

# 칼만필터/QML을 이용한 다요인 선형 이자율 기간구조모형의 추정 및 적합성 비교

변석준\* · 이진태\*\*

## < 요약 >

이자율 기간구조의 동태를 결정하는 확률모형은 경제 환경의 불확실성을 집약하는 요소로서, 채권 및 관련 파생상품의 가격 결정이나 채권 의 위험관리, 채권 포트폴리오 전략의 위험분석을 위하여 매우 중요한 역할을 한다. 그러므로 채권투자에 있어서 모든 분석의 기초가 되는 것이 이자율 기간구조의 추정이며, 이는 추정된 기간구조모형의 적합성이 분석의 정확성에 큰 영향을 끼침을 시사한다. 본 논문은 완전 선형모형(complete model)과 필수 선형모형(essential model)을 포함하는 포괄적인 선형 기간구조 모형들을 대상으로 칼만필터/QML 알고리즘을 이용하여 각 모형을 추정하고 상대적인 적합성 비교를 통한 최적 모형 선정 및 그 특성 분석에 초점을 맞추었다. 비교분석 결과 1개의 요인(상태변수)이 단기이자율 변동성에 영향을 주는 - 3요인 필수 선형 기간구조모형,  $A_1(3)E$  가 한국채권시장의 수익률 변동을 가장 유연하게 반영할 수 있는 최적 선형기간구조모형으로 나타났다.  $A_1(3)E$ 모형에 대한 예측오차분석과 단기이자율 추정을 통한 타당성 검증결과 높은 적합성을 가짐을 확인할 수 있었다. 이때 추정과정을 통하여 구한 각 요인(상태변수)들은 주성분분석을 통해서 구한 3가지 성분들(수준(level), 기울기(slope), 곡도(curvature)) 중 하나와 밀접한 상관관계를 가지는 것으로 나타났다( $X_2$  - 수준(level),  $X_1$  - 기울기(slope),  $X_3$  - 곡도(curvature)). 더불어  $A_1(3)E$ 모형으로부터 추정된 시장위험가격은 매우 역동적인 움직임을 보이며 경제와 금융시장의 환경변수들을 잘 반영하고 있음을 확인할 수 있다.

Keywords : 기간구조, 이자율, 선형 모형, 상태-공간 모형, 칼만필터

\* KAIST 경영대학

\*\* KIS채권평가

# 1. 서론

이자율 기간구조의 동태를 결정하는 확률모형은 경제 환경의 불확실성을 집약하는 요소로서, 채권 및 관련 파생상품의 가격 결정이나 채권의 위험관리, 채권 포트폴리오 전략의 위험분석을 위하여 매우 중요한 역할을 한다. 그러므로 채권투자에 있어서 모든 분석의 기초가 되는 것이 이자율 기간구조의 추정이며, 이는 추정된 기간구조모형의 적합성이 분석의 정확성에 큰 영향을 끼침을 시사한다.

채권이론가격 결정 모형에 관한 연구는 Vasicek (1977)의 연구를 시작으로 최근까지 다양한 형태로 발전해왔다. 특히 이자율 기간구조에 대한 다양한 실증분석 결과는 채권 시장 위험 프리미엄(bond market risk premium)이 시간에 따라 변동한다는 것을 강하게 뒷받침하며, 이를 반영하는 모형들이 다양하게 제시되었다. 대표적인 모형으로는 Duffie and Kan (1996)과 Dai and Singleton (2000)의 완전 선형기간구조모형(complete affine term structure model), Dai and Singleton (2002)와 Duffee (2002)의 필수 선형기간구조모형(essential affine term structure model), Zhou (2001)와 Das (2002)의 점프 모형(jump-diffusion model), Bansal and Zhou (2002)의 체제 전환(regime shifts)를 가지는 선형모형, Ahn, Dittmar, and Gallant (2002)의 가우시안 2차 모형 등이 있다. 본 논문은 완전 선형모형과 필수 선형모형을 포함하는 포괄적인 선형 기간구조 모형들의 상대적인 적합성 비교와 타당성 및 특성 분석에 초점을 맞추고 있다.

이와 더불어 모형의 추정 및 실증분석을 위한 계량적 방법론 역시 다양한 형태로 발전해왔다. 대표적인 방법론으로는 최우추정법(Maximum Likelihood Estimation), EMM(Efficient Method of Moment, 효율적 적률법), 칼만필터/QML 등이 있다. Duffee and Stanton (2004)은 기간구조모형의 추정을 위한 다양한 계량적 방법론들의 유한 표본 특성(finite sample properties)에 대하여 연구하였다. 최우추정법, EMM, 칼만필터/QML방법을 대상으로 한 분석결과, 최우추정법의 적용이 불가능한 비가우시안 모형의 경우, EMM방법은 소표본 특성(small sample performance)을 나타내어 추정 방법으로 적합하지 않았으며 칼만필터/QML방법이 상대적으로 적용이 간단하면서도 정확한 추정결과를 나타냄을 시뮬레이션과 실증분석을 통하여 보였다. 따라서 본 논문은 기간구조 모형의 추정을 위한 계량적 방법론으로 칼만필터/QML방법을 사용한다. Duan and Simonato (1999)는 칼

만필터/QML방법을 사용하여 가우시안 모형인 Vasicek (1977) 모형과 비가우시안 모형인 CIR (1985) 모형, Chen and Scott (1992) 모형의 모수를 추정하고 LM검증과 몬테칼로 시뮬레이션 분석을 통하여 추정결과와 모형의 유효성을 검증하였다. de Jong (2000)은 1요인, 2요인, 3요인 완전 선형기간구조 모형을 대상으로 칼만필터/QML방법을 이용하여 모수를 추정하고 그 특성을 분석하였다. 분석 결과, 조건부 평균과 분산을 기반으로 하는 칼만필터 추정량은 시계열과 횡단면 정보를 일관적으로 반영하는 좋은 속성을 나타내었으며, 3요인 모형은 1, 2요인 모형이 가지는 문제점들을 완화시키고 과거 이자율의 동태를 가장 잘 반영함을 확인할 수 있었다. Tang and Xia (2007)는 캐나다, 독일, 일본, 영국, 미국, 각 국을 대상으로 칼만필터/QML방법을 적용하여 다양한 선형 이자율 기간구조모형들의 모수를 추정하고 그 상대적인 적합성을 비교분석하였다.

채권시가평가제 실시와 거래 기법의 다양화로 한국 채권시장의 규모는 확대되고 있는 추세이며 그에 따라 이자율 기간구조에 대한 연구도 점차 활발히 이루어지고 있다. 국찬표, 박영석, 이정진 (1998) 및 김인준, 한중호 (2000)는 우리나라 단기 이자율의 변동행태를 규정하는 다양한 확률과정을 추정하고 비교하였으며 김명직, 신성환 (2001)은 확장칼만필터를 사용하여 상관관계를 허용한 3요인 채권이론 모형을 추정하였다. 그리고 강장구, 김성환, 한철우 (2005)는 2요인 제곱근 확산 모형으로부터 이자율 기간구조 및 부도위험을 추정하고 분석하였다.

그러나 다양한 연구에도 불구하고 한국 채권시장을 대상으로 포괄적인 형태의 다요인 선형 이자율 기간구조 모형들을 추정·비교하고 가장 적합한 모형을 찾기 위한 연구는 아직까지 미비한 수준에 머물러 있다. 실제로 추정된 모형의 적합성은 채권관련 위험분석의 정확성에 큰 영향을 주며, 따라서 우리나라 채권시장에 가장 적합한 형태의 이자율 기간구조모형을 찾고 그 특성을 분석하는 본 연구는 중요한 의미를 가진다.

본 논문은 완전 모형(complete model)과 필수 모형(essential model)을 포함하는 모든 3요인 선형기간구조 모형들을 대상으로 칼만필터/QML 방법을 사용하여 모수를 추정하고 왈드 검증 및 최우추정량의 비교를 통하여 각 모형의 포함관계를 확인한다. 더불어 포괄적인 형태의 비제약 모형들과 앞의 검증으로부터 기각되지 않은 모형을 포함하여 슈바르츠 척도, 내표본 가격오차, 외표본 가격오차의 3가지 척도를 기준으로 모델의 적합성을 비교분석한다. 이로부터 최적 모형을 선택하고 타당성을 검증하며 특성을 분석한다.

본 연구는 다음과 같이 구성되어 있다: 제2장에서는 다요인 선형이자율 기간구조모형의 이론적 배경 및 형태에 대하여 설명하고 제3장에서는 연속적인 선형이자율 모형을 관측방정식과 상태방정식으로 구성된 상태-공간 모형으로 이산화하는 과정을 제시한다. 그리고 제4장에서는 모수추정을 위하여 실증적 분석 방법으로 사용된 칼만필터/QML 과정에 대하여 설명한다. 제5장에서는 자료 기술과 더불어 모수추정 및 모형별 비교분석 결과를 제시하며 최적 모형의 타당성을 검증하고 특성을 분석한다. 마지막 제6장에서는 본 연구의 결과 및 의의를 제시한다.

## 2. 다요인 선형 이자율 기간구조모형

무차익거래조건(no arbitrage condition)으로부터  $T$ 시점을 만기로 하는 무위험-무이표채의  $t$ 시점 가격  $P(t, T)$ 은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$P(t, T) = E_t^Q \left[ e^{-\int_t^T r(u) du} \right] \quad (1)$$

이때  $r$ 은 단기 무위험 이자율이며  $E_t^Q$ 는 위험중립확률(equivalent martingale measure)  $Q$ 하에서  $t$ 시점의 기댓값을 나타낸다.

다요인 선형기간구조모형(ATSM)은 단기 이자율  $r(t)$ 가  $N$ -벡터로 구성되는 상태변수  $X(t) = (X_1(t), X_2(t), \dots, X_N(t))'$ 의 선형함수로 표현된다는 가정으로부터 얻어진다.

$$r(t) = \delta_0 + \delta_X' X(t) \quad (2)$$

이때  $\delta_0$ 는 상수이며  $\delta_X$ 는 상수들로 구성된  $N \times 1$  벡터이다. 상태변수  $X(t)$ 는 위험중립확률  $Q$ 하에서 다음과 같은 “선형확산(affine diffusion)” 프로세스를 따른다.

$$dX(t) = K^Q(\theta^Q - X(t))dt + \Sigma \sqrt{S(t)} dW^Q(t) \quad (3)$$

이때  $K^Q$ 와  $\Sigma$ 는 상수들로 구성된  $N \times N$  행렬이며,  $\theta^Q$ 는 상수들로 구성된  $N$ -벡터이다.  $N \times N$ 행렬  $S(t)$ 는 대각행렬로서,  $i$ 번째 대각항은 다음과 같은 형태로 구성된다.

$$S(t)(i,i) = \alpha_i + \beta_i' X(t) \quad (4)$$

이때  $\alpha_i$ 는 상수들로 구성된  $N \times 1$ 행렬  $\alpha$ 의  $i$ 번째 항이며  $\beta_i$ 는 상수들로 구성된  $N \times N$ 행렬  $\beta = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N]$ 의  $i$ 번째 열이다.  $W^Q$ 는 위험중립확률  $Q$ 하에서  $N$ -차원 독립표준브라운운동이다. 이로부터 표류항(drift term),  $K^Q(\theta^Q - X(t))$ 와 조건부 분산항(contidional variance)  $\Sigma S(t) \Sigma'$ 가 모두 위험중립확률  $Q$ 하에서 상태변수  $X(t)$ 의 선형함수 형태로 표현됨을 확인할 수 있다.

