WKB 근사 방법을 이용한 몬테 카를로 시뮬레이션 민감도 계산

Monte Carlo Greeks Using WKB Approximation

변석준(KAIST)
김준식(KAIST)

< 초록 >

본 논문은 Kampen(2006)에서 제안한 WKB 근사를 이용한 그릭스의 추정 방법의 정확성을 검증하는데 그 목적이 있다. Kampen et al(2008)에서 유럽식 스왑션과 버뮤다식 스왑션에 대해 검증하여 좋은 결과를 얻었다. 본 논문에서는 다양한 만기의 래칫 캐플릿과 스틱키 캐플릿의 그릭스에 대하여 정확하게 몬테 카를로 시뮬레이션을 통해 구하는 방법, 로그 정규 근사를 통해 구하는 방법, 그리고 WKB 근사를 통해 구하는 방법을 상호 비교하였다. 추정 결과 래칫 캐플릿의 경우 로그 정규 근사와 WKB 근사를 통한 추정치가 비슷한 결과를 보였다. 그러나 스틱키 캐플릿의 경우 WKB 근사를 통한 추정치가 로그 정규 근사를 통한 추정치보다 좋지 않은 것으로 나타났다. 따라서 WKB 근사가 로그 정규 근사를 완전히 대체할 만큼 여러 파생상품에 대해 좋은 결과를 보이지 않는다는 사실을 확인할 수 있었다.

Ⅰ. 서론

많은 종류의 파생상품이 생겨나면서 파생상품의 가치를 측정하는 방법에 대한 연구의 중요성이 대두되고 있다. 현재 파생상품의 가치를 측정하는 대부분의 방법은 몬테 카를로 시뮬레이션(Monte Carlo Simulation)을 바탕으로 한다. 이러한 시뮬레이션은 대개 파생상품의 기초 자산의 동태(process)가 확산과정의 추계적인 미분 방정식(diffusion stochastic differential equation)를 따른다는 가정하에서 설계되어 왔다. 그리고 이를 이용해 파생상품의 민감도를 계산하고 있다. 기초 자산의 동태가 점프를 포함하지 않는 확산과정의 추계적인 미분 방정식을 따른다고 가정하는 경우 오일러 근사(Euler scheme) 또는 (약한) 이차 근사식(a (weak) second order scheme)을 이용해서 시뮬레이션을 설계하고 있다. 이에 대한 연구문헌으로는 Kloeden & Platen(1992), Milstein & Tretyakov(2004) 등이 있다. 반면 기초 자산의 동태가 점프를 포함하는 확산과정의 추계적인 미분 방정식을 따른다고 가정하는 경우에 대해서는 점프를 포함하는 모형의 시뮬레이션을 설계하고 있다. 이에 관한 연구문헌은 Cont & Tankov(2003), Glasserman & Merener(2003), Broadie & Kaya(2004), Davis & Johansson(2006), Forster et al(2008) 등이 있다.

그릭스(Greeks)는 파생상품의 민감도로 이를 측정하는 것은 매우 중요하다. 왜냐하면 민감도는 파생상품을 헤지(hedge)하는 거래전략을 결정하는데 중요한 역할을 하기 때문이다. 그러므로 민감도를 측정하는데 소요되는 시간과 비용을 줄이는 것은 매우 중요하다.

만약 파생상품의 권리 행사일(exercise date)까지 기초 자산의 동태를 알 수 있다면 파생상품의 가치와 민감도의 측정에 소요되는 시간과 비용을 줄일 수 있다. 또한 특정 시점에서 기초 자산의 동태에 대한 밀도를 알 수 있고 이를 이용해 표본을 효과적으로 추출할 수 있는 방법이 존재한다면 파생상품의 가치와 민감도를 쉽게 측정할 수 있다. 그러나 실제로 이런 이상적인 경우는 존재하지 않는다.

