 가설이 타당한 것으로 나타난다면 약형 효율적 시장가설(weak form efficient market hypothesis)에 대한 반론이 된다.

관찰시점 주식시장가격의 의미를 해석하기는 쉽지 않다. Conrad and Kaul(1993)은 주식시장가격이 ‘장기적인’ 누적수익의 대용치라고 해석하였다. 그리고 이 변수가 향후 예측기간 수익률을 예측하기 위한 정보를 갖고 있다고 보았다. 또한 Loughran and Ritter(1996)는 주식시장가격이 향후 상장폐지율에 관한 정보를 갖는 대용치라고 해석하였다. 따라서 두 연구를 종합하면 주식시장가격의 의미는 다음과 같다. 즉 주식시장가격은 ‘장기의’ 누적수익이고 이 변수는 향후 예측기간 수익률과 상장폐지율에 관한 정보를 갖는다. 이 해석은 비교적 ‘단기에’ 해당되는 직전기간 수익률이 향후 예측기간의 수익률과 상장폐지율에 관한 정보를 갖는 대용치라고 해석하는 것에 대응되는 것이다.

따라서 장기과잉반응가설과 생존자편의에 관한 연구는 각각 장기적 측면과 단기적 측면을 구분할 수 있다. 첫째 장기적 측면은 주식시장가격이 포착한다. 주식시장가격은 장기 누적수익으로서 향후 예측기간 수익률과 상장폐지율에 관한 정보를 가질 수 있기 때문이다. 둘째 단기적 측면은 직전기간 수익률이 포착한다. 비교적 단기에 계산되는 직전기간 수익률도 향후 예측기간 수익률과 상장폐지율에 관한 정보를 가질 수 있기 때문이다.

본 연구는 이 중 생존자편의에 초점을 맞춘다. 즉 두 가지 변수, 즉 장기적 성격의 주식시장가격과 단기적 성격의 직전기간 수익률이 예측기간 상장폐지율과 어떠한 상관관계를 갖는가를 검정한다. 물론 이 두 변수가 예측기간 수익률에 대한 예측력을 갖는가도 여전히 중요한 문제이지만 이 과제는 향후의 연구과제로 남겨 둔다.

연구방법으로는 생존분석(survival analysis)을 이용한다. 생존분석은 생존기간에 대한 분석이며 바꾸어 말하면 생존의 종료를 초래하는 사건의 발생기간에 대한 분석이다. 따라서 주식시장의 상장을 생존으로 본다면 생존분석은 상장폐지라는 사건이 발생할 때까지 걸리는 기간에 대한 분석이 된다. 물론 생존분석에서 사건발생기간에 대한 분석이란 기간에 따른 사건의 발생확률에 대한 분석으로 수행한다. 따라서 본 연구의 1차적인 과제는 관찰시점 이후 시간이 지남에 따라 상장주식의 상장폐지율이 어떻게 되는가를 추정하는 것이다. 다음으로 중요한 것은 상장폐지율에 영향을 미치는 요인에 관한 분석이다. 생존분석에서는 이를 공변량(covariate)이라고 한다. 앞에서 상장폐지율에 대한 설명변수로 언급되었던 직전기간 수익률, 관리종목 가변수, 주식시장가격, 주식시장가격/액면가격은 모두 공변량이다.

최근까지 생존분석연구는 다양한 방향으로 발전되어 왔다. 그 중에서도 본 연구가 주목하는 것은 이른 바 경쟁위험(competing risk)이다. 경쟁위험은 발생할 수 있는 사건이 2개 이상일 때 발생하는 통계적인 의미의 위험이다. 본 연구에서 발생할 수 있는 사건은 크게 두 가지인데 하나는 상장폐지이고 다른 하나는 인수합병이다.[2] 인수합병의 중요성은 Elton, Gruber and Blake(2001)에 의해 이미 강조된 바 있다. 따라서 생존분석방법 또한 이를 고려한 것이어야 하며 이에 본 연구는 생존분석방법 중 경쟁위험모형(competing risk model)을 이용한다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 우선 2절에서는 표본에 대해 설명하며 생존분석에 근거하여 변수를 측정하는 방법에 대해 논의한다. 3절에서는 생존분석방법에 대해 설명한다. 초점은 공변량모형이며 이 모형에는 경쟁위험이 반영되어 있다. 4절에서는 상장폐지율의 추정결과를 제시하고 공변량모형의 추정 및 검정결과를 제시한다. 끝으로 결과를 요약한다.

---

[2] 인수합병된 기업의 주식도 상장이 폐지된다. 하지만 이하 자료의 설명에서 언급하듯이 상장폐지와 인수합병은 다른 사건으로 정의한다.

2. 자료와 공변량의 설정

방법론적으로 본 연구는 생존분석에 해당된다. 따라서 생존분석방법에 근거하여 변수를 정의하고 자료를 계산하는 방법에 대해 설명한다.

2.1 표본주식의 설정

본 연구는 1998년 1월~2007년 12월까지 한국증권선물거래소에 상장된 주식을 대상으로 한다. 월별 주식수익률 및 상장에 관한 정보는 한국신용평가정보가 제공하는 Kisvlaue 데이터베이스를 이용하였으며 이를 보완하기 위하여 상장 및 관리종목에 관한 정보는 한국증권선물거래소의 '증권시장지'를 이용하였다. 표본기간이 이와 같이 제약된 이유는 상장폐지에 관한 정보를 정확하게 구할 수 있는 시기가 그렇게 길지 않았기 때문이다.

표본은 2001년 1월 현재 상장된 주식으로 1998년 1월~2000년 12월까지 월별 수익률을 얻을 수 있는 주식으로 이루어져 있다. 표본은 비금융기업과 금융기업의 주식을 모두 포함하였고 2001년 1월 현재 관리대상종목이었던 주식도 포함하였다.

용어의 명확성을 위하여 3가지 용어를 정리하기로 한다. 이 용어는 수익률의 장기과잉반응가설의 검정과 관련된 것으로 여러 가지 표현이 있지만 본 연구는 White(2000)를 따르기로 하였다. 우선 관찰시점(observation time)이다. 본 연구에서는 2001년 1월 현재인데 이 시점에 투자자는 투자를 결정한다. 다음으로 직전기간(reference period)이다. 투자자는 관찰시점에 과거 일정기간 동안의 누적수익률을 근거로 투자를 결정하는데 이 때 누적수익률을 계산하는 기간이 직전기간이다. 이하에서 언급하겠지만 직전기간은 6, 12, 24, 36개월을 이용하였다. 끝으로 예측기간(prediction period)이다. 관찰시점에 결정한 투자의 성과를 계산하는 기간인데 본 연구에서는 2001년 1월 이후의 기간이 된다.

2.2 변수의 설정 : 생존기간

본 연구가 이용하는 변수는 생존분석(survival analysis)에서 전형적인 것이다. 첫째는 상장주식의 생존기간(상장기간)이며 둘째는 생존기간의 설명변수에 해당하는 공변량(covariate)이다. 먼저 생존기간의 측정에 대해 논의하고 이어서 공변량의 측정에 대해 논의한다.

생존기간은 어떤 주식이 표본기간 동안 얼마나 생존해 있었는가, 즉 상장을 지속하였는가를 나타낸다. 예를 들어 어떤 주식이 관찰 후 36개월만에 상장폐지되었다면 이 주식의 생존기간은 36개월이 된다. 물론 본 연구의 경우 생존기간은 2001년 1월 이후 최장 72개월이다.

어떤 주식의 생존기간은 세 가지 사건에 의해 결정되는 것으로 정의한다. 첫째 상장폐지(Delisting), 둘째 인수합병(merge and acquisition), 셋째 상장지속으로 구분한다. 각 사건별로 표본주식의 수를 정리한 것이 <표1>에 제시되어 있다. 주의할 할 것은 인수합병되어 상장이 폐지되는 경우는 상장폐지로 분류하지 않고 인수합병으로 분류한다는 점이다.

첫째 사건은 표본기간 중 어떤 주식이 상장폐지되는 경우이다. 물론 상장폐지된 주식이라고 해서 수익률이 -100%라고 말할 수는 없다. <표1>에 따르면 상장이 폐지되더라도 폐업보

다 외감 및 일반기업, 금감위등록기업으로 남는 경우가 더 많았고 이 경우 주식은 장외에서 거래될 수 있기 때문이다. 하지만 그렇다고 해서 투자자에게 손실이 없는 것은 아니다. 한국증권선물거래소에 따르면 상장폐지사유는 감사의견 거절, 신청에 의한 상장폐지, 자본전액잠식, 최종부도발생 등이었다(이 정보는 2003년 이후에만 이용할 수 있었다). 따라서 파산하지는 않았더라도 상장폐지에 따른 손실은 상당히 큰 것으로 보아야 할 것이다.

둘째 사건은 표본기간 중 어떤 기업이 인수합병되는 경우이다. 물론 인수합병된 기업의 주식도 거래소에서 상장이 폐지되었다고 말한다. 예를 들면 한국증권선물거래소의 상장폐지 중 해산사유발생에 따른 것은 모두 인수합병에 의한 것이었다(이 정보 역시 2003년 이후에만 이용할 수 있었다). 하지만 표본 중 인수합병된 기업은 모두 상장기업에 의해 인수되었고 그런 의미에서 첫째 사건, 즉 상장폐지와는 구분되어야 한다. 따라서 본 연구는 인수합병과 상장폐지를 서로 다른 사건으로 정의한다.

셋째 사건은 표본기간 중 상장폐지되거나 인수합병되지 않고 상장이 지속되는 경우이다. <표1>에 따르면 대부분의 주식은 상장이 지속되는 사건에 속한다.

사건별로 생존기간은 다음과 같이 계산될 것이다. 첫째 상장폐지의 경우 생존기간은 관찰이 시작된 후 상장폐지될 때까지 걸리는 기간이다. 둘째 인수합병의 경우 생존기간은 관찰이 시작된 후 인수합병될 때까지 걸리는 기간이다. 셋째 상장지속의 경우 생존기간은 표본기간 전체와 같다. 따라서 생존기간은 길어야 72개월이다.

생존분석의 개념에 따라 세 가지 사건을 정리하면 다음과 같다. 우선 발생할 수 있는 사건은 모두 세 가지인데 첫째 상장폐지, 둘째 인수합병, 셋째 상장지속이다. 본 연구의 관심사는 상장폐지이므로 이를 관심사건(event of interest)이라고 부른다. 둘째 인수합병은 상장폐지의 분석에서 고려해야 할 또 다른 사건이므로 이를 경쟁사건(competing risk event)이라고 부른다. 셋째 표본기간 중 상장이 지속되는 사건은 절단사건(censored event)이라고 부른다. 만약 표본기간이 훨씬 더 길었다면 관심사건 또는 경쟁사건이 발생할 수도 있지만 표본기간이 절단되어 사건의 관찰이 없었다는 의미에서 붙여진 명칭이다.

이하에서 설명하게 될 경쟁위험모형(competing risk model)은 경쟁사건이 존재하기 때문에 필요한 것이다. 즉 관심사건과 절단사건만 있다면 이 경우에는 보통의 생존분석방법을 이용하면 된다. 하지만 경쟁사건이 있을 경우 기존의 생존분석방법은 적절한 것이 아니다. 따라서 경쟁위험이란 경쟁사건이 존재하기 때문에 발생하는 통계학적인 의미에서의 위험이다.

2.3 변수의 설정 : 공변량

본 연구는 주식의 생존기간을 분석하되 이 변수에 영향을 미치는 요인이 무엇인가를 검정한다. 생존분석에서는 이러한 요인을 공변량(covariate)이라고 부른다.

본 연구의 목표는 장기과잉반응가설을 검정하는데 있어 생존자편의(survivorship bias)가 중요한 것이었는가를 검정하는 것이다. 즉 직전기간 누적수익률에 따라 생존기간이 달라지는가를 검정한다. 만약 그렇다면 생존자편의가 존재할 수 있다. 따라서 가장 우선적으로 고려해야 할 공변량은 직전기간 누적수익률이다.

< 표 1> 표본의 분류

구분	비관리종목		관리종목		합계	
상장지속	477	(91.6%)	58	(52.7%)	535	(84.8%)
상장폐지	42	(8.1%)	40	(36.4%)	82	(13.0%)
외감 및 일반기업	30	(5.8%)	18	(16.4%)	48	(7.6%)
금감위등록기업	3	(0.6%)	12	(10.9%)	15	(2.4%)
폐업	9	(1.7%)	10	(9.1%)	19	(3.0%)
인수합병	2	(0.4%)	12	(10.9%)	14	(2.2%)
계	521	(82.6%)	110	(17.4%)	631	

주) 외감기업, 일반기업, 금감위등록기업은 Kisvalue의 분류에 따른 것임. 비관리종목, 관리종목, 합계의 괄호 안은 각각 비관리종목의 계, 관리종목의 계, 합계의 계에 대한 백분율임.