Duffie and Kan (1996)은 이러한 가정으로부터 무위험 무이표채의 가격  $P(t, T)$ 가 다음과 같은 상태변수  $X(t)$ 의 지수선형함수 형태로 표현됨을 보였다.

$$P(t, T) = e^{(A(\tau) - B(\tau)' X(t))} \quad (5)$$

이때  $\tau = T - t$ 이며  $A(\tau)$ 와  $B(\tau)$ 는 다음과 같은 상미분방정식을 따른다.

$$\frac{dA(\tau)}{d\tau} = -\theta^Q K^{Q'} B(\tau) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N [\Sigma' B(\tau)]_i^2 \alpha_i - \delta_0 \quad (6)$$

$$\frac{dB(\tau)}{d\tau} = -K^{Q'} B(\tau) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N [\Sigma' B(\tau)]_i^2 \beta_i + \delta_X \quad (7)$$

$$A(0) = 0, B(0) = 0$$

식 (3)은 위험중립확률  $Q$ 하에서 상태변수의 프로세스를 나타내고 있다. 하지만 실제 채권 가격의 시계열 데이터는 원확률(physical measure)에 의하여 결정된다. 따라서 실제로 관측되는 채권가격과 수익률(yield)로부터 모형을 추정하기 위해서는 위험중립확률 하에서 상태변수  $X(t)$ 의 프로세스와 원확률 하에서의 프로세스를 연결해주는 위험가격(price of risk)의 동태를 결정할 필요가 있다. 이를 위하여 균형가격산정

함수(pricing kernel),  $M$ 의 프로세스를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{dM}{M} = -r(t)dt - \Lambda_t' dW(t) \quad (8)$$

이때  $\Lambda_t$ 는  $N \times 1$  벡터로서 원확률 하에서  $N$ -차원 브라운운동의 쇄신(innovation)  $dW(t)$ 와 연관된 위험가격이다. 이때 원확률 하에서 상태변수  $X(t)$ 의 표류항과 조건부 분산항이 모두  $X(t)$ 의 선형 함수 형태로 유지되도록 하기 위하여 Duffee (2002)는 위험가격  $\Lambda_t$ 를 다음과 같이 특수한 형태를 가지는 상태변수  $X(t)$ 의 선형함수로 가정하였다.

$$\Lambda_t = \sqrt{S(t)} (\lambda_1 + S(t)^{-1} I^- \lambda_2 X(t)) \quad (9)$$

이때  $\lambda_1$ 은 상수들로 구성된  $N$ -벡터이며  $\lambda_2$ 는 상수들로 구성된  $N \times N$  행렬이며 지표행렬(indicator matrix)  $I^-$ 는 대각행렬로서  $i$ 번째 대각항은 다음과 같은 형태로 구성된다.

$$I^-(i,i) = \begin{cases} 1, & \text{inf}(\alpha_i + \beta_i' X(t)) > 0 \text{ 인 경우} \\ 0, & \text{다른 모든 경우} \end{cases}$$

이러한 조건으로부터 원확률 하에서  $X(t)$ 는 다음과 같은 프로세스를 따른다.

$$dX(t) = K(\theta - X(t))dt + \Sigma \sqrt{S(t)} dW(t) \quad (10)$$

이때  $K$ 와  $\theta$ 는 위험중립확률  $Q$ 하에서의 매개변수  $K^Q$ ,  $\theta^Q$ 와 다음과 같은 관계를 가진다.

$$K = K^Q - \Sigma \Phi - \Sigma I^- \lambda_2 \quad (11)$$

$$\theta = K^{-1}(K^Q \theta^Q + \Sigma \Psi) \quad (12)$$

$\Phi$ 는  $N \times N$  행렬로서  $i$ 번째 행은  $\lambda_1(i) \beta(i)'$ 의 형태를 가지며  $\Psi$ 는  $N$  벡터로서  $i$ 번째 항은  $\lambda_1(i) \alpha(i)$ 의 값을 가진다.

이와 같은 위험가격의 형태를 가지는 모형을 “필수 선형기간구조모형(essential affine term structure model)” (E-ATSM) (Duffee (2002), Dai and Singleton (2002)) 이라고 하며  $\lambda_2 = 0$ 이라는 가정으로부터 Dai and Singleton (2000)이 제안한 "완전 선형기간구조모형(complete affine term structure model)" (C-ATSM)이 된다. 완전 선형기간구조모형의 경우, 위험중립확률  $Q$ 와 원확률  $P$ 하에서 상태변수  $X(t)$ 와 균형 가격산정함수  $M$ 의 표류항과 조건부 분산항이 모두  $X(t)$ 의 선형함수 형태로 표현된다. 하지만 필수 선형기간구조모형의 경우, 상태변수  $X(t)$ 의 표류항과 조건부 분산항은  $X(t)$ 의 선형함수 형태로 표현되지만 균형가격산정함수  $M$ 의 조건부 분산항  $A_t A_t'$ 은  $X(t)$ 의 선형함수 형태로 표현되지 않는다.  $\lambda_2 \neq 0$ 인 필수 모형의 경우, 위험가격이 단기이자율의 변동성과 독립적으로 변화할 수 있는 이점을 가진다.

Dai and Singleton (2000)은  $N$ 요인 모델로서 이들 중 처음  $m$ 개 요인들이 행렬  $S$ 에 포함되는 모형을  $A_m(N)$ 으로 나타내었다. 이때 행렬  $S$ 는 상태변수의 변동성을 결정하며 결과적으로 단기 이자율의 변동성에 영향을 준다. 우리는 Duffee (2002)가 사용한 표기법을 따라 완전 모형을  $A_m(N)C$ 로, 필수 모형을  $A_m(N)E$ 로 표기한다.  $m = N$ 인 경우, 지표행렬  $I^-$ 는 0행렬이 되며 필수 모형과 완전 모형은 일치하게 된다.

### 3. 상태-공간 모형

#### 3.1 관측방정식(measurement equation)

식 (5)로부터 채권 수익률  $z_t$ 가 다음과 같이 상태변수  $X(t)$ 의 선형함수 형태로 표현됨을 알 수 있다.

$$z_t(\tau_i) = -\frac{\ln P(t, t+\tau_i)}{\tau_i} = -\frac{A(\tau_i)}{\tau_i} + \frac{B(\tau_i)'}{\tau_i}X(t) + \epsilon_t(\tau_i), \quad (13)$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

이때  $\tau_i$ 는  $i$ 번째 채권의 잔존기간(time-to-maturity)이며  $A(\tau_i)$ 와  $B(\tau_i)$ 는 식 (6)과 (7)에서 주어진 상미분방정식의 해이다. Vasicek 모델이나 CIR모델의 경우  $A(\tau_i)$ 와  $B(\tau_i)$ 에 대한 닫힌 해가 존재하며, 일반적인 선형기간구조모형의 경우 수치적인 방법으로 그 해를 구할 수 있다.  $\epsilon_t$ 는 모형설정오류나 채권수익률 데이터의 측정오차 등을 반영한 오류항(error term)이며, 그 평균값은 0이다. 완전 선형기간구조모형과 필수 선형기간구조모형의 경우, 위험중립확률  $Q$ 하에서는 동일한 상태변수 프로세스를 가지며, 따라서 같은 채권가격결정식 (5)을 가진다. 그러나 두 모델은 위험가격의 가정에 있어서 차이점을 가지며 이는 원확률  $P$ 하에서 상태변수 프로세스의 결정에 영향을 준다. 따라서 원확률  $P$ 하에서  $A(\tau_i)$ ,  $B(\tau_i)$ ,  $X(t)$ 는 완전 모형과 필수 모형에서 다른 값을 가지게 된다.

우리는 식 (13)으로부터 다음과 같은 관측방정식을 얻을 수 있다.

$$Z_t = G + HX_t + \epsilon_t \quad (14)$$

이때  $Z_t$ 는  $n \times 1$  벡터로서  $i$ 번째 항은 만기가  $\tau_i$ 인 채권의 수익률  $z_t(\tau_i)$ 이며  $G$ 는  $i$ 번째 항이  $-\frac{A(\tau_i)}{\tau_i}$ 의 값을 가지는  $n \times 1$  벡터이다.  $H$ 는  $n \times N$  행렬로서  $i$ 번째 행은  $\frac{B(\tau_i)'}{\tau_i}$ 이며  $\epsilon_t$ 는  $i$ 번째 항이  $\epsilon_t(\tau_i)$ 의 값을 가지는  $n \times 1$  벡터이다. 본 논문은 실증분석을 위하여  $\epsilon_t$ 의 공분산행렬  $R_t = \text{Var}(\epsilon_t)$ 가  $n \times n$  대각행렬이며  $j$ 번째 대각항이 미지의 모수  $\sigma$ 에 대하여  $\frac{\sigma^2}{\tau_j}$ 의 값을 가진다고 가정한다. 이는 측정오차나 모형 설정오류로부터 유발되는 각 채권의 가격결정 오차(pricing error)가 그 채권의 만기와는 독립적임을 의미한다.



### 3.2 상태방정식(transition equation)

de Jong (2000) 과 Duffee (2002)는 식 (10)으로 정의되는 상태변수  $X(t)$ 의 조건부 평균과 조건부 분산이 다음과 같음을 보였다.

$$E[X_t|X_{t-1}] = (I - e^{-K\Delta t})\theta + e^{-K\Delta t}X_{t-1} \quad (15)$$

$$Var[X_t|X_{t-1}] = Mb_0M' + \sum_{i=1}^N \left( \sum_{j=1}^N Mb_jM' M_{j,i}^{-1} \right) X_{t-1,i} \quad (16)$$

이때  $M$ 은  $K$ 의 대각화  $K = MDM^{-1}$ 로부터 나온 행렬이다.  $D$ 는 대각행렬이며 각 대각항을  $d_1, d_2, \dots, d_N$ 으로 나타낸다.  $N \times N$  행렬  $b_0$ 와  $b_j$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$b_i(j, k) = (d_j + d_k - d_i)^{-1} U_{i(j, k)} (e^{-d_i \Delta t} - e^{-(d_j + d_k) \Delta t}), \quad i = 1, \dots, N$$

$$b_0(j, k) = L_0(j, k) + \sum_{i=1}^N \theta_i^* [L_i(j, k) - b_i(j, k)]$$

이때 이를 구성하는 각 항들은 다음과 같다.

$$\theta^* = M^{-1}\theta, \quad \Sigma^* = M^{-1}\Sigma, \quad \beta^{*'} = \beta' M,$$

$$U_0 = \Sigma^* \text{diag}(\alpha)(\Sigma^*)', \quad U_i = \Sigma^* \text{diag}(\beta_i^*)(\Sigma^*)', \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

이때  $\beta_i^*$ 는  $\beta^*$ 의  $i$ 번째 열이며  $U_0$ 와  $U_i$ 는  $N \times N$  행렬들이다. 이를 이용하여  $N \times N$  행렬들  $L_0(\Delta t)$ ,  $L_i(\Delta t)$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ )의  $(j, k)$ 항은 다음 식과 같이 정의된다.

$$L_0(j, k) = (d_j + d_k)^{-1} U_{0(j, k)} (1 - e^{-(d_j + d_k) \Delta t})$$

$$L_i(j, k) = (d_j + d_k)^{-1} U_{i(j, k)} (1 - e^{-(d_j + d_k)\Delta t})$$

그러므로 우리는 식 (15)와 (16)으로부터 다음과 같은 상태방정식을 얻을 수 있다.

$$X_t = C + FX_{t-1} + \nu_t \quad (17)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} C = (I - e^{-K\Delta t})\theta \\ F = e^{-K\Delta t} \\ E[\nu_t | X_{t-1}] = 0 \\ \text{Var}[\nu_t | X_{t-1}] = Mb_0M' + \sum_{i=1}^N \left( \sum_{j=1}^N Mb_jM' M_{j,i}^{-1} \right) X_{t-1,i} \end{array} \right.$$

이때  $C$ 는  $N \times 1$  벡터이며  $F$ 와  $\text{Var}[\nu_t | X_{t-1}]$ 는  $N \times N$  행렬이다.