따라서 여러 학자들은 파생상품의 가치와 민감도를 쉽고 정확하게 측정하기 위해 기초 자산의 동태에 대한 밀도를 여러 가지 방법으로 근사하였다. Kurbanmuradov, Sabelfeld & Schoenmakers(2002)는 LIBOR 시장 모형의 전이밀도(transition density) 함수를 로그정규 근사(lognormal approximation)를 통해 근사하여 스왑션(swaption)의 가치를 계산하였다. Hunter, Jäckel & Joshi(2001), Pelsser, Pietersz & van Regenmortel(2004)는 추세항 근사(drift approximation)를 통해 LIBOR 시장 모형의 시뮬레이션 속도를 증가시켰다. 또한 그릭스의 계산을 정확하고 쉽게 하기 위한 연구도 진행되어왔다. Ryosuke et al(2006)에서는 기존의 근사와는 다른 새로운 점근적 근사를 통하여 그릭스를 계산하고 그릭스의 분산을 줄였다. Elie, Fermanian & Touzi(2007)는 그릭스의 커널을 변수의 난수화(randomization)를 통하여 추정하였다.

본 논문에서는 WKB 근사를 이용해 기초 자산의 동태에 대한 밀도를 근사하여 선도 LIBOR 이자율에 대한 파생상품의 가격과 민감도를 측정해보려고 한다. WKB 근사는 양자역학에서 파동함수를 지수함수로 계산하는 반고전적(semiclassical) 계산법으로 물리 분야

에서 주로 쓰이고 있다. WKB 근사는 선형방정식과 슈레딩거 방정식과 같은 이차 미분 방정식에 대한 일반적인 근사법으로 이 논문에서는 이를 추계적인 이차 미분 방정식에 적용을 하여 커널 함수를 근사할 것이다.

논문은 다음 순서로 전개된다. Ⅱ장에서는 WKB 근사를 설명하기 위한 기본적인 구조에 대해 설명할 것이다. Ⅲ장에서는 커널과 그들의 미분 값에 대해 적분을 이용해 나타낸 확률적 표현(probabilistic representations)과 그에 대한 추정에 대해 설명할 것이다. 특히 미분 값의 분산이 특수한 형태의 커널에 의해 갑자기 커지는 것을 막기 위한 설정에 대해 설명할 것이다. Ⅳ장에서는 기초 자산의 전이밀도함수를 근사하는데 사용하는 WKB 근사에 대한 이론에 대해 설명할 것이다. Ⅴ장에서는 LIBOR 이자율의 기본적인 동태와 이자율의 관련된 파생상품에 대해 설명할 것이다. 앞에서 설명한 이론을 바탕으로 Ⅵ장에서는 LIBOR 커널에 WKB근사를 적용하고 이를 이용해 LIBOR 이자율에 관련된 파생상품의 가격과 델타(delta)를 측정해볼 것이다. 마지막으로 Ⅶ장 결론에서는 이 논문이 가지는 의미와 이 논문의 한계점에 대해 논의 할 것이다.

Ⅱ. 기본 구조

$X = (X^1, \ldots, X^n)$ 를 $\mathbb{R}_+^n$ ($\mathbb{R}_+ := \{x : x > 0\}$) 에서 가격측도(pricing measure) P 에서의 파

생상품의 마코브 동태(Markovian process)라고 하자. P 는 할인 기준자산(discounting numeraire)이 $B(>0)$로 정해져 있고 확률공간(probability space)에서 정의된다. 확률공간에서의 브라운 동태에 대해 정의하자. 확률공간 $(\Omega, F, (F_t)_{t\in[t_0,T]}, P)$ 에서의 n차원 표준 브라운 운동을 W 라 하면 (F_t) 는 W 에 의해 생성된 필터(filtration)의 P -증대(P -augmentation)이다. X 가 다음 추계적인 미분 방정식(stochastic differential equation)을 따른다고 하자.

$$\frac{dX^i}{X^i} = \mu(t,X)dt + \sigma_i' dW \tag{2.1}$$

$\mu(t,x)$ 와 행렬 $\sigma(t,x) = (\sigma^{ij}(t,x)), t\in[t_0,T], x\in\mathbb{R}^n_+$ 는 모든 $x_0\in\mathbb{R}^n_+$ 에 대해 $X_{t_0} = x_0 = X_{t_0}^{t_0,x_0}$ 를 만족하는 (2.1)에 대한 유일한 해답을 가진다고 하자. 또한 X 가 x,y,s,t 에 대해 미분 가능한 전이밀도함수를 다음과 같이 가진다고 하자.