< 표 2> 사건별 직전기간 누적수익률

구분	비관리종목				관리종목			
	r_{06}	r_{12}	r_{24}	r_{36}	r_{06}	r_{12}	r_{24}	r_{36}
상장지속	0.83	2.49	2.86	1.04	11.56	11.26	10.89	9.51
상장폐지	7.90	5.79	6.32	3.58	−4.27	4.13	6.27	0.04
인수합병	−0.25	3.31	1.67	0.87	−0.58	11.24	12.83	9.85

주) r_{06}, r_{12}, r_{24}, r_{36}은 각각 직전 6, 12, 24, 36개월 평균수익률이며 평균수익률은 2001년 자료와 2004년 자료의 경우 각각 2001년 1월과 2004년 1월에 계산한 것임.

직전기간 누적수익률은 직전 6개월, 12개월, 24개월, 36개월의 월별 초과수익률의 평균으로 정의한다. 우선 각 주식의 월별 초과수익률은 해당월의 종합주가지수 수익률을 차감한 초과수익률(excess return)이다. 다음으로 평균의 계산에는 산술평균(arithmetic average)을 이용하였다. 연속복리(continuous compounding)개념에 따른 것이다. 이와 같은 방식은 장기과잉반응가설의 검정에서 이용되어 왔던 누적비정상수익률(CAR : cumulative abnormal return)의 개념에 따른 것이다. 큰 차이는 없지만 본 연구는 평균을 이용하였다는 점에서 다르다.

직전기간 누적수익률이 생존기간에 대한 공변량이 된다는 것은 직전기간 누적수익률이 낮을수록 생존기간이 짧았다거나 또는 높았다는 가설을 검정하기 위한 것이다. 예를 들어 이하에서 설명할 비례해저드모형의 경우 공변량인 직전기간 누적수익률의 추정계수가 (-)의 값을 갖게 된다면 이는 직전기간 누적수익률이 낮을수록 생존기간이 짧았다는 것을 의미한다. 이런 경우라면 기존 연구에서 지적된 바 있는 생존자편의가 존재하는 경우에 해당된다.

<표1>에는 각 사건에 속하는 주식집단별로 직전기간 누적수익률의 평균이 제시되어 있다. 기술적 통계량(descriptive statistics)이기는 하지만 상장폐지된 주식집단의 직전기간 누적수익

률이 더 낮았는지는 불분명하다. 물론 기술적 통계량만으로 생존자편의에 대한 결론을 내릴 수는 없다. 상장폐지율에 영향을 미치는 또 다른 요인이 있을 수 있기 때문이다.

이에 본 연구는 공변량을 추가로 이용하였다.[3] 가장 기본적인 것은 관리종목 여부를 의미하는 가변수(dummy variable)이다. 이 변수는 2001년 1월 관리종목이었으면 1의 값을 갖고 그렇지 않은 경우 0의 값을 갖는다. 따라서 비례해저드모형의 경우 공변량인 관리종목 가변수의 추정계수가 (+)의 값을 갖게 된다면 관리종목주식의 생존기간이 짧았다는 것을 의미한다.

또한 주식시장가격과 주식시장가격/액면가격을 공변량으로 이용하였다. 이 변수를 공변량으로 이용한 것은 Loughran and Ritter(1996)에 따른 것인데 이들은 관찰시점 주식시장가격이 높을수록 상장폐지율이 낮다는 가설을 제시하였다. 이에 주식시장가격의 로그값을 공변량으로 이용하여 이들의 가설을 검정한다. 이와 함께 주식시장가격/액면가격을 공변량으로 이용한다. 그 의미는 주식시장가격과 같지만 액면가 크기에 따른 차이를 반영하기 위함이다.

관찰시점 주식시장가격의 의미는 조금 더 복잡하다. 이 변수를 제안한 연구는 Conrad and Kaul(1993)이었는데 관찰시점 주식시장가격이 상장폐지율과 관련되어 있으리라고 생각한 것은 아니다. 이들의 관심사는 관찰시점 주식시장가격이 갖는 예측기간 수익률에 대한 예측력이다. 하지만 중요한 것은 주식시장가격이 갖는 의미이다. 이들은 관찰시점 주식시장가격이 과거 오랜 기간 동안의 누적수익을 의미하는 것으로 이해하였다. 즉 앞에서 설명한 직전기간 수익률에 비하면 누적수익을 계산하는 기간이 훨씬 더 길었던 것이다.

이제 주식시장가격이 과거 장기간의 누적수익을 의미한다는 Conrad and Kaul(1993)의 주장과 이 변수가 예측기간 상장폐지율과 상관관계를 갖는다는 Loughran and Ritter(1996)의 주장을 종합하면 이 변수를 공변량으로 이용하는 것의 의미는 다음과 같다. 즉 과거 장기간의 누적수익은 예측기간 상장폐지율과 상관관계를 가질 수 있다. 따라서 이는 비교적 최근의 직전기간 누적수익률이 예측기간 상장폐지율과 상관관계를 가질 수 있다는 가설과는 구분되는 것이다.

따라서 본 연구가 장기과잉반응가설과 관련하여 생각해 볼 수 있는 가설은 두 가지이다. 첫째는 장기간의 누적수익이 예측기간 상장폐지율과 상관관계를 갖는다는 것이다. 둘째는 비교적 최근의 누적수익률이 예측기간 상장폐지율과 상관관계를 갖는다는 것이다. 따라서 후자의 가설이 기각되고 전자의 가설이 채택된다면 이는 생존자편의가 장기적인 관점에서만 발생할 수 있다는 것을 의미한다.

---

[3] 공변량으로 재무비율을 이용하기도 하였다. 예를 들면 파산에 영향을 미친다고 알려진 Altman의 재무비율자료이다. 즉 Altman의 Z점수(Z-score)를 계산할 때 포함되는 5개의 변수, 순운전자본회전율, 유보액/총자산비율, 영업이익/총자산, 시가총액/고정부채, 매출액/총자산 등이다. 하지만 본 연구의 표본기간에는 이 재무비율을 구할 수 없었다. 이 재무비율을 이용하려면 관찰시점은 빨라야 2004년 1월이어야 한다. 관찰시점을 2004년 1월로 하는 경우의 추정 결과에 따르면 의외로 이 재무비율의 추정계수는 유의하지 않은 것으로 나타났다. 반면에 직전기간 누적수익률, 관리종목 가변수, 주식시장가격에 대한 추정결과는 본문에 보고된 것과 차이가 없었다. 어쨌든 관찰시점을 2004년 1월로 하는 경우 표본기간이 48개월로 작은 편이기 때문에 한계가 있다고 판단하였다. 다만 이 경우에도 직전기간 누적수익률, 관리종목 가변수, 주식시장가격의 추정결과는 본문의 결과와 차이가 없었으므로 본 연구의 결과는 이런 의미에서 강건성(robustness)을 갖는다.

3. 연구방법

본 연구는 생존분석모형을 이용하여 주식의 상장폐지율에 영향을 미치는 요인을 검정하고자 한다. 여기에서는 생존분석의 기본 개념을 도입하고 상장폐지율을 추정하는 방법에 대해 설명한다. 이어서 공변량모형의 추정 및 검정방법에 대해 논의한다. 본 연구가 이용하는 방법은 모두 준모수적(semiparametric) 방법으로 경쟁위험이 반영되어 있다.

3.1 생존분석과 경쟁위험

생존분석(survival analysis)은 생존기간(survival time)에 대한 분석이다.[4] 물론 어떤 표본이 T기까지 생존한다는 것은 T기 직후 이 상태가 종료된다는 것을 의미한다. 따라서 생존기간 T는 생존의 종료를 초래하는 어떤 사건(event)이 발생할 때까지 걸리는 기간을 의미하기도 한다. 예를 들어 어떤 주식이 T기까지 상장되었다가 직후에 상장폐지된다고 할 때 T는 상장폐지라는 사건이 발생할 때까지 걸리는 기간이다.

생존기간 T가 (1)식과 같은 누적확률분포(cumulative probability distribution) $F(t)$를 갖는다고 하자. (1)식에서 $f(t)$는 생존기간 T의 확률밀도(probability density)이다.

(1) $$F(t) = \Pr(T \le t) = \int_0^t f(s)ds$$

즉 $F(t)$는 t기간 이전에 사건이 발생할 누적확률을 의미한다. 따라서 (2)식으로 정의되는 생존함수(survival function) $S(t)$는 t기간 이전에 사건이 발생하지 않을 확률이다.

(2) $$S(t) = \Pr(T > t) = 1 - F(t)$$

생존분석에서 중요한 개념은 (3)식의 해저드함수(hazard function)이다. 해저드함수는 t기 이전에 사건이 발생하지 않았음을 조건부로 t기에 사건이 발생할 조건부확률이다.

(3) $$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Pr(t < T \le t + \Delta t \mid T > t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{F(t+\Delta t) - F(t)}{\Delta t\, S(t)} = \frac{f(t)}{S(t)}$$

따라서 확률밀도와 해저드함수, 생존함수는 (4)식의 관계를 갖는다.

(4) $$f(t) = \lambda(t)\, S(t)$$

이제 생존분석에 경쟁위험을 도입한다. 경쟁위험(competing risk)은 발생할 수 있는 사건이 2개 이상인 경우에 나타나게 된다. 예를 들어 어떤 주식이 한국증권선물거래소에서 상장폐

[4] 생존분석을 지속성분석(duration analysis)으로 부르기도 한다. 지속성분석은 어떤 상태가 지속되는 기간에 관한 분석이다.

지되었다고 하자. 상장폐지는 관심사건(event of interest)이다. 하지만 이외에 또 다른 사건도 발생한다. 어떤 기업이 다른 기업에 의해 인수합병되는 사건이다. 인수합병은 관심사건의 발생을 막는다는 의미에서 경쟁사건(competing risk event)이 된다. 이와 같이 두 가지 이상의 사건이 발생할 수 있을 때 관심사건의 발생은 경쟁사건의 발생을 고려하지 않으면 안된다는 것이 경쟁위험모형(competing risk model)의 주장이다. 이하에서 관심사건은 V라 표현하고 경쟁사건은 M으로 표현하기로 한다. 또한 절단사건은 C라 표현하기로 한다.

경쟁위험이 있을 경우 위의 개념은 수정되어야 한다. 우선 (1)식 및 (2)식의 누적확률분포와 생존함수에 해당하는 개념은 아래의 (5)식 및 (6)식으로 재정의된다.

(5) $F_i(t) \;=\; \Pr(T \le t, EV = i)$, where $i = V, M$

(6) $S_i(t) \;=\; \Pr(T > t, EV = i)$, where $i = V, M$

위의 식에서 EV는 사건을 의미한다. 이 때 $F_i(t)$를 하위누적확률분포(subdistribution), $S_i(t)$를 하위생존함수(subsurvival function)라고 부른다. 하위누적확률분포 $F_i(t)$는 t기까지 i사건이 발생할 누적확률이다.[5]

물론 모든 사건의 하위누적확률분포를 더하면 (1)식과 같은 누적확률분포가 된다.

(7) $F(t) \;=\; \sum_{i=V,M} \Pr(T \le t, EV = i) \;=\; \sum_{i=V,M} F_i(t)$, where $i = V, M$

하지만 t가 ∞가 된다고 하더라도 하위누적확률분포는 1에 수렴하지 않는다. 결국 사건 i의 하위누적확률분포는 사건 i가 발생할 확률로 수렴할 수 있을 뿐이다.

(8) $\lim_{t \to \infty} F_i(t) \;=\; \Pr(EV = i)$, where $i = V, M$

따라서 t기의 하위누적확률분포와 하위생존함수를 더하더라도 이 값이 1이 될 수는 없다. 이 값은 (9)식과 같이 사건 i가 발생할 확률일 뿐인데 그 이유는 경쟁위험이 있기 때문이다.

(9) $F_i(t) + S_i(t) \;=\; \Pr(EV = i)$, where $i = V, M$

어려운 것은 경쟁위험이 있을 때 하위해저드함수(subhazard function)를 정의하는 것이다. 하위해저드함수는 (10)식과 같이 하위확률밀도(subdensity)와 생존함수로부터 정의할 수 있다.