#### 4. 칼만필터/QML

최우추정법(Maximum Likelihood Estimation)은 일관성(consistency)과 점근적 효율성(asymptotic efficiency)을 가지기 때문에 선형기간구조모형의 추정에 일반적으로 널리 사용된다. 특히 상태변수  $X(t)$ 가 잠재변수(latent variable)로써 사용되는 경우, 칼만필터 알고리즘이 최우추정법의 모수 추정에 함께 이용된다. 그러나 엄밀한 최우추정법의 사용은  $m=0$ 인 경우, 즉 다요인 가우시안 모형(multi-factor Gaussian models)의 경우에만 가능하다. 이외의 경우는 준최우추정법(quasi-maximum likelihood)이 사용될 수 있다. 널리 사용되는 또 다른 방법으로는 효율적 적률법(EMM)이 있다. EMM의 경우 유연하며, Ahn, Dittmar and Gallant (2002)가 제안한 2차 모형(quadratic model)과 같은 비선형기간구조의 추정에 사용될 수 있다는 장점이 있다. 하지만 Duffee and Stanton (2004)은 EMM이 추정과정의 복잡성과 긴 계산시간에도 불구하고 칼만필터/QML 방법에 비하여 추정치의 개선이 거의 이루어지지 않음을 시뮬레이션과 실증분석을 통하여 보여주고 있다. 특히 선형기간구조모형의

추정에 있어서 EMM의 경우, 표본부족 현상으로 인한 좋지 않은 결과를 가져오며 칼만필터/QML 접근법이 가장 좋은 결과를 나타냄을 보였다. 따라서 본 연구는 선형기간구조모형의 추정을 위하여 칼만필터/QML 방법을 사용한다.

3절의 논의로부터  $n \times 1$  관측치 벡터  $Z_t$ 와  $N \times 1$  잠재(상태)변수 벡터  $X_t$ 는 다음과 같은 선형관계식의 상태-공간 모형으로 표현된다. 이때  $\epsilon_t$ 와  $\nu_t$ 는 정규분포를 따른다고 가정한다.

$$Z_t = G + HX_t + \epsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, T, \quad \epsilon_t \sim N(0, R_t) \quad (18)$$

$$X_t = C + FX_{t-1} + \nu_t, \quad t = 1, 2, \dots, T, \quad \nu_t \sim N(0, Q_t) \quad (19)$$

칼만필터/QML 과정은 반복적인 알고리즘으로, 상태-공간 모형으로부터 상태변수(잠재변수)를 예측(prediction)하고 갱신(update)하는 과정을 통하여 관측치의 조건부 예측오차와 이의 분산을 계산하고, 이들을 사용하여 우도함수를 설정한 후 미지의 모수에 대해서 수치최적화 하는 순서로 선형 이자율 기간구조 모형의 모수들을 추정한다.  $t$ 시점까지의 정보 집합을  $\Psi_t$ 라고 하고 칼만필터/QML 방법을 조금 더 자세히 살펴보면 다음과 같다.<sup>1)</sup>

먼저 식 (19)로부터  $t-1$ 시점에 상태변수  $X_t$ 의 예측치 및 공분산 행렬을 다음과 같은 조건부 평균과 조건부 분산으로 구할 수 있다.

$$X_{t|t-1} = E[X_t | \Psi_{t-1}] = C + FX_{t-1|t-1} \quad (20)$$

$$P_{t|t-1} = \text{Var}[X_t | \Psi_{t-1}] = FP_{t-1|t-1}F' + Q_t \quad (21)$$

그리고 이러한 상태변수  $X_t$ 의 예측값을 이용하여 관측치 벡터  $Z_t$ 를 식 (18)로부터 다음과 같이 예측한다.

---

1)  $\Psi_s$ 는 다음과 같이 관측 시스템(measurement system)에 의하여 생성되는 시그마 대수( $\sigma$ -algebra) 필터레이션으로 정의한다.

$$\Psi_s = \sigma\{Z_0, Z_1, \dots, Z_s\}, \quad s = 0, 1, \dots, T$$

$$Z_{t|t-1} = E[Z_t | \Psi_{t-1}] = G + HX_{t|t-1} \quad (22)$$

따라서  $t$ 시점이 되어 실제 관측치  $Z_t$  값이 알려지면 식 (23), (24)와 같이 예측오차와 이의 공분산행렬을 구할 수 있다.

$$\eta_{t|t-1} = Z_t - Z_{t|t-1} \quad (23)$$

$$f_{t|t-1} = E[\eta_{t|t-1} \eta_{t|t-1}'] = HP_{t|t-1}H' + R_t \quad (24)$$

이로부터  $t$ 시점의 상태변수와 조건부 공분산 행렬을 다음과 같이 교정한다.

$$X_{t|t} = X_{t|t-1} + P_{t|t-1}H'f_{t|t-1}^{-1}\eta_{t|t-1} \quad (25)$$

$$P_{t|t} = P_{t|t-1} + P_{t|t-1}H'f_{t|t-1}^{-1}HP_{t|t-1} \quad (26)$$

식 (25)와 (26)에서  $K_t = P_{t|t-1}H'f_{t|t-1}^{-1}$  항은 칼만교정항(Kalman gain)이라고 부른다. 이때 칼만교정항  $K_t$ 는 교정식에서 새로운 정보에 주어지는 비중을 결정한다. 즉, 예측오차의 공분산  $f_{t|t-1}$ 이 크다면 칼만교정항은 작게 되어 새로운 정보에 상대적으로 적은 비중을 두게 되며, 상태변수와 이의 조건부 공분산 행렬의 교정은 상대적으로 작게 이루어지게 된다.

이러한 반복적인 일련의 과정을 통하여 구해지는 예측오차  $\eta_{t|t-1}$ 와 공분산 행렬  $f_{t|t-1}$ 을 이용하여 우리는 식 (27)과 같은 대수우도함수를 구할 수 있다. 그리고 이 대수우도함수를 미지의 모수  $\theta$ 에 대하여 수치최적화함으로써 최우추정량을 구한다.

$$\ell(\theta) = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln((2\pi)^n |f_{t|t-1}|) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \eta_{t|t-1}' f_{t|t-1}^{-1} \eta_{t|t-1} \quad (27)$$

칼만필터/QML 알고리즘을 정리해보면 다음 < 표 1 >과 같다.

< 표 1 >

## 5. 실증분석

### 5.1 상태방정식(transition equation)

무위험 선형 이자율 기간구조를 추정하기 위하여 2001년 1월 2일부터 2007년 10월 31일까지 한국채권평가에서 공시한 국채 주별 기준 수익률 중 6개월, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10년 만기의 할인수익률(spot rate)을 사용하였다(357주). 이들 중 6개월, 1, 2, 3, 5, 7, 10년 만기의 국채 주별 수익률 자료가 내표본 분석(in sample analysis)을 위하여 사용되었으며 4년, 6년, 9년 만기의 자료가 외표본 분석(out-of-sample analysis)에 이용되었다. < 표 2 >는 국채 주별 수익률 자료에 대한 2001년 1월 2일부터 2007년 10월 31일까지의 기초통계량을 보여준다. 평균과 중위수로부터 수익률의 기간구조는 우상향하는 형태를 나타낸다. 또한 각 만기별 채권의 1차 자기상관계수가 모두 0.97이상의 높은 값을 가지며, 이로부터 각 만기별 시계열 자료는 매우 높은 지속성(persistence)을 나타냄을 확인할 수 있다. 또한 차분자료의 왜도와 첨도, Jarque-Bera 통계량으로부터 수익률의 분포가 정규분포에서 괴리가 있음을 알 수 있다.

< 표 2 >

< 그림 1 >은 국채 주별 수익률 자료의 시계열 기간구조를 나타낸다. 이로부터 이자율의 전반적이 추이가 매우 역동적임을 확인할 수 있다. 즉, 만기수익률의 수준(level) 뿐만 아니라 수익률 곡선의 기울기(slope)와 곡도(curvature)도 큰 변동을 보인다.

< 그림 1 >

주성분분석(principal component analysis)을 실행하여 만기수익률의 움직임을 설명하는 각 성분의 상대적 중요성을 살펴보았다. < 표 3 >은 3개월, 6개월, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10년 만기의 수익률에 대한 주성분분석 결과로부터 각 성분별로 전체 변동에 대해서 가지는 설명력을 나타내고 있다. 이로부터 첫 번째 성분의 설명력이 84.85% 수준으로 굉장히 높음을 확인할 수 있으며 추가적인 변동은 두 번째, 세 번째 성분들로부터 대부분 설명된다. 즉, 세 가지 주성분이 만기수익률곡선의 총 변동을 96.95% 수준으로 대부분 설명하고 있다. 이는 만기별 채권 수익률 사이의 높은 상호-상관관계로부터 소수의 공통 요소들이 다양한 만기별 수익률 사이의 공통된 동태를 유도함을 의미한다.

< 표 3 >

< 그림 2 >는 11가지 만기별 수익률에 대한 3가지 주성분의 계수를 보여준다. 첫 번째 주성분의 경우, 전체 만기에 걸쳐 비슷한 값을 가지며 이로부터 수익률 곡선의 수준(level)으로 해석될 수 있다. 두 번째 주성분은 짧은 만기의 채권에 대해서는 음의 값을 가지지만 긴 만기의 채권에 대해서는 양의 값을 가진다. 그러므로 이는 수익률 곡선의 기울기(slope)로 분석된다. 마지막 세 번째 주성분은 짧은 만기와 긴 만기 채권에 대해서는 양의 값을 가지고 중간 만기 채권의 경우는 음의 값을 가지는 U 자 형태를 띠고 있다. 뿐만 아니라 짧은 만기와 긴 만기의 채권에 대해서 비슷한 크기의 값을 가지며 이러한 특성들로부터 이 성분은 수익률 곡선의 곡도(curvature)로 해석된다.

< 그림 2 >

## 5.2 추정결과 및 모형비교

본 논문에서 관심을 가지는 가장 포괄적인 형태의 선형모델은 3요인 필수 선형기간 구조모형(E-ATSM)  $A_m(3)E$  이다. 이때  $m$ 은 단기이자율 변동성에 영향을 주는 요

인(상태변수)의 숫자를 뜻하며 0, 1, 2, 3의 숫자를 취할 수 있다. 이때  $A_m(3)E$  ( $m = 0, 1, 2$ )는  $\lambda_2 = 0$ 이라는 제약조건으로부터 각각의 대응하는 완전 선형기간구조모형(C-ATSM)  $A_m(3)C$  ( $m = 0, 1, 2$ )를 포함한다. 또한 각각의  $A_m(3)E$  ( $m = 0, 1, 2$ )는 이보다 더 적은 요인(상태변수)을 가지는 모델  $A_m(N)E$  ( $m \leq N < 3$ )을 포함한다. 그리고  $m = 3$ 인 경우, 지표행렬  $I^-$ 는 0행렬이 되며  $A_3(3)E$ 과  $A_3(3)C$ 는 일치하게 된다.

본 논문에서는 모든 모델에 대하여 허용성(admissibility)과 식별성(identification)을 보장하기 위하여  $\Sigma$ 를 단위행렬  $I_{3 \times 3}$ 으로 가정하고 Tang and Xia (2005)의 모수 제약방법을 적용하였다.<sup>2)</sup> 이때  $\delta_0$ 에 대해서는 아무런 제약도 가해지지 않았다.