$$p(t,x,s,y), \quad t_0\le s\le t\le T, \quad x,y\in\mathbb{R}^n_+ \tag{2.2}$$

(2.1)의 미분 방정식과 (2.2)의 전이밀도함수의 존재성을 보장하기 위해서는 $\mu(\cdot,\cdot)$ 와 $\sigma(\cdot,\cdot)$ 가 유계(bounded)이어야 하고 이들을 미분한 것도 유계이어야 하며 변동성 행렬 $\sigma(t,x)$ 가 모든 (t,x), $t\in[t_0,T]$, $x\in\mathbb{R}^n_+$에서 어떤 $0<\lambda_1\le\lambda_2$ 에 대해

$$0<\lambda_1\le\left|(\sigma'\sigma)(t,x)\right|\le\lambda_2 \tag{2.3}$$

을 만족해야 한다. 일반성을 잃지 않기 위해 $B_0=1$ 로 두고 어떤 정지 시점(stopping time) τ 에서 $f(X_\tau)B_\tau$ 의 형태로 가치를 가지는 조건부 청구권(contingent claim)을 생각

하자. 이 청구권의 t_0 시점에서 가격은 다음과 같다.

$$u(t_0, x_0) = E(f(X_T^{t_0,x_0})) \tag{2.4}$$

$t(t_0 \le t \le T)$ 시점의 할인 가치 동태는

$$u_t := u(t, X_t) := E^{F_t}(f(X_T)) = \int p(t, X_t, T, y) f(y) dy \tag{2.5}$$

와 같이 나타난다. 위의 u_t 는 아래의 코시 문제(Cauchy problem)의 유일한 해답이 된다.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j (\sigma_i' \sigma_j)(t,x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} x_i \mu(t,x) \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0, \quad u(T,x) = f(x) \tag{2.6}$$

Ⅲ. 확률적 표현과 추정

매끄러운 함수(smooth function) $u : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}_+$ 와 전이 커널(transition kernel)로도 생각할 수 있는 매끄러운 커널 함수 $p : \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}_+$ 을 정의하자. 그리고 이 두 함수와 적분을 이용한 확률적 표현은

u 의 기대 값(expectation) $I(x) := \int p(x, y) u(y) dy$

그에 대한 기울기(gradient) $\frac{\partial I}{\partial x}(x) = \int \frac{\partial}{\partial x} p(x, y) u(y) dy$ (3.1)

(단, $\frac{\partial I}{\partial x} := (\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n})$)

와 같다. ζ 를 밀도함수가 $\phi(>0)$ 인 $\mathbb{R}_+^n$ 에서 정의되는 확률변수라고 하자. 그렇다면 (3.1)

의 $I(x)$ 에 대한 몬테 카를로 불편 추정량(unbiased Monte Carlo estimator)은

$$\hat{I}(x) := \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} p(x, {}_m\zeta)\frac{u({}_m\zeta)}{\phi({}_m\zeta)} \tag{3.2}$$

와 같이 나타난다. ${}_m\zeta$ ($m = 1, \dots, M$)은 밀도함수 ϕ을 따르는 표본으로 서로 독립이고 같은 분포를 따른다(Independent and Identically distributed). $I(x)$의 기울기에 대한 몬테 카를로 추정량은

$$\frac{\partial \hat{I}}{\partial x}(x) := \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} \frac{\partial}{\partial x} p(x, {}_m\zeta)\frac{u({}_m\zeta)}{\phi({}_m\zeta)} \tag{3.3}$$