---

[5] 특징적인 것은 하위누적확률분포와 하위생존함수가 결합확률(joint probability)로 표현되고 있다는 점이다. 이는 T와 EV가 이변량분포(bivariate distribution)을 한다는 뜻이다. 생존분석에는 이와 같은 접근법 이외에 잠재변수접근법(latent variable approach)이 있지만 이 방법은 식별(identification)의 문제를 갖고 있는 것으로 알려져 있다[Han and Hausman(1990, pp.6~11)].

(10) $\lambda_i(t) = \dfrac{f_i(t)}{S(t)}$, where $i = V, M$

(10)식에서 $f_i(t)$는 하위확률밀도를 의미하며 이는 (5)식의 하위누적확률분포에 대한 확률밀도이다.

(10)식에서 주의할 것은 하위해저드함수를 구하기 위해 $f_i(t)$를 $S_i(t)$가 아니라 $S(t)$로 나누어야 한다는 점이다. 이것이 경쟁위험모형의 특징인데 그 이유는 다음과 같다. 예를 들어 $f_V(t)$를 $S_V(t)$로 나눈다면 이는 t기까지 관심사건 V가 발생하지 않았음을 조건부로 t기에 사건 V가 발생할 확률을 계산하는 것이다. 하지만 이 경우 관심사건 V의 발생확률은 과대하게 계산된다. 왜냐하면 경쟁사건 M이 발생하거나 발생하지 않았을 가능성도 고려해야 때문이다. 따라서 관심사건 V의 발생확률에 초점을 맞춘다면 하위해저드함수는 t기까지 어떠한 사건도 발생하지 않았음을 조건부로 관심사건 V가 발생할 확률이 되도록 정의하는 것이 타당하다.

(10)식과 같이 하위해저드함수를 정의한다면 $\lambda_V(t)$는 t기까지 관심사건 V뿐만 아니라 경쟁사건 M도 발생하지 않았음을 조건부로 t기에 사건 V가 발생할 확률을 의미한다. 따라서 하위확률밀도, 하위해저드함수 그리고 생존함수의 관계를 정리하면 (11)식과 같다.

(11) $f_i(t) = \lambda_i(t)\ S(t)$, where $i = V, M$

본 연구는 하위누적확률분포를 상장폐지율로 정의한다. 물론 연구목적에 따라 하위해저드함수를 상장폐지율로 해석할 수도 있다. 하지만 본 연구는 최근까지 연구된 생존분석문헌에 따라 하위누적확률분포가 상장폐지율로 적절하다고 판단하였다. 물론 여기에는 방법론적인 고려가 있었다. 경쟁위험이 있는 경우 공변량모형을 준모수적 방법으로 추정 또는 검정하려면 하위누적확률분포를 이용해야 한다.

끝으로 위험집합(risk set)이라는 용어를 정의하기로 한다. 위험집합이란 어떤 시기에 위험에 처해 있는(at risk) 표본, 즉 사건이 발생할 수 있는 표본의 집합을 말한다. (10)식의 하위해저드함수를 정의할 때 위험집합은 t기까지 어떠한 사건도 발생하지 않은 표본의 집합이다. 따라서 하위해저드함수는 t기까지 어떠한 사건도 발생하지 않았음을 조건부로 관심사건이 t기에 발생하는 확률이다. 물론 경쟁위험이 있는 경우 해저드함수는 여러 가지 방식으로 정의할 수 있다. 이들은 위험집합을 어떻게 정의하는가에 따라 다른데 이와 같이 다양한 정의가 제시된 것은 추정 및 검정방법의 발전에 따른 것이다.

생존분석의 실증분석에는 크게 모수적(parametric) 방법과 준모수적(semiparametric) 방법이 이용된다. 모수적 방법은 생존기간 T의 분포함수를 전제하는 것으로 여기에는 다양한 분포함수가 이용되고 있다[Greene(2003, pp.792~795)]. 하지만 생존분석에서는 Kaplan-Meier 이후 준모수적 방법이 많이 이용되어 왔다. 자료의 특성상 생존기간 T의 분포함수를 제약하는 것이 적절하지 않기 때문이다. 따라서 본 연구는 준모수적 방법을 이용하기로 하였다.

3.2 하위누적확률분포의 추정방법

본 연구는 2001년 1월 상장된 기업주식의 상장폐지율을 추정한다. 그리고 상장폐지율은 하위누적확률분포로 정의한다. 상장폐지율을 구할 때 관심사건은 상장폐지이며 인수합병은 경쟁사건이 된다. 물론 인수합병율을 구한다면 관심사건은 인수합병이며 상장폐지는 경쟁사건이 된다.

이제 경쟁위험이 있을 때 관심사건의 하위누적확률분포의 추정방법에 대해 논의한다. 표본이 이산형 자료(discrete data)이므로 이에 적합한 방법을 이용한다. 물론 추정방법은 비모수적(nonparametric) 방법이다.

경쟁위험이 있을 때 하위누적확률분포를 구하는 방식은 다음과 같다. 즉 $\hat{F}_i(t)$를 사건 i의 하위누적확률분포라고 할 때 이에 대한 추정치는 (12)식과 같다.

$$(12) \qquad \hat{F}_i(t) = \sum_{t_j \le t} \frac{d_{ij}}{n_j} \hat{S}(t_{j-1}), \text{ where } i = V, M$$

여기에서 $\hat{S}(t_{j-1})$는 t_{j-1}까지 아무런 사건도 발생하지 않은 확률, 즉 생존함수에 대한 추정치이다. 그리고 n_j는 t_j기에 위험에 처한(at risk) 표본의 수이고 d_{ij}는 t_j기에 사건 i가 발생한 표본의 수이다.

당연해 보이지만 (12)식에는 경쟁위험이 반영되어 있다. (12)식에서 생존함수에 대한 추정치인 $\hat{S}(t_{j-1})$는 아래의 (13)식과 같이 구한다.

$$(13) \qquad \hat{S}(t_{j-1}) = \prod_{t_j \le t} \frac{n_j - d_j}{n_j}$$

여기에서 d_j는 t_j기에 사건이 발생한 표본의 수이다. 즉 관심사건이 발생하였거나 또는 경쟁사건이 발생하였을 때 이를 모두 포함하는 표본의 수이다.

하지만 전통적인 Kaplan-Meier의 추정치는 $\hat{S}(t_{j-1})$ 대신에 (14)식을 이용한다.

$$(14) \qquad \hat{K}_i(t_{j-1}) = \prod_{t_j \le t} \frac{n_j - d_{ij}}{n_j}$$

여기에서 $\hat{K}_i(t_{j-1})$는 d_{ij}, 즉 t_j기에 사건 i가 발생한 표본의 수만을 이용한다. 이는 경쟁사건이 발생한 경우를 무시한다는 뜻이다. 문제는 (12)식에서 $\hat{S}(t_{j-1})$ 대신 $\hat{K}_i(t_{j-1})$을 이용하여 구한 $\hat{F}_i(t)$는 1보다 커질 수도 있다는 점이다. 즉 $\hat{F}_i(t)$는 확률로서의 의미를 갖지 못하므로 경쟁위험이 있는 경우 하위누적확률분포는 (12)식의 방식에 따라 구해야 한다.

3.3 로그순위검정 및 Gray검정 방법

이미 언급한 바와 같이 상장폐지율은 경쟁위험이 있을 때 관심사건인 상장폐지의 하위누적확률분포로 정의한다. 문제는 하위누적확률분포를 설명하는 변수가 있는가하는 것이다. 생존분석에서는 이 변수를 공변량(covariate)이라고 부른다. 즉 공변량모형이란 공변량이 포함된 생존분석모형이다.

이제 초점은 공변량이 하위누적확률분포에 미치는 영향이다. 이를 검정하기 위하여 본 연구는 크게 두 가지 방법을 이용하였다. 첫째 공변량에 의해 표본을 구분하고 부분집단을 만든 후 각 부분집단의 하위누적확률분포가 표본 전체의 하위누적확률분포와 같은 것인가를 검정한다. 둘째 비례해저드모형을 이용하여 공변량이 하위누적확률분포에 미치는 영향을 검정한다. 여기에서는 첫째 방법에 대해 논의하고 둘째 방법은 다음 절에서 논의한다.

이제 귀무가설은 다음과 같다.

(15) $$H_0 \ : \ F_i^K(t) \ = \ F_i^0(t)$$

여기에서 $F_i^K(t)$ 는 관심사건 i 에 대한 K -표본의 하위누적확률분포이며 $F_i^0(t)$ 는 관심사건 i 에 대한 표본 전체의 하위누적확률분포이다.

본 연구는 이를 위하여 두 가지 방법을 이용하였다. 첫째는 로그순위검정(log rank test)이다. 로그순위검정은 생존분석 이외의 일반적인 경우에도 이용되는 비모수적 방법이지만 경쟁위험을 무시하는 방법이다. 둘째는 Gray(1988)의 *K*-표본검정(*K*-sample test)이다. 이하에서 Gray검정이라고 약칭할 것인데 경쟁위험을 고려하는 방법이다. 따라서 두 가지 방법을 모두 이용면 경쟁위험이 얼마나 중요한 것인가를 판단할 수 있다.

로그순위검정과 Gray검정은 모두 (15)식의 귀무가설을 검정하기 위한 것이다. 하지만 검정통계량을 구하기 위하여 하위누적확률분포를 직접 이용할 수는 없다. 따라서 검정통계량을 구할 수 있도록 각 검정은 해저드함수를 정의하고 이를 이용한다.

로그순위검정은 원인미필적 해저드함수(cause specific hazard function)를 이용한다. 원인 미필적 해저드함수 $h_i(t)$ 는 아래의 (16)식과 같이 정의한다.

(16) $$h_i(t) \ = \ \frac{f_i(t)}{S_i(t)}, \text{ where } i = V, M$$

(16)식에서 $f_i(t)$ 는 하위확률밀도를 의미하며 $S_i(t)$ 는 (6)식에서 정의된 하위생존함수이다. 하지만 이 개념은 경쟁사건의 발생을 무시한다. 이는 (10)식 및 (12)식을 설명할 때 언급했던 것과 같은 이유 때문이다. 결과적으로 (16)식의 해저드함수를 이용하면 $\hat{F}_i(t)$ 는 1보다 커질 수도 있다.

어쨌든 로그순위검정은 원인미필적 해저드함수를 이용하고 이 경우 귀무가설은 (17)식과 같다.

(17) $$H_0 \ : \ h_i^K(t) \ = \ h_i^0(t)$$

여기에서 $h_i^K(t)$ 는 K -표본의 원인미필적 해저드함수이며 $h_i^0(t)$ 는 표본 전체의 원인미필적 해저드함수이다.

로그순위검정은 (18)식의 스코어를 이용하여 검정한다.

$$(18)\qquad U_K = \sum_{t_j}\left(d_i^K(t_j) - n_i^K(t_j)\frac{d_i^K(t_j)+d_i^{K-}(t_j)}{n_i^K(t_j)+n_i^{K-}(t_j)} \right)$$

여기에서 d_i^K 와 d_i^{K-} 은 표본 K 와 이를 제외한 나머지 표본 $K-$ 의 경우 사건 i 의 발생수이다. n_i^K 와 n_i^{K-} 은 표본 K 와 이를 제외한 나머지 표본 $K-$ 의 경우 위험집합에 속한 표본의 수이다. 이제 U_K 의 공분산은 아래의 (19)식과 같다.

$$(19)\qquad Cov(U_K) = \sum_{t_j}\left(\frac{n_i^K(t_j)n_i^{K-}(t_j)\left[\left(n_i^K(t_j)+n_i^{K-}(t_j)\right)-\left(d_i^K(t_j)+d_i^{K-}(t_j)\right)\right]}{\left(n_i^K(t_j)+n_i^{K-}(t_j)\right)^2\left(n_i^K(t_j)+n_i^{K-}(t_j)-1\right)} \right)$$

따라서 로그순위검정의 검정통계량은 아래의 (20)식과 같다.

$$(20)\qquad MH = \frac{U_K^2}{Cov(U_K)}$$

이렇게 구한 검정통계량 MH 는 자유도가 1인 카이제곱분포, 즉 $\chi^2(1)$ 를 한다.

본 연구가 이용한 두번째 방법은 Gray(1988)의 *K*-표본검정(*K*-sample test)이다. Gray검정의 귀무가설 역시 K -표본의 하위누적확률분포와 표본 전체의 하위누적확률분포가 같다는 것이다.