선형 이자율 기간구조모형들의 비교분석을 위하여 먼저, 앞서 제시한 모형들의 포함관계에 대한 검증을 시행하였다. 포함관계 검증은 1)모수추정과정을 통해 구해진 최우 추정량 비교와 2)왈드 검증(Wald Test)을 통하여 이루어졌다. 각각의 필수 선형기간구조모형  $A_m(3)E$  ( $m = 0, 1, 2$ )의 포함관계를 검증하기 위한 모수 제약과 왈드 통계량, 모형별 최우추정량을 < 표 4 >에 정리하였다. 각 모형별 모수추정결과 구해진 최우추정량을 괄호 안에 나타내었다. 왈드 통계량은 점근적으로  $\chi^2_{(J)}$ 분포를 따르며, 이때  $J$ 는 제약의 수를 나타낸다. 왈드 검증 결과, 모든 포함관계에 대하여 왈드 통계량은 매우 큰 값을 나타내며 모수제약에 대한 귀무가설이 기각됨을 확인할 수 있었다.

< 표 4 >

그러나  $A_2(3)C$  모형의 경우, 왈드 통계량이 상대적으로 작은 값을 가지며 최우추정량이 충분히 큰 값을 가짐을 확인할 수 있었다. 그러므로 본 논문은  $A_2(3)C$  모형을 3요인 필수 선형 기간구조모형과 더불어 추정 및 비교 대상에 포함시켰다. 그리고 기각되지 않은 선형 이자율 기간구조모형들( $A_0(3)E$ ,  $A_1(3)E$ ,  $A_2(3)E$ ,  $A_3(3)C$ ,  $A_2(3)C$ )의 모수를 칼만필터/QML 방법을 사용하여 추정하였다. 각 모형별 모수 추정

2) Tang and Xia (2007) p.77 Table A1 참고.

결과 및 최우추정량은 < 표 5 >과 같다.

< 표 5 - 1 >

< 표 5 - 2 >

< 표 5 - 3 >

추정된 각 모형의 적합성 비교를 위하여 다음과 같은 세 가지 기준 척도를 사용하였다.

첫 번째는 슈바르츠 척도(Schwarz Criterion), *BIC*(Bayesian Information Criterion) 이다.

$$BIC = \log \text{likelihood} - \frac{1}{2} N_{\theta} \ln(T)$$

이때  $N_{\theta}$ 는 추정하는 모수의 수이며  $T$ 는 관측되는 자료의 수이다. 슈바르츠 척도는 최우추정량을 과모수화(over parametrization)에 대하여 보정한 값이다. 따라서 이 값이 클수록 모형의 적합성은 더욱 높다고 할 수 있다.

두 번째 척도는 내표본 절대 가격오차(in-sample absolute pricing error), *IPE*이다. 각 시점  $t$ 에 절대 가격오차는 다음과 같이 정의된다.

$$IPE_t = \frac{1}{J} \sum_{i=1}^J |\hat{Z}_t(\tau_i) - Z_t(\tau_i)|$$

이때  $J$ 는 추정에 사용되는 채권 만기의 종류이며 본 논문에서  $J = 7$ 이다. 또한  $\hat{Z}_t(\tau_i)$ 는  $t$ 시점에 만기가  $\tau_i$ 인 채권의 예측 수익률이며  $Z_t(\tau_i)$ 는 실제로 관측되는 값이다. 시계열에 대한 평균값으로부터 절대 가격예측오차를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$IPE = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T IPE_t$$

정의로부터 이 값은 작을수록 모형의 높은 적합성을 의미한다.



마지막 세 번째 척도는 외표본 절대 가격오차(out-of-sample absolute pricing error), *OPE*이다. 추정에 사용되지 않은 4년, 6년, 9년 만기 채권의 수익률 자료로부터( $J = 3$ ) *IPE*와 같은 방법으로 계산되었다. 그러므로 값이 작을수록 모델의 적합성은 더욱 높음을 의미한다.

추정의 대상이 된, 기각되지 않은 모든 모형에 대하여 *BIC*, *IPE*, *OPE*의 값을 < 표 6 >에 정리하였다. 이때 각 척도 별로 최적화된 값을 굵은 활자로 나타내었다.

< 표 6 >

기각되지 않은 모든 모형에 대한 기준 척도 별 비교 결과, 슈바르츠 척도 *BIC* 와 내표본 절대 가격오차 *IPE* 의 경우,  $A_1(3)E$  모형이 가장 높은 적합성을 가지고 있으며, 외표본 절대 가격오차 *OPE* 는  $A_2(3)E$  모형이 가장 작은 값을 나타내고 있음을 확인할 수 있다. 더불어 *OPE* 의 경우,  $A_1(3)E$  모형은 3번째로 작은 값을 가지며 그 차이가  $A_2(3)E$ 와 크지 않다. 그러므로 전반적으로  $A_1(3)E$  모형이 가장 뛰어난 적합성을 나타내고 있다. 즉,  $A_1(3)E$  모형은 한국채권시장의 수익률 변동을 가장 유연하게 반영할 수 있는 최적 선형기간구조모형이라고 할 수 있다. Tang and Xia (2007)의 연구 결과에 따르면  $A_1(3)E$  모형은 캐나다, 독일, 일본, 영국, 미국에서도 각 국가별 기간구조의 특성을 잘 반영하는 높은 적합성을 나타낸다. 이는  $A_1(3)E$  모형이 한국을 포함한 다양한 채권 시장에서 여러 기간구조의 행태적 특성을 잘 반영할 수 있는 가장 유연한 모형임을 의미한다. 5.3절에서는  $A_1(3)E$  모형을 대상으로 그 적합성을 분석하고 특성에 대하여 살펴본다.

### 5.3 적합성 검증 및 특성 분석

적합성 검증을 위하여 각 만기별 채권의 수익률에 대한  $A_1(3)E$  모형의 예측오차를 구하고 관련 통계량을 < 표 7 >에 정리하였다. 이때 예측오차는 각 주별로 예측된 수

익률과 실제 수익률의 차이로 계산된다. 추정에 사용된 내표본과 추정에 사용되지 않은 외표본 모두를 대상으로 예측오차의 평균과 표준편차, 최대값과 최소값을 나타내었다. 이때 평균과 표준편차는 절대예측오차에 대하여 계산되었고 최대값과 최소값은 원예측오차로부터 구해졌다. 분석결과, 내표본 절대예측오차의 평균은 8.3956bp에서 11.4052bp 사이의 크지 않은 값을 가지며 외표본 절대예측오차 역시 10.1594bp에서 10.8229bp 사이의 값으로 내표본의 경우와 큰 차이가 없음을 확인할 수 있다. 뿐만 아니라 내표본과 외표본 전반에 걸친 표준편차 역시 10.9275bp에서 12.7795bp 범위의 크지 않은 값을 가지며 최대예측오차의 경우 6개월 만기 채권의 수익률이 130.9210bp로 가장 큰 값을 보이며 최소예측오차는 10년 만기 채권이 -60.9053bp로 가장 작은 값을 나타내었다. 이러한 전반적인 통계량분석으로부터, 예측오차는 내표본과 외표본 모두를 대상으로 매우 유사한 형태를 가지며 그 값은 매우 작게 나타남을 확인할 수 있었다. 이는  $A_1(3)E$  모형이 한국 채권시장의 기간구조를 아주 잘 반영하는 적합한 모형임을 뒷받침한다.

< 표 7 >

그리고 본 논문은  $A_1(3)E$  모형으로부터 추정되는 단기 이자율의 행태가 3개월의 짧은 만기 채권의 수익률 변화를 얼마나 잘 반영하는지 분석하였다. 즉, 추정에 사용되지 않은 3개월 만기 국고채권의 수익률로부터  $A_1(3)E$  모형을 사용하여 단기이자율을 추정하고 그 관계를 비교하였다.<sup>3)</sup> 추정된 단기 이자율  $\hat{r}(t)$ 은 다음과 같은 형태를 가진다.

$$\hat{r}(t) = \hat{\delta}_0 + \hat{\delta}_X' X(t) \quad (28)$$

추정결과  $\hat{r}(t)$ 의 표본 평균은 4.2791%의 값을 가지며 표준편차는 0.6431%이다. 또한 3개월 만기 채권 수익률의 표본 평균은 4.3307%이며 표준편차는 0.6361%이다. < 그림 3 >은 추정된 단기이자율과 3개월 만기 채권수익률의 시계열 그래프를 보여준다. 이때 실선은 추정된 단기이자율을, 점선은 3개월 만기 국고채권의 수익률을 나

3) 한국채권평가에서 공시한 3개월 만기 국고채권의 주별 수익률 자료를 사용하였다.

타낸다. 추정된 단기 이자율 곡선은 대부분의 시점에 걸쳐서 3개월 만기 채권수익률보다 작은 값을 가지며, 두 곡선의 동태는 거의 일치한다. 즉, 3개월 만기 채권수익률은 모수 추정에 사용되지 않았음에도 불구하고 단기 이자율의 행태를 아주 잘 설명함을 확인할 수 있다. 이러한 분석결과는 외표본 검증의 한 방법으로써,  $A_1(3)E$  모형이 수익률 곡선상의 단기 부분을 설명하는데도 매우 높은 적합성을 나타냄을 의미한다.

< 그림 3 >

다음으로  $A_1(3)E$  모형으로부터 추정된 위험가격(price of risk)의 시계열 동태에 대하여 살펴보았다. 추정된 위험가격은 다음 식 (29)와 같이 주어진다.

$$\hat{\Lambda}_t = \sqrt{\hat{S}(t)} (\hat{\lambda}_1 + \hat{S}(t)^{-1} I^{-1} \hat{\lambda}_2 \hat{X}(t)) \quad (29)$$

이때  $\hat{\Lambda}_t$ 는  $3 \times 1$  벡터로서,  $i$ 번째 항  $\hat{\Lambda}_t(i)$  ( $i = 1, 2, 3$ )는 시점  $t$ 에  $i$ 번째 상태변수(요인)의 위험가격을 의미한다. < 그림 4 >는 추정된 각 상태변수의 위험가격  $\hat{\Lambda}_t(i)$  ( $i = 1, 2, 3$ )의 시계열 동태를 보여준다. 각각의 상태변수별 위험가격은 전반적으로 매우 역동적인 움직임을 보인다. 특히 공통적으로 2001년 말부터 2002년 초에 걸쳐 증가하다가 급격히 하락하는 돌출현상이 나타난다. 또한 2003년 중순에도 급격히 하락하는 돌출형태의 동태적 특성을 살펴볼 수 있다. < 그림 5 >는 이러한 각 상태변수별 위험가격의 동태적 특성을 반영하는 전체 채권시장의 위험가격, 최대샤프지수(maximum sharpe ratio)  $\hat{\eta}_t$ 의 시계열 그래프이다. 이는 다음 식 (30)과 같이 계산할 수 있다.

$$\hat{\eta}_t = \sqrt{\hat{\Lambda}_t' \hat{\Lambda}_t} \quad (30)$$

이때 계산된 전체 시계열의 표본 평균은 1.2963이며 표준편차는 1.0782의 값을 가진다. 시장위험가격 역시 상태변수별 위험가격의 시계열 특성을 반영하여 매우 역동적인 움직임을 보이며, 2002년 초와 2003년 중순에 급격히 증가하는 돌출현상을 확인할 수 있다. 이러한 시장위험가격의 첫 번째 급등현상은 2000년부터 2002년에 걸친 한국을

포함한 세계 IT버블 붕괴와 일본금융공황에 따른 아시아 금융위험에 대한 불안감 확산과 같은 시대적 이슈에 뒤따르고 있다. 더불어 두 번째 돌출현상은 신용카드의 버블 붕괴로 인하여 나타난 2003년 카드대란과 시기적으로 일치한다. 이로부터 채권시장의 위험가격 동태는 경제와 금융시장 전반의 환경변수들로부터 큰 영향을 받고 있음을 확인할 수 있다.