와 같이 나타난다. ϕ의 선택에 따라 $I(x)$의 효율적인 추정량이 될 수 있지만 기울기에 대한 추정량은 큰 결점을 가지고 있다. 커널 $p(x,\cdot)$가 델타 함수처럼 급격하게 뾰족해지면 기울기의 분산은 극단적으로 커질 수 있고 이로 인해 문제가 발생된다. 그러나 Kampen et al(2008)에서 제안한 추정량의 경우 이 결점을 보완하고 있다. 그 추정량은 (3.3)의 ${}_m\zeta$를 단순히 밀도함수 ϕ를 따르는 것이 아니라 초기값 x에 의존하는 밀도함수 $\phi(x,\cdot)$를 따르도록 하여 분산이 극단적으로 커지는 것을 방지하고 있다. 이에 대한 몬테 카를로 추정량은

$$\frac{\partial \hat{I}}{\partial x}(x) = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} \frac{\partial}{\partial x}\frac{p(x, g(x, {}_m\xi))u(g(x, {}_m\xi))}{\phi(x, g(x, {}_m\xi))} \tag{3.4}$$

와 같다. $g : \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n_+$ 는 $\left|\partial g(x,z)/\partial z\right| \neq 0$ 를 만족하는 매끄러운 함수이고 $\zeta^x := g(x,\xi)$는 밀도함수가 $\phi(x,\cdot)$인 $\mathbb{R}^n_+$에서 정의되는 확률 변수이다. ξ는 밀도함수 λ

를 가진다. 이 추정량은 LIBOR 이자율에 대한 파생상품의 델타를 몬테 카를로 시뮬레이션을 통하여 구할 때 사용된다.

IV. 전이밀도함수를 위한 WKB 근사에 대한 이론정리

Kampen(2006)에서 언급하는 포물형 식(parabolic equation)의 WKB 확장에 대해 정리해보자. 우선 포물형 확산 연산자(parabolic diffusion operator)를 다음과 같이 정의하자.

$$\frac{\partial u}{\partial t}+Lu\equiv\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{2}\sum_{i,j}a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_i b_i\frac{\partial u}{\partial x_i} \tag{4.1}$$

표기의 간편함과 일반성을 잃지 않기 위해 확산 계수(diffusion coefficient) a_{ij} 와 일차 계수(first order coefficient) b_i 는 오직 공간 변수(spatial variable) x 에 관한 계수라고 가정하자. 그리고 $\delta t := T-t$ 라 하고 다음 두 함수를 정의하자.

$$(x,y)\rightarrow d(x,y)\geq 0,\quad (x,y)\rightarrow c_k(x,y)\geq 0,\quad k\geq 0 \tag{4.2}$$

두 함수 모두 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$에서 정의되고 d^2, c_k 는 매끈한 함수이다. 이 두 함수를 이용하여 점별 유효(pointwise valid)한 WKB 표현의 형태를 나타내면

$$p(t,x,T,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\delta t}^n}\exp\left(-\frac{d^2(x,y)}{2\delta t}+\sum_{k=0}^{\infty}c_k(x,y)\delta t^k\right) \tag{4.3}$$

와 같고 이는 다음 최종값 문제(final value problem)의 해답이 될 수 있다.

$$\frac{\partial p}{\partial t}+Lp=0,\quad p(T,x,T,y)=\delta(x-y),\quad y\in\square^n\,(y \text{ 는 고정}) \tag{4.4}$$

단, WKB 표현이 해답이 되기 위해서는 다음 조건들을 만족해야 한다.

(A) 연산자 L은 $\square^n$에서 균등하게 타원형(uniformly elliptic)이어야 한다. 즉, $(a_{ij}(x))_{i,j=1}^n$의 행렬놈(matrix norm)이 x에서 균등하게 $0<\lambda<\Lambda<\infty$에 의해 위, 아래로 유계이어야 한다.

(B) 매끈한 함수 $x\to a_{ij}(x)$와 $x\to b_i(x)$, 이들을 미분한 값들이 모두 유계이어야 한다.

Kampen(2006)에서는 위의 두 조건에 아래의 균일 한계성(uniform boundedness) 조건을 추가하고 있다.

(C) 각각의 다중지표(multiindex) α와 모든 $i,j,k\,(1\le i,j,k\le n)$에 대해

$$\left|\frac{\partial^\alpha a_{jk}}{\partial x^\alpha}(x)\right|,\left|\frac{\partial^\alpha b_i}{\partial x^\alpha}(x)\right|\le c\exp(c|x|^2) \tag{4.5}$$

을 만족하는 상수 c가 존재해야 한다.