이를 검정하기 위하여 Gray(1988)는 하위누적확률분포 해저드(hazard of subdistribution)함수를 비교하였다. 하위누적확률분포 해저드함수 $\gamma_i(t)$ 는 (21)식과 같이 정의된다.

$$(21)\qquad \gamma_i(t) = \frac{f_i(t)}{1-F_i(t)}, \text{ where } i = V, M$$

하위누적확률분포 해저드함수는 (10)식의 하위해저드함수와 구분되는 개념이다. 하위해저드함수 λ_i 는 하위확률밀도 $f_i(t)$ 를 생존함수 $S(t)$ 로 나누었지만 하위누적확률분포 해저드함수 γ_i 는 $1-F_i(t)$ 로 나눈 것이다. 따라서 하위누적확률분포 해저드를 정의할 때 위험집합은 직전까지 아무런 사건이 발생하지 않았거나 또는 경쟁사건만이 발생한 표본이다.[6]

---

[6] 주의할 것은 (9)식이 의미하는 바와 같이 $1-F_i(t) \neq S_i(t)$ 라는 점이다. 즉 γ_i 도 역시 경쟁위험을 고려한 개념이다. λ_i 와 γ_i 의 차이는 위험집합의 차이에서 비롯된 것일 뿐이며 공변

로그순위검정과 Gray검정의 목표는 모두 공변량이 하위누적확률분포에 미치는 영향을 분석하는 것이다. 하지만 로그순위검정이 원인미필적 해저드함수를 이용한 것과 달리 Gray검정은 하위누적확률분포 해저드함수를 이용한다. 그 이유는 두 가지이다. 첫째 로그순위검정은 경쟁위험을 무시한다. 따라서 결과적으로 구한 누적확률분포의 극한값은 1보다 커지게 된다. 즉 $\lim_{t\to\infty} F(t) > 1$이 된다. 이는 원인미필적 해저드함수가 확률로서의 의미를 갖지 못함을 의미한다. 둘째 더 중요한 이유는 Gray(1988), Pepe(1991)가 지적한 바와 같이 경쟁위험이 있는 경우 원인미필적 해저드함수를 이용하여 얻은 추론결과가 하위누적확률분포에 대한 해석과 다를 수 있기 때문이다. 따라서 준모수적 방법에 의한 공변량모형의 분석은 하위누적확률분포 해저드함수를 이용해야 한다는 것이 이들의 공헌이다. 즉 하위누적확률분포 해저드함수란 경쟁위험이 있을 때 공변량모형을 검정하기 위하여 고안된 개념이다.

이제 Gray검정의 귀무가설은 (22)식과 같다.

(22) $$H_0 \ : \ \gamma_i^K(t) \ = \ \gamma_i^0(t)$$

여기에서 $\gamma_i^K(t)$는 관심사건 i에 대한 K-표본의 하위누적확률분포 해저드함수이며 $\gamma_i^0(t)$는 관심사건 i에 대한 표본 전체의 하위누적확률분포 해저드함수이다.

Gray검정에서 검정통계량은 (23)식의 스코어를 이용한다.

(23a) $$Z_K \ = \ \sum_{t_j} R_i^K(t_j)\left(\frac{d_i^K(t_j)}{R_i^K(t_j)} - \frac{d_i^K(t_j) + d_i^{K-}(t_j)}{R_i^K(t_j) + R_i^{K-}(t_j)}\right)$$

(23b) $$R_i^k(t_j) \ = \ n_i^k(t_j)\frac{1-\hat{F}_i^k(t_{j-1})}{\hat{S}_i^k(t_{j-1})}, \text{ where } k = K, K\text{-}$$

여기에서 모든 변수는 (18)식에서 정의된 것과 같다. 다만 R_i^K와 R_i^{K-}가 포함되었다는 점에서 차이가 있다. 물론 R_i^K와 R_i^{K-}는 K-표본과 표본 전체에 대해 정의된 것이다.

결국 Gray검정이란 경쟁위험이 있을 때 로그순위검정이 (23)식과 같이 확장되어야 한다는 것이다. R_i^K는 Gray(1988)가 제안한 가중치함수(weighting function)이다. (23b)식을 보면 가중치 R_i^K는 $\hat{S}_i^K$, $\hat{F}_i^K$, n_i^K에 의해 결정된다. 각각은 표본 K의 경우 사건 i의 하위생존함수, 하위누적확률분포, 그리고 위험집합에 속한 표본의 수이다.

따라서 Gray검정의 검정통계량 K는 (24)식과 같다.

(24) $$K \ = \ \frac{Z_K^2}{Cov(Z_K)}$$

여기에서 K는 자유도가 1인 카이제곱분포, 즉 $\chi^2(1)$를 한다. 스코어 Z_K의 공분산은 꽤 복

량효과를 분석하는 경우 λ_i와 γ_i를 이용한 추론은 동일하다. 하지만 원인미필적 해저드함수를 이용하여 얻은 추론은 다를 수 있다[Gray(1988)].

잡한데 이하의 부록에서 제시하기로 한다.

이하 실증분석에서 K-표본은 공변량에 따라 구성하였다. 예를 들어 직전기간 수익률에 따른 차이를 검정할 경우 K-표본은 직전기간 누적수익률이 하위 10%인 주식으로 이루어진 부분집단이다. 따라서 이 경우 검정은 직전기간 누적수익률이 하위 10%인 부분집단의 하위누적확률분포가 표본 전체의 하위누적확률분포와 같은 것인가를 검정하는 것이다.

3.4 비례해저드모형의 추정방법

다음으로 비례해저드모형(proportional hazard model)에 대해 논의한다. 이 모형의 목표도 공변량이 하위누적확률분포에 미치는 영향을 분석하는 것이다. D.R.Cox 이래 광범위하게 이용되는 방법인데 회귀분석모형과 비슷하게 해석할 수 있으며 공변량은 회귀분석모형에서 설명변수에 해당되는 것이다.

여기에도 역시 두 가지 방법을 이용하였다. 첫째는 경쟁위험을 무시하는 방법이고 둘째는 경쟁위험을 고려하는 방법이다. 즉 첫째 방법은 Cox의 비례해저드모형이며 둘째 방법은 경쟁위험을 고려한 Fine and Gray(1999)의 방법이다. Gray검정과 로그순위검정의 관계와 마찬가지로 Fine and Gray(1999)모형은 경쟁위험을 고려하기 위하여 Cox모형을 확장한 것이다.

우선 Cox의 비례해저드모형에 관해 논의한다. 공변량 x를 모형에 도입하면 원인미필적 해저드함수는 (25)식과 같이 된다. 물론 공변량 x는 직전기간 누적수익률과 관리종목 가변수, 주식시장가격, 주식시장가격/액면가격을 포함하는 4차원 벡터이다.

$$(25) \quad h_i = h_0 \exp(x_i \beta_i)$$

(25)식은 전형적인 비례해저드모형이다. 즉 해저드함수가 공변량에 의존하지 않는 항 h_0과 의존하는 항 $\exp(x_i \beta_i)$의 곱으로 이루어져 있다. 이 때 h_0는 기본선(baseline) 해저드라고 부르는데 공변량의 값이 모두 0일 때의 해저드를 의미한다.

Cox모형은 부분우도방법(partial likelihood method)을 이용하여 추정한다. 그리고 부분우도방법의 가장 중요한 특징은 기본선 해저드를 추정하지 않아도 된다는 점이다. 즉 부분우도방법에 따르면 우도함수는 아래의 (26)식과 같은 형태를 갖는다. 이 식에는 기본선 해저드 h_0가 포함되어 있지 않는데 우도함수가 비율로 표현되므로 h_0가 사라지게 된다.[7]

$$(26) \quad L = \prod_{v \in V} \frac{\exp(x_v \beta_v)}{\sum_{u \in R} \exp(x_u \beta_u)}$$

---

[7] 부분우도추정법에 관한 기본 개념은 Amemiya(1985, pp.449~455)를 참조할 수 있다. 그에 따르면 본래의 우도함수는 $L = L_1 \, L_2$과 같이 분해될 수 있으며 (26)식의 부분우도함수는 이 중 L_1에 해당된다. 이 방법이 적절한 것은 부분우도함수를 극대화하는 것만으로도 일치추정치(consistent estimate)를 얻을 수 있기 때문이며 추정치는 점근적으로(asymptotically) 정규분포에 근사한다.

여기에서 v은 관심사건이 발생한 표본이며 u은 관심사건이 발생하지 않은 표본이다. 주의할 것은 경쟁위험을 무시하고 있으므로 u가 속한 위험집합 R은 t기까지 관심사건이 발생하지 않은 표본으로만 이루어져 있다.

Fine and Gray모형은 경쟁위험이 있는 경우 Cox모형을 확장한 것이다. 이들은 (21)식에서 정의한 바 있는 하위누적확률분포 해저드함수를 이용하였다.

이제 공변량 x를 모형에 도입하면 하위누적확률분포 해저드함수는 (27)식과 같이 된다.

(27) $\gamma_i \ = \ \gamma_0 \ \exp(x_i \beta_i)$

(27)식도 전형적인 비례해저드모형의 형태를 갖고 있다. 즉 해저드함수가 공변량에 의존하지 않는 항 γ_0과 의존하는 항 $\exp(x_i \beta_i)$의 곱으로 이루어져 있다. γ_0는 기본선 해저드이며 공변량의 값이 모두 0일 때의 해저드를 의미한다.

Fine and Gray(1999)도 역시 부분우도방법을 이용하였다. 하지만 우도함수는 아래의 (28)식과 같은 형태를 갖는다. 물론 이 식에도 기본선 해저드 γ_0는 포함되어 있지 않다.

(28) $L \ = \ \prod_{v \in V} \dfrac{\exp(x_v \beta_v)}{\sum_{u \in R} w_{uv} \exp(x_u \beta_u)}$

여기에서 v은 관심사건이 발생한 표본이며 u은 위험집합에 속한 표본이다. 주의할 것은 위험집합 R이 t기까지 관심사건이 발생하지 않았거나 또는 경쟁사건만이 발생한 표본으로 이루어져 있다는 점이다.

Cox모형과 비교할 때 가중치 w_{uv}가 포함되어 있다는 점에서 차이가 있으며 이것이 경쟁위험을 반영한다. 즉 경쟁위험을 반영하지 않는 경우 w_{uv}는 1이 된다. Fine and Gray(1999)는 가중치 w_{uv}로 (29)식과 같은 방법을 제안하였다.

(29) $w_{uv} \ = \ \dfrac{\hat{G}[t_v]}{\hat{G}[\min(t_v, t_u)]}$

여기에서 $\hat{G}[.]$는 (2)식에 해당되는 생존함수에 대한 Kaplan-Meier 추정치이다. (29)식에 따르면 w_{uv}는 1보다 클 수 없다. 즉 t_v가 t_u보다 같거나 작을 때 1이고 t_v가 t_u보다 클 때 1보다 작다.[8] 따라서 관심사건 v보다 경쟁사건 u가 더 빨리 발생할수록 가중치는 더 작아짐을 알 수 있다.

이제 최우추정법을 이용하여 공변량의 계수 β를 추정하면 된다. 공변량의 계수 β의 추정결과로부터 공변량이 하위누적확률분포에 대하여 미치는 효과를 검정할 수 있게 된다. 물론 Cox모형과 Fine and Gray모형을 이용하면 경쟁위험이 얼마나 중요한 것인가를 알 수 있을 것이다.

---

[8] t_v이 t_u보다 클 때 분모는 $\hat{G}[t_u]$가 된다. 그런데 $\hat{G}[.]$가 생존함수이므로 $\hat{G}[t_u]$은 $\hat{G}[t_v]$보다 크다. 따라서 w_{uv}은 1보다 작다.

4. 실증분석결과

가장 먼저 상장폐지율에 해당되는 하위누적확률분포의 추정결과를 제시한다. 이어서 로그순위검정과 Gray검정을 이용하여 각 공변량과 상장폐지율의 이변량 상관관계를 검정한다. 다음으로 비례해저드모형을 추정하여 공변량 전체와 상장폐지율의 다변량 상관관계를 검정한다.

4.1 하위누적확률분포 추정결과

경쟁위험이 있는 경우 상장폐지율은 관심사건을 상장폐지, 경쟁사건을 인수합병이라고 할 때 관심사건의 하위누적확률분포로 정의한 바 있다. 물론 비슷한 방식으로 인수합병율은 경쟁사건의 하위누적확률분포로 정의한다.

(12)식의 방법에 따라 추정한 하위누적확률분포는 <그림1>에 제시되어 있다. 관찰시점이 2001년 1월이므로 그림의 가로축은 이후의 기간을 의미한다. 즉 가로축의 가장 끝인 72개월 후는 2007년 12월이다. 한편 세로축은 하위누적확률분포를 나타내며 그림에는 상장폐지와 인수합병의 하위누적확률분포를 모두 제시하였다. 그림에서 상장폐지는 Delisting으로, 인수합병은 Merged로 표시되어 있다.