< 그림 4 >

< 그림 5 >

더불어 칼만필터/QML 알고리즘을 통해 구한  $A_1(3)E$  모형의 요인들(상태변수)의 동태적 특성을 살펴보기 위하여, 추정된 요인들( $X_1, X_2, X_3$ )과 주성분분석을 통해서 구한 3가지 성분들(수준(level), 기울기(slope), 곡도(curvature)) 사이의 관계에 대해 분석하였다. < 표 8 >은 서로 높은 상관관계를 가지는 요인과 주성분 사이의 상관계수를 나타낸다. 분석결과, 두 번째 요인  $X_2$ 는 첫 번째 주성분인 수준(level)과 0.9533의 매우 높은 상관계수를 가짐을 확인할 수 있었다. 그리고  $X_1$ 은 두 번째 주성분인 기울기(slope)와 0.5190의 상관계수를 가지며,  $X_3$ 는 세 번째 주성분 곡도(curvature)와 상대적으로 작은 0.2142의 상관계수를 나타내었다. 따라서  $A_1(3)E$  모형으로부터 추정된 각 요인들이 수익률 곡선의 동태를 설명하는데 있어서, 두 번째 요인  $X_2$ 는 주성분 수준(level)과 밀접한 관계를 가지며 첫 번째 요인  $X_1$ 은 기울기(slope)와 충분한 상관관계를,  $X_3$ 는 곡도(curvature)와 약한 상관관계를 가짐을 확인할 수 있다. 높은 상관관계를 가지는 요인-주성분 사이의 관계를 확인하기 위하여 < 그림 6 >은 두 시계열 동태를 한 그래프 안에 함께 나타내었다. 즉,  $X_2$ 와 수준(그림6-1),  $X_1$ 과 기울기(그림6-2),  $X_3$ 와 곡도(그림6-3)를 각각 한 그래프 안에 그려서 그들 사이의 관계를 비교하였다. 이때 추정된 요인과 주성분은 스케일이 다르므로, 비교를 위하여 각 자료는 표본 평균과 표준편차를 사용해 정규화(normalization)하였다. 짙은 실선은 추정된 요인(상태변수)의 시계열을, 옅은 실선은 주성분의 시계열을 나타낸다. 이로부터 높은

상관관계를 가지는 두 번째 요인  $X_2$ 와 주성분 수준(level)의 시계열 동태는 거의 일치하고 있으며,  $X_1$ 과 기울기(slope) 역시 유사한 움직임을 나타낸다. 뿐만 아니라 상관계수가 상대적으로 낮은  $X_3$ 와 곡도(curvature) 역시 어느 정도 밀접한 관계를 가지고 변화함을 확인할 수 있다.

< 표 8 >

< 그림 6 - 1 >

< 그림 6 - 2 >

< 그림 6 - 3 >

## 6. 결론

이자율 기간구조의 동태에 대한 확률모형은 채권 및 관련 파생상품의 가격 결정이나 위험관리·분석을 위하여 매우 중요한 역할을 한다. 하지만 국내문헌의 기간구조에 대한 다양한 연구에도 불구하고 한국 채권시장을 대상으로 포괄적인 형태의 다요인 선형 이자율 기간구조 모형들을 추정·비교하고 가장 적합한 모형을 찾기 위한 연구는 아직까지 이루어지지 않았다. 실제로 추정된 모형의 적합성은 채권관련 위험분석의 정확성에 큰 영향을 주며, 따라서 우리나라 채권시장에 가장 적합한 형태의 이자율 기간구조모형을 찾고 그 특성을 분석하는 연구는 중요한 의미를 가진다. 본 논문은 완전 선형모형(complete model)과 필수 선형모형(essential model)을 포함하는 포괄적인 선형 기간구조 모형들의 상대적인 적합성 비교를 통한 최적 모형 선정 및 그 특성 분석에 초점을 맞추었다.

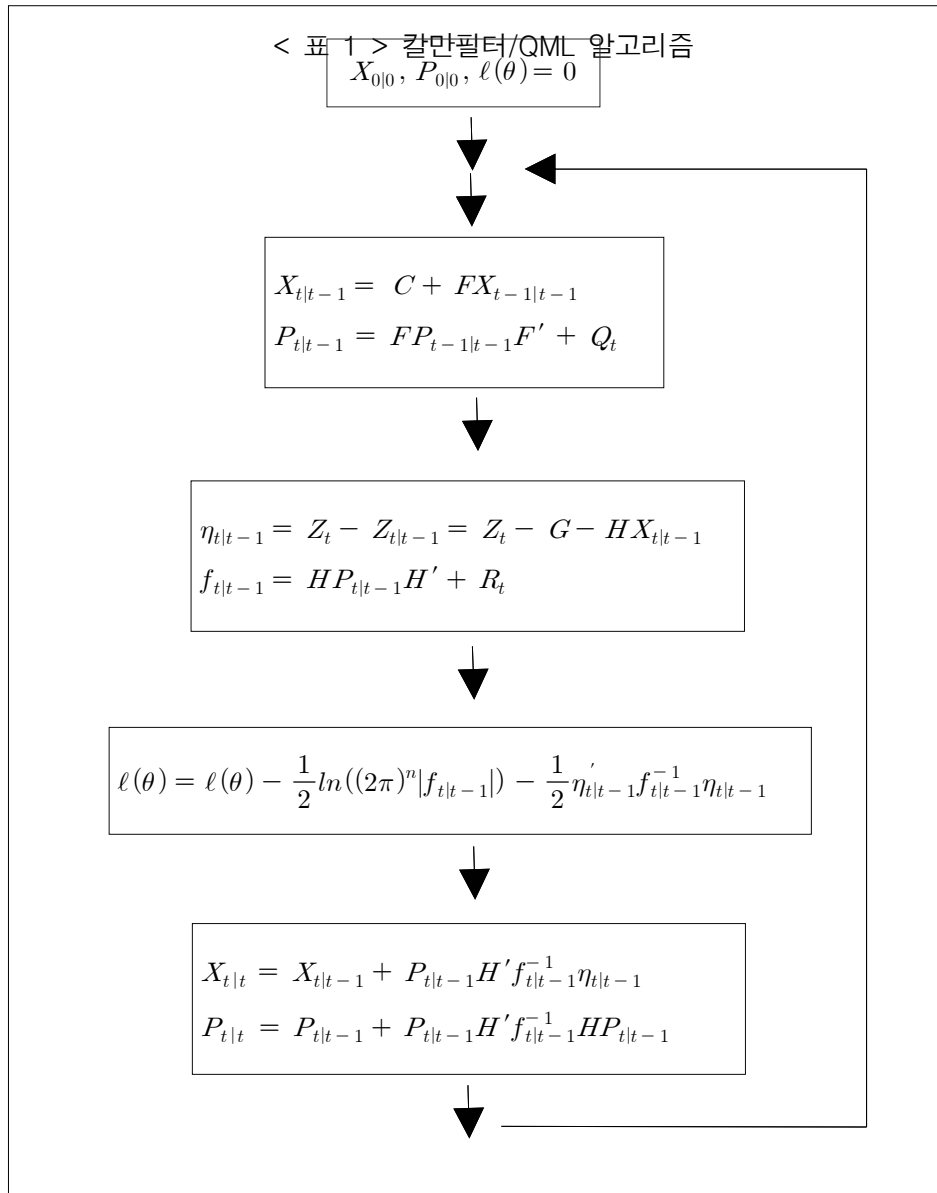
먼저 완전 모형(complete model)과 필수 모형(essential model)을 포함하는 모든 3요인 선형기간구조 모형들을 대상으로 칼만필터/QML 방법을 사용하여 모수를 추정하고 월드 검증 및 최우추정량의 비교를 통하여 각 모형의 포함관계를 확인하였다. 더불어

포괄적인 비제약 형태의 3요인 필수 선형기간구조모형(E-ATSM)  $A_m(3)E$  ( $m = 0, 1, 2, 3$ )과 앞의 검증으로부터 기각되지 않은 모형  $A_2(3)C$  을 포함하여 슈바르츠 척도, 내표본 가격오차, 외표본 가격오차의 3가지 척도를 기준으로 모형의 적합성을 비교하였다.

비교분석 결과  $A_1(3)E$  모형이 가장 뛰어난 적합성을 나타내었으며, 따라서 한국채권시장의 수익률 변동을 가장 유연하게 반영할 수 있는 최적 선형기간구조모형이라고 할 수 있다. 실제로  $A_1(3)E$ 모형의 예측오차에 대한 분석 결과, 내표본 뿐만 아니라 추정에 사용되지 않은 외표본 자료에 대해서도 아주 높은 적합성을 확인할 수 있었다. 더불어 3개월 만기 채권수익률로부터  $A_1(3)E$  모형을 사용하여 단기이자율의 동태를 추정하고 분석한 결과, 3개월 만기 채권은 모수 추정에 사용되지 않았음에도 불구하고 단기 이자율의 행태를 아주 잘 설명함을 확인할 수 있었다. 이는  $A_1(3)E$  모형이 수익률 곡선상의 단기 부분을 설명하는데 역시 매우 높은 적합성을 나타냄을 시사한다.

$A_1(3)E$ 모형으로부터 추정된 각 요인(상태변수)들과 관련된 위험가격은 매우 역동적인 움직임을 나타내며, 이를 반영한 전체 채권시장의 위험가격 역시 매우 역동적인 시계열 동태를 보인다. 특히, 2002년 초와 2003년 중순에는 급격히 증가하는 돌출현상을 확인할 수 있었다. 이는 국내와 국외 경제 및 금융시장 환경을 반영한 결과이다.

그리고 칼만필터/QML 알고리즘을 통하여 구해진  $A_1(3)E$  모형의 요인들 ( $X_1, X_2, X_3$ )의 동태적 특성에 대한 분석 결과, 각각의 요인들은 주성분분석을 통해서 구한 3가지 성분들(수준(level), 기울기(slope), 곡도(curvature)) 중 하나와 밀접한 관계를 가지는 것으로 나타났다. 즉, 두 번째 요인  $X_2$ 는 첫 번째 주성분인 수준(level)과,  $X_1$ 은 두 번째 주성분인 기울기(slope)와  $X_3$ 는 세 번째 주성분 곡도(curvature)와 높은 상관관계를 가짐을 확인할 수 있었다.



< 표 2 > 국채 수익률의 기초 통계량(주별)  
( 2001.01.02 - 2007.10.31 )

만기	평균	중위수	표준편차	자기상관 계수	왜도	첨도	Jarque-Bera
6개월	0.04467	0.04530	0.006452	0.972	-0.4883	10.9740	957.3088
1년	0.04642	0.04620	0.006617	0.974	0.1511	11.0416	960.5757
2년	0.04883	0.04850	0.007576	0.976	0.4420	8.0031	382.8909
3년	0.05010	0.04900	0.008357	0.976	0.9372	8.8488	559.5459
4년	0.05187	0.04990	0.009153	0.979	1.2525	10.0886	838.4320
5년	0.05293	0.05060	0.009603	0.984	0.4868	5.8835	137.3907
6년	0.05389	0.05160	0.009495	0.985	0.3807	5.9944	141.6025
7년	0.05449	0.05220	0.009210	0.985	0.3553	6.0605	146.4239
9년	0.05503	0.05260	0.009058	0.985	0.0714	5.6227	102.3373
10년	0.05536	0.05310	0.008963	0.984	0.0222	5.3266	80.3204

< 표 3 > 각 성분별 전체 변동에 대한 설명력

주성분	전체 변동에 대한 설명력
첫 번째 주성분(수준)	84.85%
두 번째 주성분(기울기)	8.06%
세 번째 주성분(곡도)	4.05%
총	96.95%



< 표 4 > 내포 가설 검증을 위한 모수 제약들

각각의 필수 선형기간구조모형  $A_m(3)E$  ( $m = 0, 1, 2$ )의 포함관계를 검증하기 위한 모수 제약들을 나열하였다. 각 모형별 모수추정결과 구해진 최우추정량을 괄호 안에 나타내었다. 이때 왈드 통계량은 점근적으로  $\chi^2_{(J)}$ ( $J$ 는 제약의 수) 분포를 따른다. 괄호안의 값은 이 통계량의 P값을 나타낸다.