(A), (B)가 성립하게 되면 위의 최종값 문제의 기본적인 해답은

$$p(\delta t,x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\delta t}^{\,n}}\exp\Big(-\frac{d^2(x,y)}{2\delta t}+\sum_{k\ge 0}c_k(x,y)\delta t^k\Big) \tag{4.6}$$

로 표현되고 (C)를 만족하게 되면 함수 d, c_k를 $y\in\square^n$ 주변에서 테일러 전개(Taylor expansion)한 값과 d,c_k의 값이 광범위하게(globally) 같게 된다.

(4.6)의 $p(t,x,T,y)$를 최종값 문제의 포물형 식(parabolic equation)에 대입하여 순환적

으로 d, c_k 를 구할 수 있다. 식을 정리하면 $\delta t^i = (T-t)^i (i \ge -2)$ 인 항만 남는데 δt^{-2} 인 항을 정리하면 다음 식이 유도된다.

$$d^2 = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{x_i}^2 a_{ij} d_{x_j}^2 \tag{4.7}$$

$d_{x_k}^2$ 는 d^2 을 x_k에 대해 미분한 것이다. (4.7)의 경계 조건(boundary condition)은 $x=y$ 이면 $d(x,y)=0$ 로 주어진다. δt^{-1} 인 항을 정리하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}Ld^2+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}(x)+a_{ji}(x))\frac{d_{x_j}^2}{2}\right)\frac{\partial c_0}{\partial x_i}(x,y)=0 \tag{4.8}$$

(4.8)의 경계 조건은 Kampen(2006)에 따르면 $c_0(y,y) = -\frac{1}{2}\ln\sqrt{\det(a_{ij}(y))}$ 로 주어진다. 이로 인해 각각의 $y \in \Box^n$에 대해 c_0 를 구할 수 있다. 마지막으로 $\delta t^k (k \ge 0)$ 인 항을 정리하면 다음 점화식을 얻을 수 있다.

$$(k+1)c_{k+1}(x,y)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(x)\left(\frac{d_{x_i}^2}{2}\frac{\partial c_{k+1}}{\partial x_j}+\frac{d_{x_j}^2}{2}\frac{\partial c_{k+1}}{\partial x_i}\right)=R_k(x,y)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(x)\sum_{l=0}^{k}\frac{\partial c_l}{\partial x_i}\frac{\partial c_{k-l}}{\partial x_j}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial^2 c_k}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i(x)\frac{\partial c_k}{\partial x_i} \tag{4.9}$$

몇몇 고전 모형에서는 확산 연산자를 라플라스 연산자(Laplace operator)로 바꾸는 것이 가능하다LIBOR 시장 모형의 경우 Ait-Sahalia(2008)의 논문에서 언급하는 라플라스 연산자가 존재하는 것과 동치인 조건을 만족시킨다고 Kampen et al(2008)에서는 말하고 있다. 라플라스 연산자를 이용하면 위의 식은 다음과 같이 정리된다.

$$d^2(x,y)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2$$

$$\sum_{i=1}^{n}b_i(x_i-y_i)+\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)\frac{\partial c_0}{\partial x_i}=0$$

$$(k+1)c_{k+1}(x,y)+\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)\frac{\partial c_{k+1}}{\partial x_i}=R_k(x,y) \tag{4.10}$$

Kampen et al(2008)에서는 (4.10)의 아래의 두 식을 x 와 y 사이의 선분을 따라 적분을 하면 다음 두 식을 얻는다고 말하고 있다.

$$c_0(x,y)=\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)\int_0^1 b_i(y+s(x-y))ds$$

$$c_{k+1}(x,y)=\int_0^1 R_k(y+s(x-y),y)s^k ds\,,\ \ k\geq 0 \tag{4.11}$$

WKB 근사를 이용한 델타에 대한 몬테 카를로 추정량의 경우 Kampen et al(2008)에 따르면 실제 델타에 수렴하기 때문에 WKB 근사를 이용한 델타에 대한 몬테 카를로 추정량은 실제 델타를 대체할 수 있다.