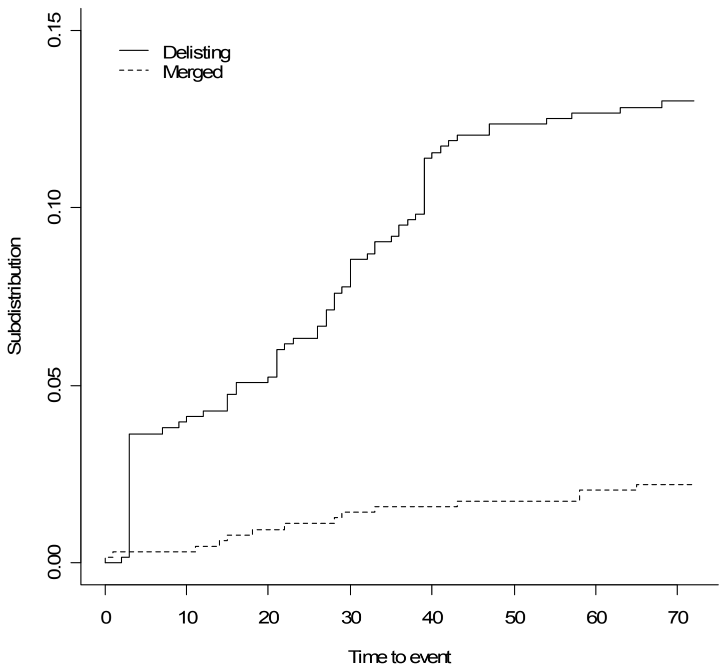
<그림1>의 하위누적확률분포는 누적된 확률이므로 기간에 따라 증가하는 형태를 갖는다. 또한 비모수적 추정치이므로 특정의 함수형태를 갖지 않는다는 것도 알 수 있다.

상장폐지의 하위누적확률분포는 20개월 후 5.23%, 40개월 후 11.57%, 60개월 후 12.68%에 이르는 것으로 나타났다. 표본기간이 최장 72개월이므로 가장 끝인 72개월 후에는 12.99%에 이르는 것으로 나타났다. 72개월을 무한대로 간주한다면 (8)식의 $\Pr(EV = i)$ 가 12.99%라는 뜻이다. 한편 인수합병의 하위누적확률분포는 20개월 후 0.95%, 40개월 후 1.58%, 60개월 후 2.06%, 끝으로 72개월 후에는 2.21%에 이르는 것으로 나타났다.

이미 언급한 바와 같이 경쟁위험이 있을 때 하위누적확률분포는 확률로서의 의미를 갖는다. 즉 60개월 후 상장폐지의 하위누적확률분포 12.68%는 표본 주식의 12.68%가 60개월 후 상장폐지된다는 뜻이다. 또한 60개월 후 인수합병의 하위누적확률분포 2.06%는 표본 주식의 2.06%가 60개월 후 인수합병된다는 뜻이다. 게다가 하위누적확률분포는 확률로서의 의미를 갖기 때문에 두 사건의 비교도 가능하다. 즉 60개월 후를 기준으로 할 때 상장폐지는 인수합병에 비해 6.2배(=12.68%/2.06%) 더 많이 발생함을 할 수 있다.

물론 상장폐지 또는 인수합병 등 어떤 사건이라도 발생하는 누적확률분포를 구할 수도 있다. 즉 (7)식에서와 같이 각 기간에 대해 상장폐지와 인수합병의 하위누적확률분포를 더하면 사건(관심사건+경쟁사건)이 발생하는 누적확률분포가 된다. 따라서 두 사건 중 하나라도 발생하는 확률은 20개월 후 6.18%, 40개월 후 13.15%, 60개월 후 14.74%, 72개월 후 15.2%가 된다. 즉 72개월 후에는 상장폐지 또는 인수합병이 발생할 확률이 15.2%가 된다는 뜻이다. 따라서 아무런 사건이 발생하지 않고 생존할 확률, 즉 (2)식의 생존함수는 84.8%가 된다.

< 그림 1 > 상장폐지와 인수합병의 하위누적확률분포



4.2 로그순위검정 및 Gray검정 결과

공변량에 따른 하위누적확률분포의 차이에 대한 검정결과는 <표3>~<표7>에 제시되어 있다. <표3>은 공변량인 관리종목 가변수에 검정결과이다. 또한 <표4>와 <표5>는 공변량인 직전기간 누적수익률에 대한 검정결과이며 <표6>과 <표7>은 공변량인 관찰시점 주식시장가격과 주식시장가격/액면가격에 대한 검정결과이다. 각 공변량에 대해 경쟁위험을 고려하지 않는 로그순위검정과 경쟁위험을 고려한 Gray검정의 결과를 모두 제시하였다.

첫째 관리종목여부에 따른 차이는 명확하다. <표3>에 따르면 로그순위검정통계량과 Gray검정통계량의 값이 각각 75.05와 58.13나 되어 모두 1% 유의수준에서 유의한 것으로 나타났다. 경쟁위험의 고려에 상관없이 관리종목주식의 상장폐지율이 더 높았다는 것을 의미한다.

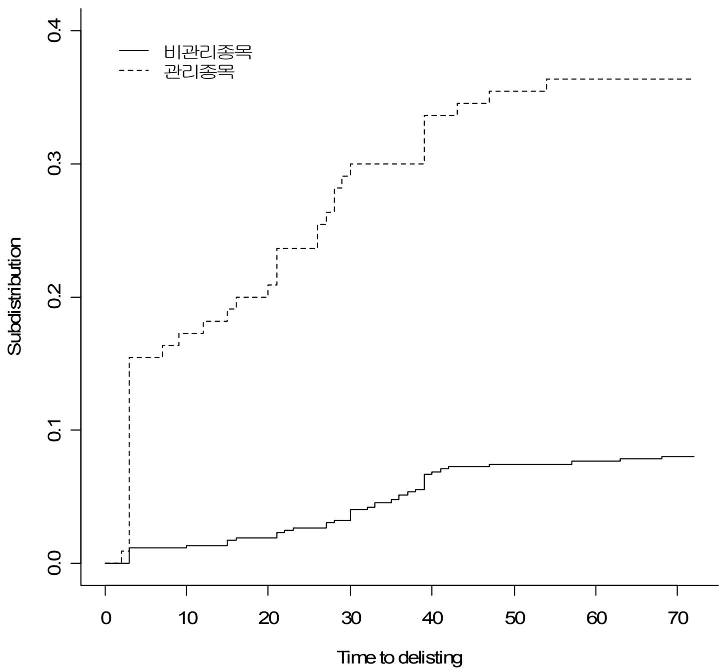
<그림2>에는 관리종목집단과 비관리종목집단의 하위누적확률분포가 그려져 있다. 이는 하위누적확률분포를 구하는 (12)식을 이용하여 얻은 것이다. 명확하게 드러나고 있지만 관리종목집단의 하위누적확률분포는 비관리종목의 것보다 훨씬 더 크다. 관리종목집단의 경우 20개월 후 20.9%, 40개월 후 33.6%, 60개월 후 36.4%나 된다. 하지만 비관리종목집단의 경우 20개월 후 1.9%, 40개월 후 6.9%, 60개월 후 7.7%이다. 60개월 후를 기준으로 하면 관리종목집단의 하위누적확률분포는 비관리종목집단에 비해 4.7배나 더 크다. 그만큼 상장폐지율이 높다는 뜻이다. 즉 관리종목주식의 경우 60개월 지나면 40% 가까운 주식이 상장폐지된다.

< 표 3 > 관리종목여부에 대한 검정결과

집단	검정통계량
로그순위검정	75.05 (0.00)
Gray검정	58.13 (0.00)

주1) 귀무가설은 ‘관리종목에 속한 주식집단의 하위누적확률분포와 표본전체의 하위누적확률분포가 같다’임.
주2) 괄호 안은 p값임

< 그림 2 > 관리종목집단과 비관리종목집단의 상장폐지 하위누적확률분포



주) 관리종목집단은 2004년 1월 관리종목이었던 주식으로 이루어진 집단이며 비관리종목집단은 이를 제외한 주식으로 이루어진 집단임

< 표 4 > 직전기간 누적수익률에 대한 로그순위검정결과

집단	관리종목 포함				관리종목 제외			
	r_{06}	r_{12}	r_{24}	r_{36}	r_{06}	r_{12}	r_{24}	r_{36}
1	3.54 (0.06)	0.77 (0.37)	0.00 (0.97)	0.79 (0.37)	1.24 (0.26)	0.01 (0.91)	0.89 (0.34)	0.09 (0.76)
2	0.66 (0.41)	0.61 (0.43)	2.13 (0.14)	0.51 (0.47)	1.08 (0.29)	1.49 (0.22)	0.01 (0.91)	0.03 (0.84)
3	2.49 (0.11)	0.74 (0.38)	5.40 (0.02)	0.83 (0.36)	1.92 (0.16)	0.19 (0.65)	5.66 (0.01)	1.59 (0.20)
4	1.49 (0.22)	0.00 (0.94)	2.42 (0.13)	3.94 (0.04)	0.68 (0.40)	1.85 (0.17)	3.20 (0.07)	0.85 (0.35)
5	0.23 (0.62)	2.53 (0.11)	0.21 (0.64)	0.59 (0.43)	0.50 (0.47)	0.14 (0.70)	0.04 (0.83)	0.04 (0.82)
6	2.54 (0.11)	1.28 (0.25)	0.01 (0.90)	7.40 (0.01)	1.50 (0.21)	2.56 (0.10)	1.86 (0.17)	3.69 (0.05)
7	0.07 (0.78)	0.11 (0.73)	1.34 (0.24)	1.19 (0.27)	0.18 (0.66)	0.08 (0.77)	1.57 (0.20)	2.68 (0.10)
8	0.00 (0.96)	1.89 (0.16)	3.65 (0.06)	0.60 (0.43)	0.64 (0.42)	0.34 (0.55)	3.61 (0.05)	1.03 (0.30)
9	0.94 (0.33)	0.78 (0.37)	0.65 (0.41)	15.85 (0.00)	0.92 (0.33)	0.10 (0.74)	0.43 (0.51)	5.54 (0.01)
10	0.11 (0.73)	7.04 (0.01)	20.24 (0.00)	9.74 (0.00)	0.60 (0.43)	1.46 (0.22)	8.40 (0.00)	2.79 (0.09)

주1) 귀무가설은 수익률 기준으로 집단을 구분하였을 때 ‘각 집단의 하위누적확률분포와 표본전체의 하위누적확률분포가 같다’임. 수익률 r_{06}, r_{12}, r_{24}, r_{36} 은 <표2>에서 정의한 것과 같으며 집단은 수익률의 10분위에 의해 구분한 것임.
주2) 괄호 안은 p값임

둘째 직전기간 누적수익률에 따른 차이는 <표4>와 <표5>에 그 검정결과가 제시되어 있다. 이 중 <표4>는 경쟁위험을 무시한 로그순위검정결과이고 <표5>는 경쟁위험을 고려한 Gray 검정결과이다. 검정방법에 따른 차이가 큰 것은 아닌데 이는 경쟁위험이 그다지 중요하지 않음을 시사한다.

각 검정은 관리종목주식을 포함한 표본과 관리종목주식을 제외한 표본에 대해 수행하였다. 관리종목 여부는 관찰시점에 이미 알려져 있으므로 장기과잉반응가설과 관련하여 관리종목주식을 제외하는 것이 좋을 수 있다.

직전기간 누적수익률은 6개월, 12개월, 24개월, 36개월의 4가지를 이용하였다. 그리고 각 직전기간 누적수익률별로 모두 10개의 집단을 만들었다. 따라서 귀무가설은 각 직전기간 누적수익률별 집단의 하위누적확률분포가 표본전체의 것과 같은 것인가이다. 결과에 큰 차이가 크지 않았으므로 여기에서는 <표5>의 Gray검정결과 중 관리종목을 제외한 경우를 중심으로 요약한다.