모형	내포 모형	모수 제약	왈드 통계량
$A_0(3)E$ (13925.9)	$A_0(2)E$ (13571.8)	$H_0 : \lambda_1(3) = \lambda_2(1,3) = \lambda_2(2,3)$ $= \lambda_2(3,1) = \lambda_2(3,2) = \lambda_2(3,3)$ $= \delta_X(3) = 0$	$d.f. = 7$ 323.0 ( $7.36 \times 10^{-66}$ )
	$A_0(1)E$ (11337.1)	$H_0 : \lambda_1(3) = \lambda_2(1,3) = \lambda_2(2,3)$ $= \lambda_2(3,1) = \lambda_2(3,2) = \lambda_2(3,3)$ $= \delta_X(3) = 0$  $\lambda_1(2) = \lambda_2(1,2) = \lambda_2(2,1)$ $= \lambda_2(2,2) = \delta_X(2) = 0$	$d.f. = 12$ 1259.4 (0)
	$A_0(3)C$ (13917.5)	$H_0 : \lambda_2 = 0$	$d.f. = 9$ 1410.5 (0)
$A_1(3)E$ (13962.7)	$A_1(2)E$ (13859.5)	$H_0 : \lambda_1(3) = \lambda_2(2,3) = \lambda_2(3,1)$ $= \lambda_2(3,2) = \lambda_2(3,3)$ $= \delta_X(3) = 0$	$d.f. = 6$ 76.3 ( $2.07 \times 10^{-14}$ )
	$A_1(1)C$ (11515.9)	$H_0 : \lambda_1(3) = \lambda_2(2,3) = \lambda_2(3,1)$ $= \lambda_2(3,2) = \lambda_2(3,3)$ $= \delta_X(3) = 0$  $\lambda_1(2) = \lambda_2(2,1) = \lambda_2(2,2)$ $= \delta_X(2) = 0$	$d.f. = 10$ 1213.6 (0)
	$A_1(3)C$ (13910.9)	$H_0 : \lambda_2 = 0$	$d.f. = 6$ 804.2 (0)
$A_2(3)E$ (13953.2)	$A_2(2)C$ (13538.2)	$H_0 : \lambda_1(3) = \lambda_2(3,1) = \lambda_2(3,2)$ $= \lambda_2(3,3) = \delta_X(3) = 0$	$d.f. = 5$ 429.27 ( $1.45 \times 10^{-90}$ )
	$A_2(3)C$ (13938.3)	$H_0 : \lambda_2 = 0$	$d.f. = 3$ 55.72 ( $4.82 \times 10^{-12}$ )
$A_2(3)C$ (13938.3)	$A_2(2)C$ (13538.2)	$H_0 : \lambda_1(3) = \delta_X(3) = 0$	-
$A_3(3)C$	-	-	-

(13926.6)			
-----------	--	--	--

< 표 5-1 > 추정 결과 정리( $A_0(3)E$ ,  $A_1(3)E$ )

기각되지 않은 모든 모형에 대하여 칼만필터/QML 과정을 통해 구한 모수 추정 결과 및 최우추정량을 정리하였다. 이때 괄호안의 값은 표준 오차를 나타낸다.

	$A_0(3)E$			$A_1(3)E$		
	$i$	$i$	$i$	$i$	$i$	$i$
	1	2	3	1	2	3
$\sigma_e$	0.0010	(0.000016)		0.0010	(0.000018)	
$\delta_0$	0.0506	(0.0059)		0.0491	(0.0211)	
$\delta_X(i)$	0.000034 (0.0010)	0.0040 (0.00049)	0.0057 (0.00060)	0.0023 (0.0025)	0.0018 (0.00094)	0.0038 (0.0014)
$\beta(1,i)$	0	0	0	1	6.7529 (2.6367)	0.0491 (0.1513)
$\beta(2,i)$	0	0	0	0	0	0
$\beta(3,i)$	0	0	0	0	0	0
$\theta(i)$	0	0	0	1.1265 (1.7761)	0	0
$K(1,i)$	1.0122 (0.6859)	0	0	0.7161 (0.3280)	0	0
$K(2,i)$	-0.1660 (0.5146)	0.3260 (0.3450)	0	-0.5561 (1.1870)	0.2664 (0.6427)	-0.6452 (0.3241)
$K(3,i)$	-1.7662 (1.5948)	-1.1197 (0.7416)	2.0727 (1.4281)	0.000000 (7.3278)	-0.1115 (0.8844)	0.8497 (2.2554)
$\lambda_1(i)$	-0.4675 (0.1724)	-0.5260 (0.3594)	-0.5618 (0.5248)	0.2059 (0.4217)	-4.5529 (1.8703)	-2.3324 (6.5327)
$\lambda_2(1,i)$	-0.8236 (0.4359)	-0.4524 (0.3843)	0.4572 (0.8277)	0	0	0
$\lambda_2(2,i)$	0.1415 (0.1715)	-0.7928 (0.1015)	0.6567 (0.5375)	33.3444 (1.4535)	-0.6677 (0.8862)	2.8922 (0.7544)
$\lambda_2(3,i)$	0.5759 (0.1224)	-0.0722 (0.3372)	-0.1384 (0.6088)	1.7459 (7.4420)	-0.1063 (0.6307)	0.1981 (1.8386)
LL	13926.0			13962.7		

< 표 5-2 > 추정 결과 정리( $A_2(3)E$ ,  $A_3(3)C$ )

	$A_2(3)E$			$A_3(3)C$		
$\sigma_e$	0.0010	(0.000013)		0.0010	(0.0014)	
$\delta_0$	0.0464	(0.0065)		-0.0172	(0.3008)	
	$i$			$i$		
	1	2	3	1	2	3
$\delta_X(i)$	0.0022 (0.00070)	-0.00057 (0.00043)	0.0026 (0.00030)	-0.0014 (0.0203)	0.00046 (0.0067)	0.00086 (0.0053)
$\beta(1,i)$	1	0	2.3080 (0.4340)	1	0	0
$\beta(2,i)$	0	1	0.5984 (0.1882)	0	1	0
$\beta(3,i)$	0	0	0	0	0	1
$\theta(i)$	1.4554 (0.3838)	3.3685 (0.5863)	0	2.0074 (0.4834)	6.6899 (0.5033)	64.0311 (0.2072)
$K(1,i)$	0.6832 (0.1068)	-0.0718 (0.0492)	0	1.0407 (0.2268)	-0.3006 (0.4145)	-0.0012 (0.2414)
$K(2,i)$	-1.5053 (0.2959)	0.6788 (0.1311)	0	0.0000022 (0.4411)	0.2665 (0.1152)	-0.0031 (0.0322)
$K(3,i)$	-0.7868 (0.7567)	-0.3642 (0.4632)	0.3407 (0.2479)	-10.0030 (0.2792)	-0.00000073 (0.0274)	0.3136 (0.7382)
$\lambda_1(i)$	0.2672 (0.0720)	-0.1139 (0.1118)	-0.8149 (0.2313)	-0.0814 (0.2897)	0.0560 (0.4380)	-0.1015 (0.1493)
$\lambda_2(1,i)$	0	0	0	0	0	0
$\lambda_2(2,i)$	0	0	0	0	0	0
$\lambda_2(3,i)$	6.0828 (0.8191)	-1.1535 (0.6435)	-0.1998 (0.2478)	0	0	0
LL	13953.2			13926.6		

< 표 5-3 > 추정 결과 정리( $A_2(3)C$ )

	$A_2(3)C$		
$\sigma_e$	0.0010	(0.0123)	
$\delta_0$	0.0597	(1.1511)	
	$i$		
	1	2	3
$\delta_X(i)$	0.00093 (0.1598)	-0.0018 (0.2491)	0.0013 (0.0233)
$\beta(1,i)$	1	0	7.5508 (0.1301)
$\beta(2,i)$	0	1	0.000000 (0.000000)
$\beta(3,i)$	0	0	0
$\theta(i)$	3.5030 (0.0920)	2.6455 (0.0866)	0
$K(1,i)$	0.3392 (0.0119)	0.000000 (2.3021)	0
$K(2,i)$	-0.5910 (0.1611)	1.1361 (0.1080)	0
$K(3,i)$	0.000000 (0.8834)	-4.5661 (0.8084)	0.1437 (0.1044)
$\lambda_1(i)$	0.0464 (0.1802)	-0.1364 (0.1966)	0.0082 (0.3309)
$\lambda_2(1,i)$	0	0	0
$\lambda_2(2,i)$	0	0	0
$\lambda_2(3,i)$	0	0	0
LL	13938.3		

< 표 6 > 기준 척도 별 모형 비교

기각되지 않은 모든 모형에 대하여 슈바르츠 척도(schwarz criterion)  $BIC$ , 내표본 절대 가격오차 (in-sample absolute pricing error)  $IPE$ , 외표본 절대 가격오차 (out-of-sample absolute pricing error)  $OPE$  를 나열하였다. 이때  $IPE$ 와  $OPE$ 는 bp(basis point)단위로 표시되었으며, 각 기준 척도 별로 최적화된 값을 굵은 활자로 나타내었다.

	$A_0(3)E$	$A_1(3)E$	$A_2(3)E$	$A_3(3)C$	$A_2(3)C$
$BIC$	13858.4	<b>13891.1</b>	13888.4	13867.9	13882.5
$IPE$	10.249	<b>10.242</b>	10.428	10.622	10.341
$OPE$	10.620	10.687	<b>10.584</b>	10.711	10.765

< 표 7 >  $A_1(3)E$  모형의 예측오차에 대한 통계량

이 표는 각 만기별로  $A_1(3)E$  모형의 수익률에 대한 예측오차의 통계량을 보여준다. 이때 예측오차는 각 주별로 예측된 수익률과 실제 수익률의 차이로 계산된다. 평균과 표준편차는 절대예측오차에 대하여 계산되었고 최대값과 최소값은 원예측오차로부터 구해진 값이다. 모든 결과는 bp(basis point)단위로 표시되었다.