Ⅴ. LIBOR 시장모형과 파생상품

1. LIBOR 이자율의 동태

기존 Jamshidian(1997)에서는 만기의 유한한 집합을 바탕으로 한 LIBOR 시장모형에 대해 다음과 같이 설명하고 있다. 단위기간구조(tenor structure)가 유한 개의 날짜로 구성되어 있다고 한다면

$$0 = T_0 < T_1 < \cdots < T_N < T_{N+1} \tag{5.1}$$

로 나타낼 수 있다. 단위기간 사이의 길이는 $\delta_i = T_{i+1} - T_i (i = 0, \ldots, N)$ 이고 일반적으로 3개월 또는 6개월이다. 설명의 편의를 위해 δ_i 가 δ 로 고정되어 있다고 가정하자. 그리고 좌연속(left-continuous) 함수인 $\eta : (0, T_{N+1}] \to \{1, \ldots, N+1\}$ 을 시간 t 에서

$$T_{\eta(t)-1} < t \le T_{\eta(t)} \tag{5.2}$$

을 만족시키는 유일한 정수를 취하는 함수로 정의하자. $B_i(t)$ 는 T_i 가 만기인 순수할인채권(discounted zero coupon bond)의 $t \in [0, T_i]$ 시점에서의 가격이라 하면 $t (\le T_i)$ 시점에서 기간 $[T_i, T_{i+1}]$ 에 대한 선도 LIBOR 이자율 $L_i(t)$ 는 다음과 같다.

$$L_i(t) = \frac{1}{\delta}\left(\frac{B_i(t)}{B_{i+1}(t)} - 1\right), \quad i = 1, \ldots, N \tag{5.3}$$

선도 LIBOR 이자율의 정의를 확장시키기 위해 $t (> T_i)$ 시점에 대해 $L_i(t) = L_i(T_i)$ 로 정의하자. 임의의 시간 $t (< T_N)$ 시점에서 $B_N (N > i)$ 의 가격은 다음과 같다.

$$B_N(t) = B_{\eta(t)}(t) \prod_{j=\eta(t)}^{N-1} \frac{1}{1 + \delta L_j(t)} \tag{5.4}$$

선도 LIBOR 이자율 모형의 동태는 모형의 변동성(volatility)과 모형을 정의하는 확률측도(probability measure)에 따라 달라진다. T_{N+1} 이 만기인 순수할인채권을 기준자산

(numeraire)으로 하는 선도측도, P^{N+1}에서 모형을 정의하자. P^{N+1}은 달리 말하면 B_{N+1}을 기준자산으로 하는 등가 마틴게일 측도(equivalent martingale measure)라고 할 수 있다. 즉 t시점에서 자산의 가격을 $V(t)$라 한다면

$$\frac{V(t)}{B_{N+1}(t)} = E^{N+1}\left(\frac{V(T)}{B_{N+1}(T)} \middle| f_t\right), \quad (t < T \le T_{N+1}) \tag{5.5}$$

을 만족한다. f_t는 t시점에서의 정보의 집합을 뜻한다. 선도 LIBOR 이자율 모형이 결정된 변동성을 가지고 브라운 운동(Brownian motion)을 따른다는 가정하에서 선도측도(forward measure)에서의 동태는 다음과 같다.

$$\frac{dL_i(t)}{L_i(t)} = -\sum_{j=i+1}^{N} \frac{\delta L_j(t)\gamma_i^{'}(t)\gamma_j(t)}{1+\delta L_j(t)}dt + \gamma_i^{'}(t)dW^{N+1}(t) \tag{5.6}$$

$\gamma_i(t)$는 결정된(deterministic) 함수라 가정하고 $W^{N+1}(t)$는 선도측도에서의 표준적인 d차원의 위너 동태(Wiener process)라 하자. (5.6)에 로그 오일러 근사(log-Euler scheme)를 적용시키면 다음 근사식을 얻는다.