< 표 5 > 직전기간 누적수익률에 대한 Gray검정결과

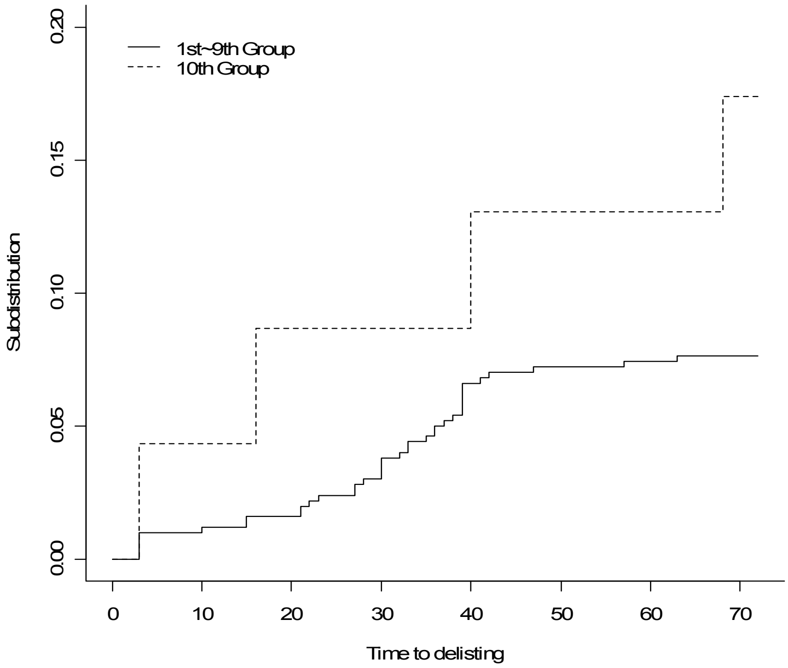
집단	관리종목 포함				관리종목 제외			
	r_{06}	r_{12}	r_{24}	r_{36}	r_{06}	r_{12}	r_{24}	r_{36}
1	3.60 (0.06)	0.78 (0.38)	0.00 (0.98)	0.75 (0.38)	1.30 (0.25)	0.01 (0.91)	0.88 (0.34)	0.07 (0.78)
2	0.65 (0.42)	0.56 (0.45)	2.50 (0.11)	0.61 (0.43)	1.07 (0.30)	1.44 (0.22)	0.05 (0.82)	0.03 (0.84)
3	2.55 (0.11)	0.70 (0.40)	5.55 (0.02)	0.78 (0.37)	1.96 (0.16)	0.17 (0.67)	5.80 (0.01)	1.50 (0.22)
4	1.53 (0.22)	0.00 (0.97)	2.38 (0.12)	4.08 (0.04)	0.68 (0.40)	1.90 (0.16)	3.18 (0.07)	0.86 (0.35)
5	0.20 (0.65)	2.65 (0.11)	0.20 (0.65)	0.56 (0.45)	0.56 (0.45)	0.15 (0.69)	0.04 (0.83)	0.03 (0.85)
6	2.73 (0.09)	1.30 (0.25)	0.01 (0.91)	7.60 (0.00)	1.61 (0.20)	2.63 (0.10)	1.81 (0.17)	3.68 (0.05)
7	0.09 (0.75)	0.13 (0.71)	1.29 (0.25)	1.37 (0.24)	0.21 (0.64)	0.10 (0.74)	1.53 (0.21)	2.94 (0.08)
8	0.00 (0.99)	1.51 (0.22)	3.70 (0.06)	0.65 (0.41)	0.69 (0.40)	0.22 (0.63)	3.72 (0.05)	1.09 (0.29)
9	0.75 (0.38)	0.66 (0.42)	0.61 (0.43)	15.40 (0.00)	1.04 (0.30)	0.15 (0.69)	0.47 (0.49)	5.65 (0.01)
10	0.11 (0.73)	7.05 (0.00)	19.18 (0.00)	9.54 (0.00)	0.58 (0.44)	1.54 (0.21)	8.21 (0.00)	2.80 (0.09)

주1) 귀무가설은 수익률 기준으로 집단을 구분하였을 때 ‘각 집단의 하위누적확률분포와 표본전체의 하위누적확률분포가 같다’임. 수익률 r_{06}, r_{12}, r_{24}, r_{36} 은 <표2>에서 정의한 것과 같으며 집단은 수익률의 10분위에 의해 구분한 것임.
주2) 괄호 안은 p값임

<표5>에서 관리종목주식을 제외한 Gray검정결과를 보면 귀무가설을 기각하는 경우는 많지 않다. 특히 직전기간 누적수익률이 가장 낮았던 패자포트폴리오에 해당되는 집단1이나 집단2의 경우 귀무가설이 기각되는 경우는 하나도 없었다. 오히려 특이한 것은 36개월 기준의 직전기간 누적수익률을 이용하였을 때 승자포트폴리오에 해당되는 집단9나 집단10의 경우 귀무가설이 기각되었다는 점이다. 귀무가설의 기각은 하위누적확률분포가 다르다는 것을 의미하므로 의외의 결과임에 틀림없다. 승자포트폴리오에 속한 주식들의 예측기간 상장폐지율이 더 높았다는 뜻이기 때문이다.

<그림3>에는 관리종목주식을 제외한 경우 직전기간 누적수익률이 상위 10%이었던 주식으로 이루어진 집단10의 하위누적확률분포와 집단10을 제외한 나머지 표본의 하위누적확률분포를 보여 준다. 물론 하위누적확률분포는 (12)식을 이용하여 얻은 것이다. <표5>의 검정결과를 보여 준 것인데 집단10의 하위누적확률분포가 월등히 더 크다는 것을 확인할 수 있다.

< 그림 3 > 승자포트폴리오의 상장폐지 하위누적확률분포



주) 집단10은 직전기간 누적수익률이 상위 10%였던 주식으로 이루어져 있으며 그림은 집단10의 하위누적확률분포와 집단10을 제외한 나머지 표본의 하위누적확률분포임. 표본 중에 관리종목은 제외하였음.

이 결과는 상장폐지된 주식의 경우 관찰시점 직전 36개월(물론 상장폐지 직전 36개월과는 다르다) 동안 누적수익률이 상당히 높았다는 것을 의미한다. <표4>와 <표5>의 여러 경우에서 비슷한 결과를 얻었다.

흥미로운 것은 직전기간에 따른 차이이다. 즉 집단10의 경우 직전기간이 36개월, 24개월일 때 귀무가설이 기각되었지만 직전기간이 12개월, 6개월일 때에는 귀무가설을 기각할 수 없었다.[9] 이 결과는 상장폐지된 주식의 경우 관찰시점 직전 36개월 또는 24개월 동안 누적수익률이 상당히 높았지만 관찰시점 직전 12개월 또는 6개월 동안에는 누적수익률이 높았다고 보기 어렵다는 것을 의미한다. 즉 상장폐지된 주식의 경우 일정기간 동안 높은 누적수익률을 보이지만 시간이 지나면서 누적수익률의 차이가 해소되는 경향이 있었던 것으로 보인다.

[9] 이 결과의 강건성은 향후 연구에 의해 더 검토되어야 할 것이다. 본 연구는 관찰시점을 2004년 1월로 정한 후 얻은 표본에 대해 동일한 방식의 검정을 수행하였다. 이 경우에도 집단10에 대한 귀무가설은 직전 36개월 수익률을 이용한 경우 기각되었지만 직전 12개월, 직전 6개월 수익률을 이용한 경우 기각할 수 없었다. 다만 관찰시점을 2004년 1월로 정한 경우 표본주식의 생존기간은 최장 48개월이다.

< 표 6 > 주식시장가격 및 주식시장가격/액면가격에 대한 로그순위검정결과

집단	관리종목 포함				관리종목 제외			
	$\ln(p)$		$\ln(p/b)$		$\ln(p)$		$\ln(p/b)$	
1	10.24	(0.00)	45.46	(0.00)	2.06	(0.15)	16.54	(0.00)
2	4.02	(0.04)	0.35	(0.54)	5.96	(0.01)	0.42	(0.51)
3	4.48	(0.03)	0.71	(0.39)	0.03	(0.85)	1.43	(0.23)
4	0.13	(0.70)	0.14	(0.70)	1.24	(0.26)	2.43	(0.11)
5	0.13	(0.71)	0.00	(0.98)	0.06	(0.80)	0.54	(0.45)
6	2.17	(0.13)	0.61	(0.43)	0.02	(0.86)	0.03	(0.84)
7	0.85	(0.35)	1.30	(0.25)	1.94	(0.16)	1.65	(0.19)
8	1.33	(0.24)	3.76	(0.05)	0.02	(0.88)	1.74	(0.18)
9	4.12	(0.04)	3.66	(0.05)	1.01	(0.31)	0.63	(0.42)
10	7.54	(0.00)	7.55	(0.00)	3.57	(0.06)	3.79	(0.00)

주1) 귀무가설은 수익률 기준으로 집단을 구분하였을 때 '각 집단의 하위누적확률분포와 표본전체의 하위누적확률분포가 같다'임. 수익률 r_{06} , r_{12} , r_{24} , r_{36} 은 <표2>에서 정의한 것과 같으며 집단은 수익률의 10분위에 의해 구분한 것임.

주2) 괄호 안은 p값임

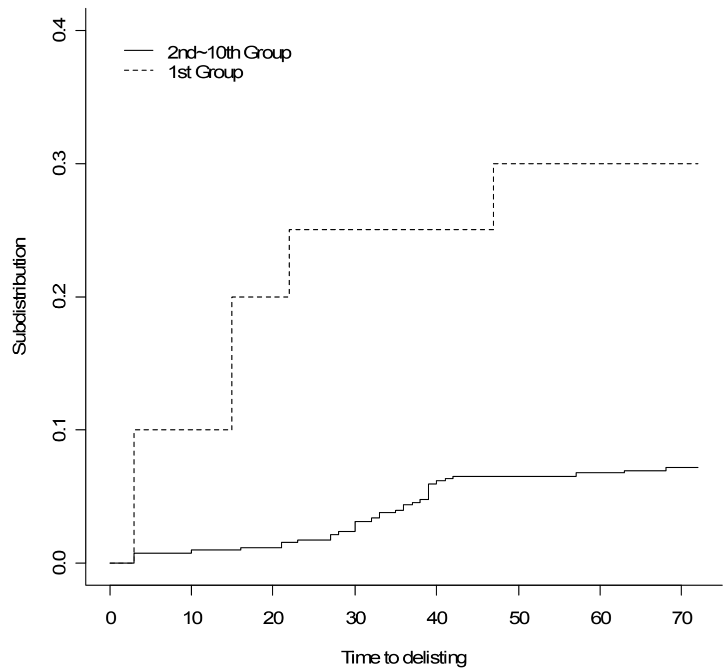
< 표 7 > 주식시장가격 및 주식시장가격/액면가격에 대한 Gray검정결과

집단	관리종목 포함				관리종목 제외			
	$\ln(p)$		$\ln(p/b)$		$\ln(p)$		$\ln(p/b)$	
1	10.00	(0.00)	39.65	(0.00)	2.05	(0.15)	14.33	(0.00)
2	4.07	(0.04)	0.36	(0.54)	5.94	(0.01)	0.43	(0.50)
3	4.43	(0.03)	0.70	(0.40)	0.02	(0.88)	1.39	(0.23)
4	0.13	(0.71)	0.17	(0.67)	1.26	(0.26)	2.22	(0.13)
5	0.15	(0.69)	0.00	(0.98)	0.07	(0.78)	0.50	(0.47)
6	2.33	(0.12)	0.62	(0.42)	0.04	(0.83)	0.03	(0.84)
7	0.76	(0.38)	1.26	(0.26)	1.80	(0.17)	1.60	(0.20)
8	1.42	(0.23)	3.99	(0.04)	0.01	(0.90)	1.85	(0.17)
9	4.19	(0.04)	3.71	(0.05)	0.97	(0.32)	0.59	(0.43)
10	7.91	(0.00)	7.74	(0.00)	3.67	(0.06)	3.76	(0.06)

주1) 귀무가설은 수익률 기준으로 집단을 구분하였을 때 '각 집단의 하위누적확률분포와 표본전체의 하위누적확률분포가 같다'임. 수익률 r_{06} , r_{12} , r_{24} , r_{36} 은 <표2>에서 정의한 것과 같으며 집단은 수익률의 10분위에 의해 구분한 것임.