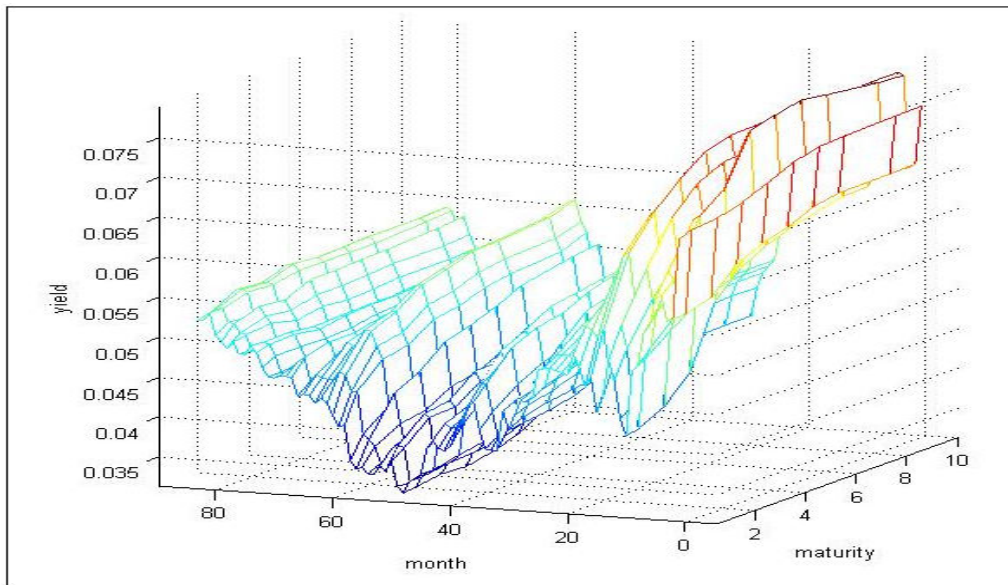
만기	내 표 본							외 표 본		
	6개월	1년	2년	3년	5년	7년	10년	4년	6년	9년
평균	8.3956	8.1633	9.7035	10.7131	9.9883	11.4052	10.0056	10.8229	10.1594	10.2650
표준편차	10.9275	10.8190	11.2583	12.1889	10.6318	12.7795	10.4502	11.2907	10.5913	10.8964
최대값	130.9210	125.8345	113.5772	108.2746	107.0981	109.0628	108.6924	108.4092	110.0510	108.6339
최소값	-56.7616	-56.7172	-57.1527	-50.2412	-52.4463	-55.2365	-60.9053	-49.2280	-59.9679	-53.2098

< 표 8 > 추정된 상태변수들과 주성분들 사이의 상관관계

칼만필터/QML 추정을 통하여 구해진 3가지 요인들( $X_1, X_2, X_3$ )과 주성분분석을 통하여 구해진 성분들(수준(level), 기울기(slope), 곡도(curvature)) 사이의 상관계수를 나타낸다.

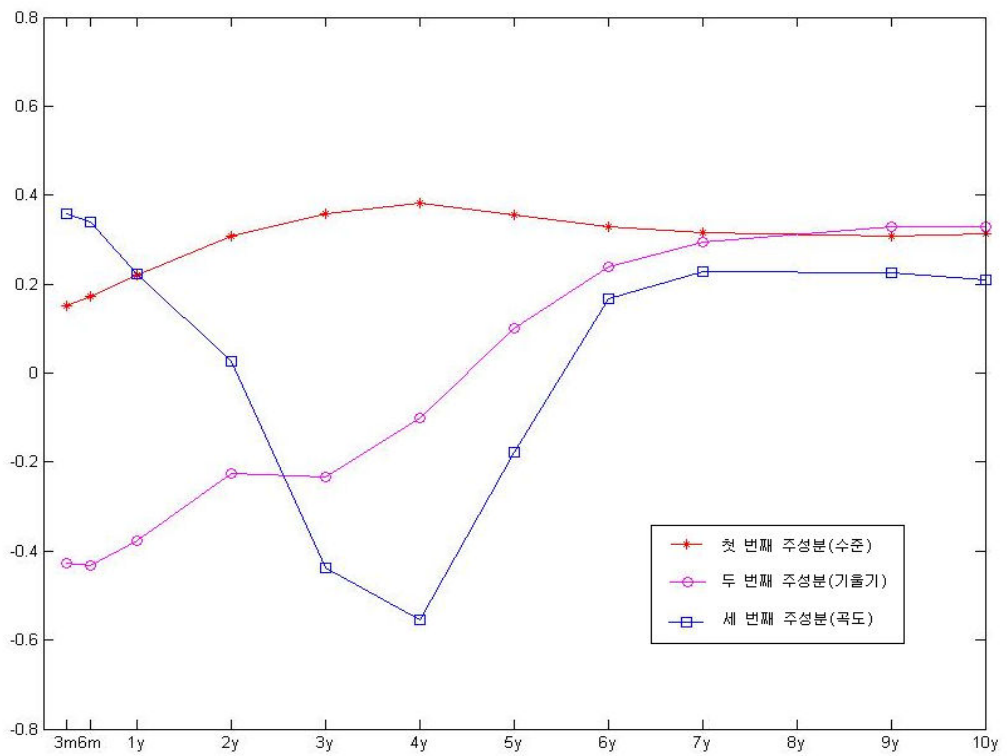
수준(level)		기울기(slope)		곡도(curvature)	
SV	상관계수	SV	상관계수	SV	상관계수
$X_2$	0.9533	$X_1$	0.5190	$X_3$	0.2142

< 그림 1 > 국채 수익률의 시계열 기간구조(주별)



< 그림 2 > 11가지 만기별 채권수익률에 대한 3가지 주성분의 계수

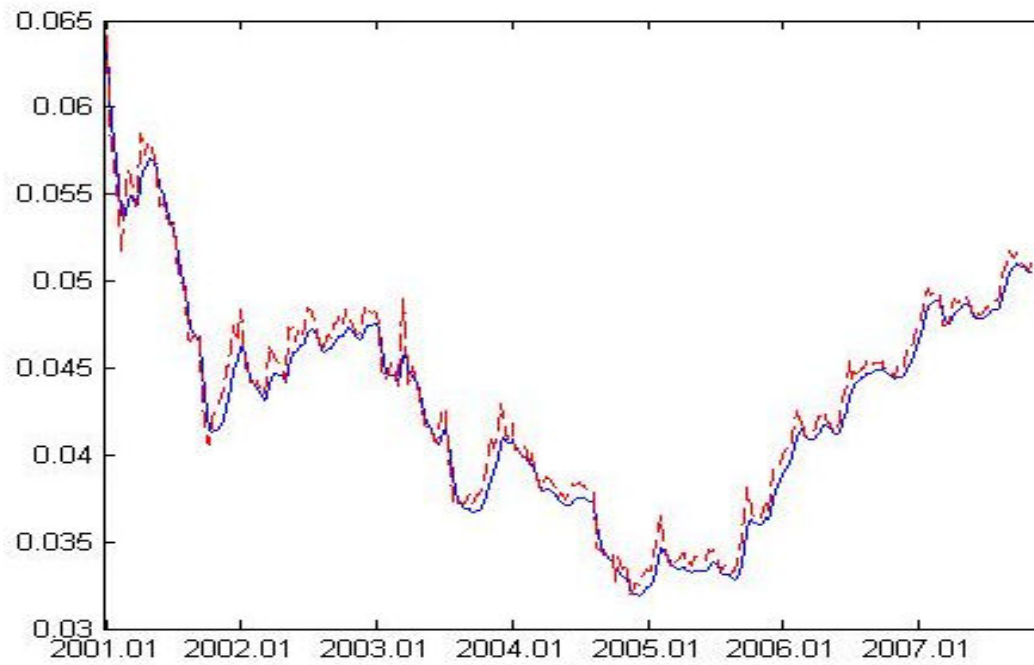
11가지 만기별 채권수익률(3개월, 6개월, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10년)에 대한 이자율변동 주성분분석 결과 처음 3가지 주성분의 계수들을 나타낸다.





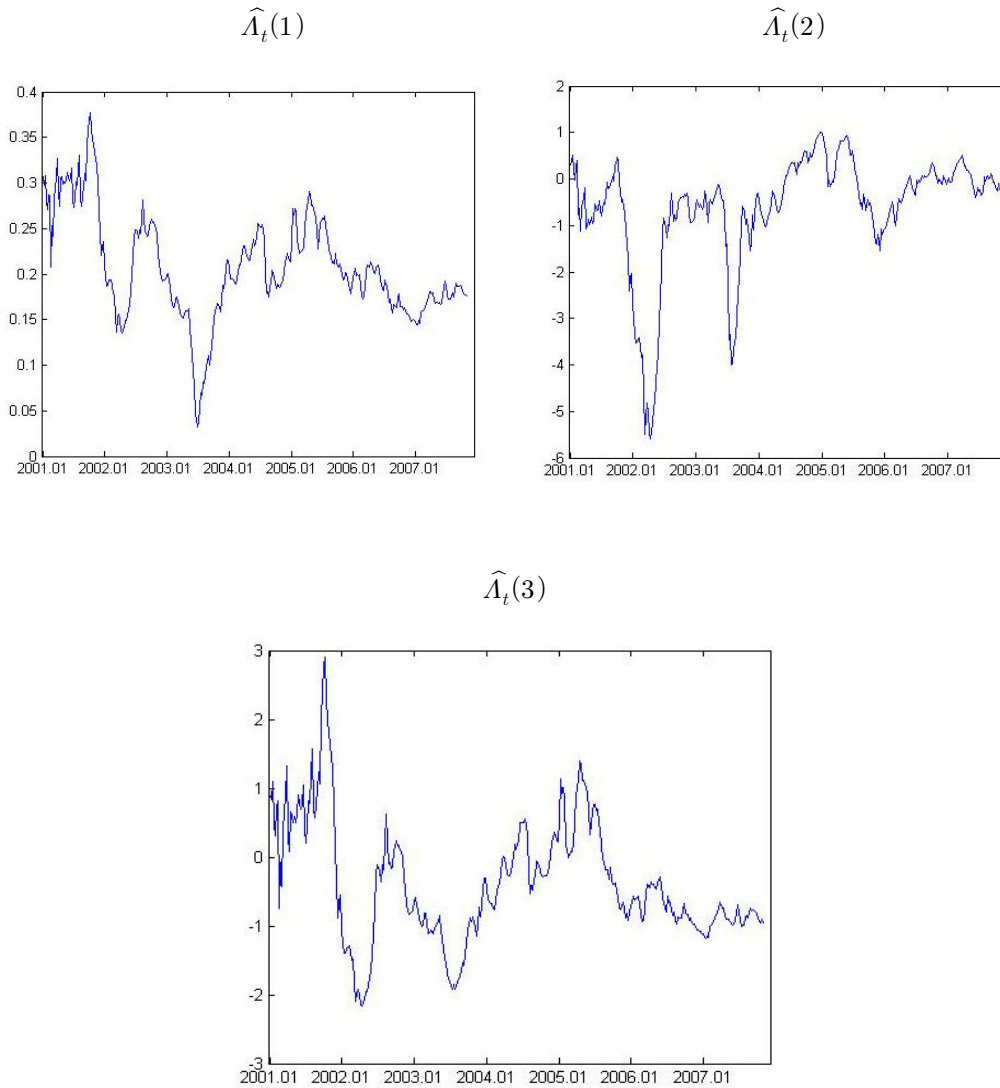
< 그림 3 >  $A_1(3)E$  모형으로부터 구한 단기이자율

추정에 사용되지 않은 3개월 만기 국고채권의 수익률로부터 구한 단기이자율 그래프이다. 이때 실선은 추정된 단기이자율을 나타내며 점선은 3개월 만기 국고채권의 수익률을 보여준다.

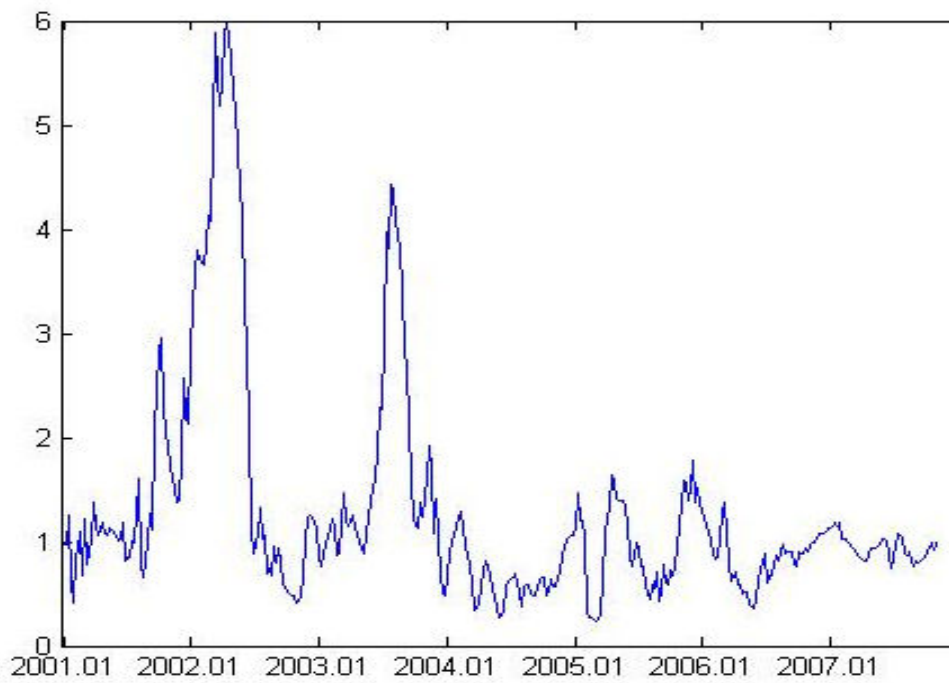


< 그림 4 >  $A_1(3)E$  모형으로부터 구한 요인별 위험가격

$A_1(3)E$  모형으로부터 추정결과 구해진 각 상태변수(요인)별 위험가격이다.  $\hat{\Lambda}_t(i) (i = 1, 2, 3)$  는  $i$  번째 상태변수의 위험가격을 나타낸다.

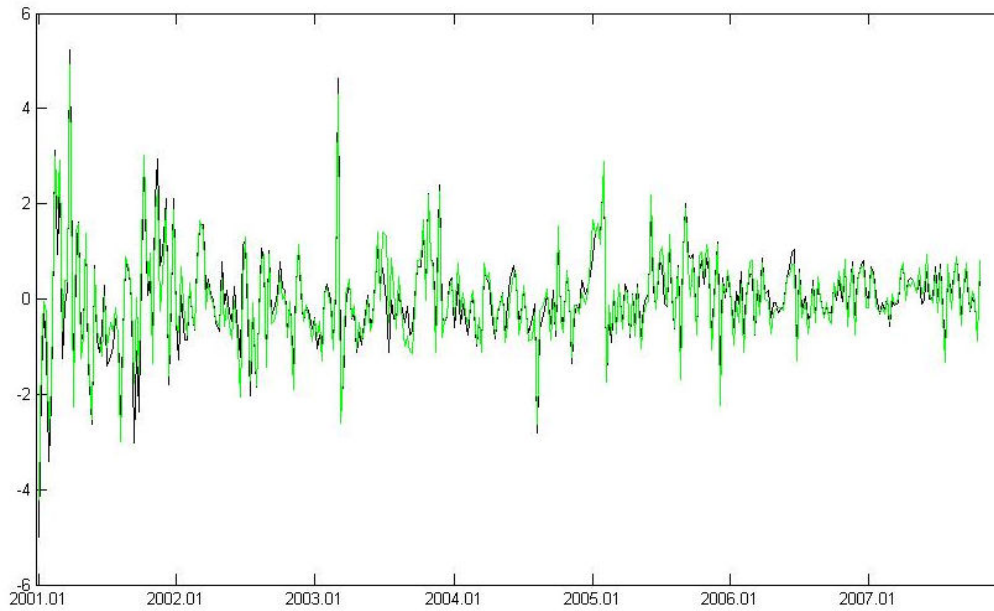


< 그림 5 >  $A_1(3)E$  모형으로부터 구한 총 시장 위험가격



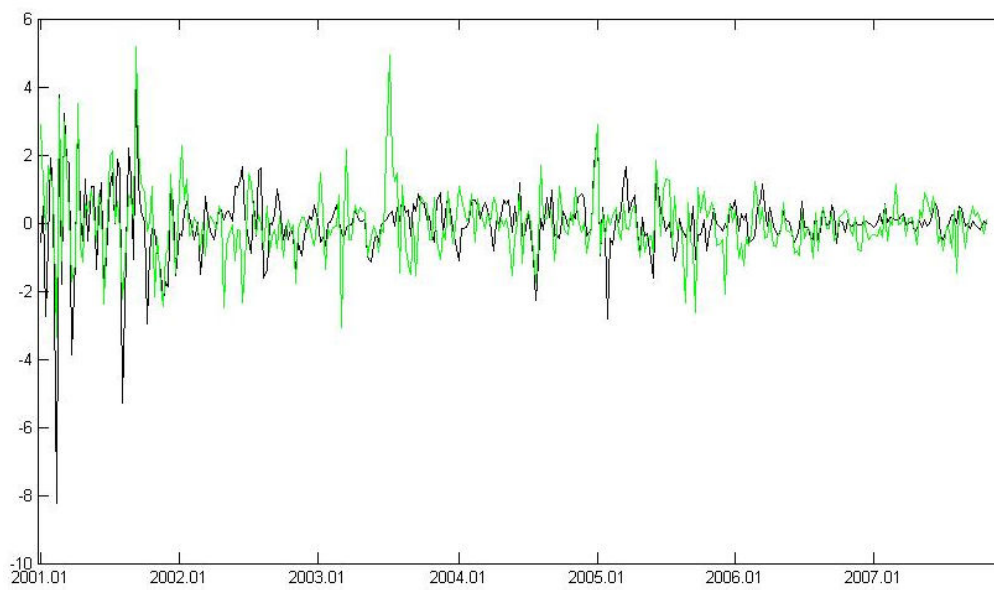
< 그림 6-1 > 두 번째 상태변수  $X_2$ 와 주성분1(수준)의 상관관계

$A_1(3)E$ 모형으로부터 추정결과 구해진 두 번째 상태변수  $X_2$ 와 첫 번째 주성분(수준) 사이의 관계를 그림으로 나타내었다. 이때 비교를 위하여 모든 결과는 표본평균과 표준편차를 사용해 정규화하였다. 짙은 실선은 상태변수  $X_2$ 의 시계열을, 옅은 실선은 주성분1(수준)의 시계열을 나타낸다.



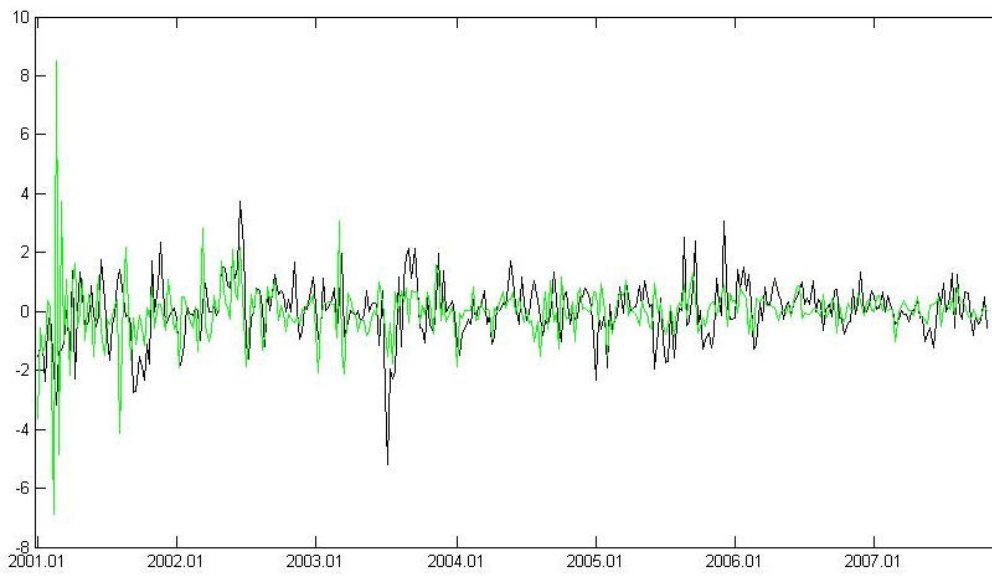
< 그림 6-2 > 첫 번째 상태변수  $X_1$ 와 주성분2(기울기)의 상관관계

< 그림 6-1 > 주식참고



< 그림 6-3 > 세 번째 상태변수  $X_3$ 와 주성분3(곡도)의 상관관계

< 그림 6-1 > 주식참고



## 참 고 문 헌

- 강장구, 김성환, 한철우, 2005, “칼만 필터를 이용한 이자율 기간구조 및 부도위험 추정”, 선물연구, 13, pp. 107-132.
- 국찬표, 박영석, 이정진, 1998, “국내 단기금리 변동행태에 관한 실증연구 -기업의 금리 위험 헤징을 위하여-”, 재무연구, 15, pp. 1-23.
- 김명직, 신성환, 2001, “상태-공간모형을 이용한 다요인 채권이론모형의 추정”, 선물연구, 9, pp. 1-23.
- 김인준, 한중호, 2000, “한국의 단기 이자율 모형에 대한 실증적 비교연구”, 선물연구, 7, pp. 65-86.
- Ahn, Dong-Hyun, Robert F. Dittmar, and A. Ronald Gallant, 2002, "Quadratic Term Structure Models: Theory and Evidence", Review of Financial Studies, 15, pp. 243-288.
- Bansal, Ravi, George Tauchen, and Hao Zhuo, 2004, "Regime-Shifts, Risk Premiums in the Term Structure, and the Business Cycle", Journal of Business & Economic Statistics, 22, pp. 396-409.
- Chen, R.-R., and L. Scott, 1992, "Pricing Interest Rate Options in A Two-Factor Cox-Ingersoll-Ross Model of The Term Structure", Review of Financial Studies, 5, pp. 613-636.

- Cox, John C., Jonathan E. Ingersoll Jr., and Stephen A. Ross, 1985, "An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices", *Econometrica*, 53, pp. 363-384.
- Dai, Qiang, and Kenneth J. Singleton, 2000, "Specification Analysis of Affine Term Structure Models", *The Journal of Finance*, 55, pp. 1943-1978.
- Dai, Qiang, and Kenneth J. Singleton, 2002, "Expectation Puzzles, Time-varying Risk Premia, and Dynamic Models of the Term Structure", *Journal of Financial Economics*, 63, pp. 415-441.
- Dai, Qiang, and Kenneth J. Singleton, 2003, "Term Structure Dynamics in Theory and Reality", *Review of Financial Studies*, 16, pp. 631-678.
- Das, S., 2002, "The Surprise Element: Jumps in Interest Rates", *Journal of Econometrics*, 106, pp. 27-65.
- de Jong, Frank, 2000, "Time-Series and Cross-Section Information in Affine Term Structure Models", *Journal of Business and Economics Statistics*, 18, pp. 300-314.
- Duan, Jin-Chuan, and Jean-Guy Simonato, 1999, "Estimating and Testing Exponential-Affine Term Structure Models by Kalman Filter", *Review of Quantitative Finance and Accounting*, 13, pp. 111-135.
- Duffee, Gregory R., 2002, "Term Premia and Interest Rate Forecasts in Affine Models", *The Journal of Finance*, 57, pp. 405-443.
- Duffee, Gregory R., and Richard H. Stanton, 2004, "Estimation of Dynamic Term



Structure Models", working paper, UC Berkeley.

Duffie, Darrel, and Rui Kan, 1996, "A Yield-Factor Model of Interest Rates", *Mathematical Finance*, 6, pp. 379-406.

Tang, Huarong, and Yihong Xia, 2007, "An International Examination of Affine Term Structure Models and the Expectations Hypothesis", *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 42, pp. 41-80.

Vasicek, O., 1977, "An Equilibrium Characterization of The Term Structure", *Journal of Financial Economics*, 5, pp. 177-188.

Zhou, H., 2001, "Jump-diffusion Term Structure and Ito Conditional Moment Generator", working paper, Federal Reserve Board.