주2) 괄호 안은 p값임

< 그림 4 > 저 ln(p/b) (주식시장가격/액면가격)집단의 상장폐지 하위누적확률분포



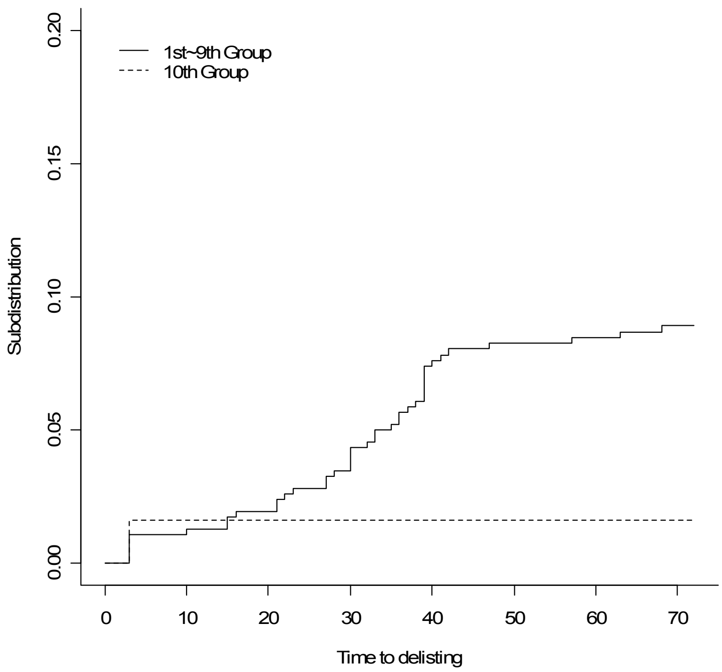
주) 집단1은 (주식시장가격/액면가격)이 하위 10%였던 주식으로 이루어져 있으며 그림은 집단1의 하위누적확률분포와 집단1을 제외한 나머지 표본의 하위누적확률분포임. 표본 중에 관리종목은 제외하였음.

물론 <표4> 및 <표5>의 검정결과는 공변량으로 직전기간 누적수익률만을 이용하여 얻은 이변량(bivariate) 상관관계의 검정결과이다. 따라서 다른 공변량에 대한 통제가 이루어지 않은 셈이다. 이하에서 살펴 보겠지만 관찰시점 주식시장가격도 공변량으로서 하위누적확률분포에 영향을 미쳤던 것으로 보인다. 따라서 여러 공변량을 이용해야 할 필요성이 있는데 이로 인해 이하의 비례해저드모형의 추정이 필요한 것이다.

셋째 공변량인 관찰시점 주식시장가격과 주식시장가격/액면가격에 따른 차이의 검정결과를 살펴 보기로 하자. <표6>과 <표7>은 각각 로그순위검정결과와 Gray검정결과이다. 각 검정은 관리종목주식을 포함한 표본과 제외한 표본은 모두 대상으로 하였다. 그리고 주식시장가격은 Loughran and Ritter(1996)와 같이 관찰시점 주식시장가격의 로그값 $\ln(p)$ 를 이용하거나 또는 주식시장가격/액면가격의 로그값 $\ln(p/b)$ 를 이용하였다.

직전기간 누적수익률의 경우와 마찬가지로 10개의 집단은 주식시장가격 및 주식시장가격/액면가격에 따라 10분위 집단을 구한 것이다. 따라서 귀무가설은 각 집단의 하위누적확률분포가 표본전체의 하위누적확률분포와 같은 것인가이다.

< 그림 5 > 고 ln(p/b)(주식시장가격/액면가격)집단의 상장폐지 하위누적확률분포



주) 집단10은 (주식시장가격/액면가격)이 상위 10%였던 주식으로 이루어져 있으며 그림은 집단10의 하위누적확률분포와 집단10을 제외한 나머지 표본의 하위누적확률분포임. 표본 중에 관리종목은 제외하였음.

<표6>과 <표7>의 검정결과는 대체로 비슷한 패턴을 보인다. 주식시장가격 또는 주식시장가격/액면가격이 하위 10%인 집단1의 경우 귀무가설이 기각되는 경우가 많았고 상위 10%인 경우에는 귀무가설이 모두 기각되었다. 이는 집단1과 집단10의 하위누적확률분포가 표본전체의 것과 다르다는 것을 의미한다. 물론 집단1의 경우와 집단10의 경우 방향은 반대이다. 즉 집단1의 경우 하위누적확률분포는 표본전체의 것보다 크지만 집단10의 경우 하위누적확률분포는 표본전체의 것보다 작다. 이는 <그림4>와 <그림5>를 보면 확인할 수 있다.

정리하면 주식시장가격 또는 주식시장가격/액면가격과 상장폐지 하위누적확률분포는 (-)의 상관관계를 갖는 것으로 판단된다. 이는 주식시장가격(또는 주식시장가격/액면가격)과 상장폐지율간의 (-)의 상관관계를 의미하는 것이다. 즉 주식시장가격(또는 주식시장가격/액면가격)이 높을수록 상장폐지의 가능성이 낮으며 주식시장가격(또는 주식시장가격/액면가격)이 낮을수록 상장폐지의 가능성이 높다는 것을 시사한다. 이 결과는 Loughran and Ritter(1996)이 제시한 가설을 지지하는 것이다. 이 결과에 대한 해석은 이하 비례해저드모형의 추정결과를 요약하면서 제시하기로 한다.

4.3 비례해저드모형의 추정 결과

본 연구는 공변량으로 관리종목 가변수, 직전기간 누적수익률, 관찰시점 주식시장가격, 관찰시점 주식시장가격/액면가격을 이용한다. 앞에서 수행한 검정은 상장폐지율과 개별 공변량의 이변량(bivariate) 상관관계에 대한 분석에 해당된다. 여기에서는 비례해저드모형을 이용하여 상장폐지율에 대한 공변량들의 다변량(multivariate) 상관관계를 분석한다.

비례해저드모형으로는 경쟁위험을 무시한 Cox모형과 이를 고려한 Fine and Gray모형을 이용한다. 두 모형에 대한 추정결과는 <표8>과 <표9>에 각각 제시되어 있다. 결과에서 모형1은 공변량으로 관리종목 가변수, 직전기간 누적수익률, 관찰시점 주식시장가격을 이용한 것이고 모형2는 관찰시점 주식시장가격/액면가격을 추가한 것이다.

Cox모형과 Fine and Gray모형의 추정결과에 큰 차이가 없었으므로 여기에서는 <표9>의 결과를 중심으로 결과를 요약한다. 우선 Cox모형과 Fine and Gray모형의 추정결과가 크게 다르지 않았다는 것은 경쟁위험이 그다지 중요하지 않다는 것을 의미한다.

<표9>의 결과에 따르면 관리종목 가변수의 추정계수는 모든 경우에 유의한 (+)의 값을 갖는 것으로 나타났다. 관리종목주식일 경우 상장폐지의 하위누적확률분포가 크다는 것을 의미한다. 즉 관리종목주식일 경우 예측기간 동안의 상장폐지율은 더 높은 편이었다. 한편 직전기간 누적수익률은 모든 경우에 유의하지 않았다. 상장폐지의 하위누적확률분포와 직전기간 누적수익률이 상관관계를 갖지 않는다는 것을 의미한다. 즉 직전기간 누적수익률에 의해 패자로 분류된 주식과 승자로 분류된 주식의 예측기간 상장폐지율은 다르다고 보기 어렵다.

모형1의 추정결과에 따르면 관찰시점 주식시장가격 $\ln(p)$ 의 추정계수는 유의한 (-)의 값을 갖는 것으로 나타났다. 이는 관찰시점 주식시장가격이 높을수록 상장폐지의 하위누적확률분포가 낮다는 것으로 의미한다. 하지만 관찰시점 주식시장가격/액면가격 $\ln(p/b)$ 를 공변량으로 추가한 모형2의 추정결과에 따르면 관찰시점 주식시장가격 $\ln(p)$ 의 추정계수는 유의하지 않았다. 대신에 관찰시점 주식시장가격/액면가격 $\ln(p/b)$ 의 추정계수가 유의한 (-)의 값을 갖는 것으로 나타났다. 이것 역시 관찰시점 주식시장가격/액면가격이 높을수록 상장폐지의 하위누적확률분포가 낮다는 것을 의미한다. 즉 관찰시점 주식시장가격/액면가격이 높을수록 예측기간 동안 상장폐지율은 더 낮은 편이었다.

요약하면 예측기간 상장폐지율은 관리종목일 때 크고 관찰시점 주식시장가격 또는 관찰시점 주식시장가격/액면가격이 클수록 작았던 것으로 보인다. 반면에 예측기간 상장폐지율은 직전기간 누적수익률과 상관관계를 갖는다고 보기 어렵다. 비례해저드모형의 추정결과는 앞의 로그순위검정 및 Gray검정의 결과와 일치하는 것으로 보인다.

이 결과 중 직전기간 누적수익률이 상장폐지율과 상관관계를 갖지 않는다는 것은 장기과잉반응가설의 검정과 관련하여 중요한 의미를 갖는다. 장기과잉반응가설의 검정은 다음과 같이 수행한다. 가장 먼저 직전기간 누적수익률을 기준으로 표본주식의 10분위를 구한다. 이를 이용하여 10개의 포트폴리오를 구성할 수 있는데 이 중 가장 수익률이 낮았던 포트폴리오가 패자포트폴리오가 된다. 따라서 귀무가설은 패자포트폴리오의 예측기간 수익률이 다른 포트폴리오의 예측기간 수익률과 같았는가이다. 만약 귀무가설이 기각된다면 패자포트폴리오의 예측기간 수익률은 높은 편이었다는 뜻이므로 장기과잉반응이 있었다고 해석한다.

<표 8> Cox의 비례해저드모형 추정결과

공변량	모형1				모형2			
관리종목	1.422 (0.00)	1.421 (0.00)	1.377 (0.00)	1.375 (0.00)	1.087 (0.00)	1.096 (0.00)	1.065 (0.00)	1.048 (0.00)
$\ln(p)$	−0.192 (0.01)	−0.181 (0.03)	−0.169 (0.03)	−0.172 (0.03)	0.076 (0.48)	0.075 (0.49)	0.099 (0.37)	0.098 (0.37)
$\ln(p/b)$					−0.630 (0.00)	−0.617 (0.00)	−0.592 (0.00)	−0.599 (0.00)
r_{06}	−0.002 (0.49)				−0.004 (0.21)			
r_{12}		0.000 (0.93)				−0.003 (0.53)		
r_{24}			0.007 (0.25)				0.007 (0.32)	
r_{36}				0.007 (0.42)				0.008 (0.40)

주) 괄호 안은 p값(p-value)임

<표 9> Fine and Gray의 비례해저드모형 추정결과

공변량	모형1				모형2			
관리종목	1.407 (0.00)	1.406 (0.00)	1.361 (0.00)	1.358 (0.00)	1.077 (0.00)	1.086 (0.00)	1.053 (0.00)	1.034 (0.00)
$\ln(p)$	−0.196 (0.01)	−0.184 (0.02)	−0.172 (0.02)	−0.175 (0.02)	0.061 (0.57)	0.061 (0.57)	0.086 (0.43)	0.086 (0.43)
$\ln(p/b)$					−0.602 (0.00)	−0.589 (0.00)	−0.568 (0.00)	−0.576 (0.00)
r_{06}	−0.002 (0.49)				−0.004 (0.26)			
r_{12}		0.000 (0.92)				−0.002 (0.60)		
r_{24}			0.007 (0.18)				0.007 (0.39)	
r_{36}				0.007 (0.41)				0.008 (0.45)

주) 괄호 안은 p값(p-value)임

문제는 이와 같은 검정결과가 생존자편의를 가질 수 있다는 점이다. 그 이유는 일반적인 연구방법이 이용하는 표본이 직전기간뿐만 아니라 예측기간 동안에도 생존한 주식만을 포함하고 있기 때문이다. 하지만 예측기간에도 생존한 주식으로 이루어진 패자포트폴리오는 진정한 의미에서의 패자포트폴리오가 될 수 없다. 관찰시점에 상장폐지를 예측할 수 없는 한 그러하다. 따라서 올바른 연구방법은 관찰시점에 생존한 주식들을 모두 표본으로 이용해야 한다. 물론 이 주식들 중에는 예측기간 동안 상장폐지되는 것도 있을 것이다.

생존자편의가 중요한 경우는 이렇게 만들어진 패자포트폴리오에 예측기간 동안 상장폐지될 주식이 많이 포함될 때이다. 그런 경우에는 예측기간에 생존한 주식만을 포함하는 연구와 관찰시점에 생존한 주식을 모두 포함하는 연구의 패자포트폴리오는 크게 달라진다. 따라서 생존자편의가 중요한가는 예측기간 동안 상장폐지되는 주식이 관찰시점의 직전기간 누적수익률과 상관관계를 갖는가에 달려 있다.

그런데 본 연구의 결과에 따르면 관찰시점의 직전기간 누적수익률과 예측기간 상장폐지율간에 상관관계가 있었다고 보기 어려웠다. 이는 직전기간 누적수익률을 이용하는 장기과잉반응가설검정에서 생존자편의가 중요하지 않을 수 있다는 점을 시사한다. 적어도 직전기간 누적수익률에 따라 관찰시점에 구성된 패자포트폴리오의 경우 예측기간의 상장폐지 가능성이 높은 주식이 더 많이 포함되었다고 볼 수는 없기 때문이다.

중요한 것은 관찰시점 주식시장가격에 대한 해석이다. 관찰시점 주식시장가격 또는 관찰시점 주식시장가격/액면가격이 클수록 상장폐지율이 낮았던 것은 Loughran and Ritter(1996)의 가설을 지지하는 것이다.[10] 그런데 이 결과의 의미는 조금 더 복잡하다. Conrad and Kaul(1993)에 따르면 관찰시점 주식시장가격은 과거 장기간의 누적수익을 의미하는 것이기 때문이다. 따라서 관찰시점 주식시장가격이 상장폐지율과 (-)의 상관관계를 갖는다는 것은 장기간의 누적수익이 클수록 상장폐지율이 낮았다는 것을 의미한다.

직전기간 누적수익률이 상장폐지율과 상관관계를 갖는다고 보기 어려웠으므로 직전기간 누적수익률을 이용한 예측기간 수익률의 평가는 생존자편의를 갖지 않을 것으로 판단된다. 하지만 그렇다고 해서 생존자편의의 문제가 전혀 발생할 수 없다고 볼 수는 없다. 오히려 과거 장기간의 누적수익과 예측기간 상장폐지율과 (-)의 상관관계를 갖는 것으로 나타났기 때문이다. 따라서 과거 장기간의 누적수익을 이용한 예측기간 수익률의 평가는 생존자편의를 가질 수도 있다고 해석하는 것이 좋을 듯하다.

물론 장기과잉반응가설의 검정에서 흔히 이용하는 직전기간은 최장 36개월인 경우가 많다. 따라서 이들 연구에서 생존자편의는 중요한 문제가 아닐 수 있다. 문제는 직전기간을 더 길게 설정할 경우 생존자편의가 중요한 문제가 될 수 있음을 인식하는 것이다. 이를 확인하기 위해서는 조금 더 장기간의 표본을 이용해야 하지만 여기에는 현실적인 제약이 있다. 다만 패자포트폴리오의 경우 상장폐지율이 높으리라는 상식이 실증적으로 나타나지 않았는데 퍼즐로 생각할 수도 있는 이 결과가 직전기간을 장기 또는 단기로 설정하는가에 의존할 수 있음을 하나의 설명으로 제시하고자 한다.

---

[10] 이 변수에 가장 가까운 재무비율로 유보액/총자산비율이 있다. 이 비율은 Altman의 Z점수(Z-score)를 계산할 때 이용하는 변수이다. 하지만 비례해저드모형에 공변량으로 이용할 경우 추정계수가 유의하지 않은 (-)의 값을 갖는 것으로 나타났다.

5. 결론 및 시사점

본 연구는 장기과잉반응가설의 검정에서 생존자편의가 나타날 수 있는가를 검정하였다. 이를 위하여 생존분석방법을 이용하였으며 상장폐지율은 상장폐지의 하위누적확률분포로 정의하였다. 결과적으로 상장폐지율을 추정하였으며 이에 영향을 미치는 요인을 검정하였다. 이를 공변량이라 부르는데 본 연구는 관리종목 여부, 직전기간 수익률, 주식시장가격, 주식시장가격/액면가격을 이용하였다.

결과에 따르면 주요내용은 다음과 같다.

첫째 관리종목의 경우 상장폐지율은 유의하게 높았던 것으로 나타났다. 관찰시점 이후 60개월을 기준으로 했을 때 관리종목주식의 상장폐지율은 비관리종목에 비해 4.7배나 높았다.

둘째 직전기간을 6, 12, 24, 36개월로 설정하였을 때 직전기간 수익률에 따른 상장폐지율의 차이는 유의하지 않았던 것으로 나타났다. 이는 직전기간 수익률이 낮았던 주식으로 이루어진 패자포트폴리오의 경우 예측기간 상장폐지율이 더 높았다고 보기 어려움을 의미한다. 따라서 직전기간 수익률을 장기과잉반응가설의 검정은 생존자편의의 오류를 겪을 가능성이 높지 않아 보인다.

셋째 관찰시점의 주식시장가격 또는 주식시장가격/액면가격이 낮을수록 예측기간 상장폐지율은 높았던 것으로 나타났다. 이는 Loughran and Ritter(1996)의 가설을 지지하는 것이다. 한편 주식시장가격을 장기간의 누적수익으로 해석한 Conrad and Kaul(1993)의 견해를 따르면 이 결과는 장기간의 과거수익률이 예측기간 상장폐지율에 관한 정보를 가질 수 있음을 시사한다. 따라서 상장폐지에 대한 정보는 보다 장기간의 수익률에서 얻을 수 있을 것이다.

장기과잉반응가설의 검정에서 생존자편의는 중요한 문제임에 틀림없다. 하지만 직전기간을 최장 36개월로 정하였을 때 직전기간 수익률과 예측기간 상장폐지율의 상관관계가 없다는 결과는 생존자편의가 그다지 중요하지 않을 수 있음을 의미한다. 하지만 이 결과로부터 상장폐지의 위험이 과거의 수익률과 무관하다고 단정지을 수는 없다. 주식시장가격으로 대표되는 과거의 성과측정치가 예측기간 상장폐지율과 (-)의 상관관계를 갖는 것으로 나타났기 때문이다. 따라서 상장폐지 가능성에 관한 정보는 비교적 단기간의 직전 수익률에서 얻을 수 있는 것이 아니라 상당히 장기간의 직전 수익률에서 얻을 수 있는 것으로 볼 수 있다.

끝으로 연구의 한계를 언급한다. 본 연구는 상장폐지에 관한 정보를 확인할 수 있는 2001년 1월부터 표본을 구하였다. 이에 따라 생존기간은 최장 72개월이 되었고 직전기간 수익률은 1998년 1월부터 이용하였다. 국내에서 이용할 수 있는 최대의 표본일 수는 있지만 자료제약에 따른 연구의 한계가 없지는 않을 것이다. 향후 보다 더 많은 자료의 축적을 기다리면서 본 연구가 하나의 시론적(試論的) 연구가 되기를 기대한다.

참고문헌

Amemiya, T., *Advanced Econometrics*, Basil Blackwell : Oxford, 1985

Conrad, J., and G. Kaul, “Long-term market overreaction or biases in computed return?”, *Journal of Finance*, Vol. 48, 1993, pp.39-63

Elton, E.J., M.J. Gruber, and C.R. Blake, "Survivorship Bias and Mutual Fund Performance", *Review of Financial Studies* 9, 1996, pp.1097~1120.

Elton, E.J., M.J. Gruber, and C.R. Blake, "A first look at the accuracy of the CRSP mutual fund database and a comparison of the CRSP and Morningstar Mutual Fund Databases", *Journal of Finance* 56, 2001, pp.2415~2430.

Fama, E.F., and K.R. French, "The CAPM is Wanted, Dead or Alive", *Journal of Finance*, Vol. 51, 1996, pp.1947-1958

Fine, J.P., and R.J. Gray, “A proportional hazards model for the subdistribution of a competing risk”, *Journal of the American Statistical Association,* Vol.94, 1999, pp.496-509.

Gray, R.J., “A class of K-sample tests for comparing the cumulative incidence function of a competing risk”, *Annals of Statistics*, Vol.16, 1988, pp.1141-1154

Greene, W.H., *Econometric Analysis*, Prentice Hall : New Jersey, 2003

Han, A., and J.A. Hausman, “Flexible parametric estimation of duration and competing risk models”, *Journal of Applied Econometrics*, Vol.5, 1990, pp.1~28

Jegadeesh, N,. and S. Titman, “Returns to Buying Winners and Selling Losers: Implications for Stock Market Efficiency,” *Journal of Finance,* Vol. 48, 1993, pp. 65-91.

Loughran, T., and J.R. Ritter, "Long-Term Market Overreaction: The Effect of Low-Priced Stocks", *Journal of Finance*, Vol. 51, 1996, pp.1959~1970

Pepe, M.S., “Inference for events with dependent risks in multiple endpoint studies”, *Journal of the American Statistical Association,* Vol.86, 1991, pp.770-778.

Pintilie, M., *Competing risks,* John Wiley & Sons : New Jersey, 2006.

White, H., “A reality check for data snooping”, *Econometrica,* 68, 2000, 1097-1126

부록 : Gray's K-표본 검정통계량의 계산

Gray검정통계량은 본문에서 언급한 바와 같이 공분산을 이용한 Z_K 의 이차형태를 취한다. 여기에서는 이산형자료(discrete data)를 이용하여 Z_K 의 공분산 구하는 법을 설명하기로 한다. 즉 (24)식의 $Cov(Z_K)$ 를 구하는 과정이다.

간결한 표현을 위하여 본문과는 다른 표기법을 이용한다. 우선 i =1,2는 집단(group)을 의미하고 j =1,2,…, n 은 사건발생시기를 나타낸다. 각 시점 (t_j) 에서 d_i 는 관심사건의 발생수이고 c_i 는 경쟁사건의 발생수이며 n_i 는 위험에 직면한 수이다. S_i 가 생존함수에 대한 Kaplan-Meier추정치라고 할 때 하위누적확률분포는 F 라 나타내며 F^0 는 표본 전체를 이용하여 구한 하위누적확률분포다. $F^0(t_j)$ 는 다음과 같다.

(A1) $$F^0(t_j) = \sum_{t_j} \frac{d_1(t_j)+d_2(t_j)}{m_1(t_j)+m_2(t_j)}, \text{ where } m_i(t_j) = \frac{n_i(t_j)}{S_i(t_{j-1})}$$

이하에서 (t_j) 를 생략하며 계산시점이 (t_{j-1}) 인 경우에만 $(\_)$ 로 표시하기로 한다. 주요 항을 간단하게 표현하면 (A2)식과 같다.

(A2a) $$A = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$$

(A2b) $$C = \sum_{t_j<t} A \frac{d_1+d_2}{(m_1+m_2)(1-F^0_-)}$$

(A2c) $$\widetilde{C} = \sum_{t_j} A \frac{d_1+d_2}{(m_1+m_2)(1-F^0_-)}$$

이하 (A3)식은 관심사건이 발생한 시기 t_j 에 집단 i 에 대하여 계산하는 값이다.

(A3a) $$tev4_i = 1-\frac{1-F^0}{S_i}$$

(A3b) $$tev3_i = (d_1+d_2)\,\frac{S_{i,-}}{(m_1+m_2)\,n_i}\left(1-\frac{d_1+d_2-1}{(m_1+m_2)\,S_{i,-}-1}\right)$$

(A3c) $$tev1_i = (-1)^{i-1}(A-tev4_i C)$$

또한 이하 (A4)식은 경쟁사건이 발생한 시기 t_j 에 집단 i 에 대하여 계산하는 값이다.

(A4a) $$tcr4_i = \frac{1-F^0}{S_i}$$

(A4b) $$tcr3_i = c_i\,\frac{S^2_{i,-}}{n_i^2}\left(1-\frac{d_i-1}{n_i-1}\right)$$

(A4c) $tcr1_i = (-1)^{i-1} tcr4_i C$

이로부터 공분산에 포함되는 항은 계산하면 (A5)식과 같다.

(A5a) $$v3_i = \sum_{all\ t_j} \left(tev4_i^2 tev3_i + tcr4_i^2 tcr3_i \right)$$

(A5b) $$v2_i = \sum_{all\ t_j} \left(tev1_i tev4_i tev3_i + tcr1_i tev4_i tcr3_i \right)$$

(A5c) $$v1 = \sum_{i=1,2} \sum_{all\ t_j} \left(tev1_i^2 tev3_i + tcr1_i^2 tcr3_i \right)$$

따라서 공분산은 아래의 (A6)식과 같다.

(A6) $$Cov(Z_1) = v1 + \tilde{C}^2\ v3_1 + 2\tilde{C}\ v2_1 + \tilde{C}^2\ v3_2 - 2\tilde{C}\ v2_2$$

본문에 이미 언급한 바와 같이 Gray검정통계량은 (A7)식 Z_1의 이차형태이다.

(A7) $$Z_1 = \sum_{all\ t_j} R_{1j} \left(\frac{d_{1j}}{R_{1j}} - \frac{d_{1j} + d_{2j}}{R_{1j} + R_{2j}} \right), \text{where } R_{1j} = n_{1j} \frac{1 - \hat{F}_1(t_{j-1})}{\hat{S}_1(t_{j-1})}$$

즉 (A6)식에서 구한 Z_1의 공분산을 이용하면 Gray의 K-표본검정의 검정통계량은 (A8)식과 같다.

(A8) $$K = \frac{Z_1^2}{Var(Z_1)}$$

이 식이 바로 본문의 (24)식이다.