$$L_i(t_{k+1}) = L_i(t_k)\times\exp([\mu_i(L(t_k),t_k) - \frac{1}{2}\|\gamma_i(t_k)\|^2][t_{k+1}-t_k] + \sqrt{t_{k+1}-t_k}\gamma_i^{'}(t_k)Z_{k+1}) \tag{5.7}$$

$$\mu_i(L(t_k),t_k) = -\sum_{j=i+1}^{N} \frac{\delta L_j(t_k)\gamma_i^{'}(t_k)\gamma_j(t_k)}{1+\delta L_j(t_k)}$$

$Z_1, Z_2, \cdots$은 $\mathbb{R}^d$에서 서로 독립적이고 $N(0,I)$을 따르는 확률 벡터이다. (5.7)의 근사식은 뒷장에서 LIBOR 이자율에 대한 파생상품의 가격과 델타를 몬테 카를로 시뮬레이션을 통하여 구할 때 사용된다.

2. 래칫 캐플릿(Ratchet caplet), 스틱키 캐플릿(Sticky caplet)

만기가 T_n 이고 행사가격(strike price)가 K 인 일반적인 캐플릿의 경우 T_{n+1} 시점에서 $\delta_n \max(L_n(T_n) - K, 0)$ 의 가치를 가지게 된다. 그리고 만기가 T_n 이고 스프레드(spread)가 s 인 래칫 캐플릿의 경우에는 T_{n+1} 시점에서

$$\delta_n \max(L_n(T_n) - K_n, 0) \quad (K_n = L_{n-1}(T_{n-1}) + s) \tag{5.8}$$

의 가치를 가진다. 이 경우 T_n 시점에의 만기가 T_n 인 선도 LIBOR 이자율 L_n 뿐만 아니라 만기가 T_{n-1} 인 선도 LIBOR 이자율 L_{n-1} 도 캐플릿의 가치결정에 영향을 주게 된다. 반면 만기가 T_n 이고 스프레드가 s 인 스틱키 캐플릿의 경우에는 T_{n+1} 시점에서

$$\delta_n \max(L_n(T_n) - K_n, 0) \quad (K_n = \min(L_{n-1}(T_{n-1}), K_{n-1}) + s, K_0 = L_0(T_0)) \tag{5.9}$$

의 가치를 가진다. 이 경우 T_n 시점에의 만기가 T_n 인 선도 LIBOR 이자율 L_n 뿐만 아니라 그 이전의 시점을 만기로 가지는 선도 LIBOR 이자율들도 캐플릿의 가치결정에 영향을 주게 된다.

VI. LIBOR 시장 모형에 대한 적용

1. LIBOR 커널에 대한 WKB 근사

단위 기간 구조가 $0 = T_0 < T_1 < \cdots < T_n < T_{n+1}$ 이고 측도가 P^{n+1} 인 LIBOR 시장 모델은 V장에 따르면 다음을 만족한다.

$$dL_i(t) = -\sum_{j=i+1}^{n} \frac{\delta_j L_i(t) L_j(t) \gamma_i^{'}(t) \gamma_j(t)}{1+\delta L_j(t)} dt + L_i(t)\gamma_i^{'}(t) dW^{n+1}(t) =: \mu_i(t,L) L_i dt + L_i(t)\gamma_i^{'} dW^{n+1} \quad (6.1)$$

단위 기간 사이의 길이는 $\delta_i = T_{i+1} - T_i$ 이고 변동성 함수는 $t \to \gamma_i(t) = (\gamma_{i,1}(t), \ldots, \gamma_{i,d}(t))$ 이다. 행이 $\gamma_i^{'}$ 로 이루어져 있는 행렬을 Γ 로 정의하고 Γ 가 역행렬이 존재한다고 가정하자. 그리고 Γ 는 t 와 관련 없는 함수라고 가정하자. Γ 가 시간에 의존하는 경우는 Kampen et al(2007)에 설명되어 있다. $W^{n+1}(t)$ $(0 \le t \le T_n)$ 는 P^{n+1} 에서 정의되는 표준적인 $d(1 \le d \le n)$ 차원의 위너 동태라고 하자. d 는 추동요인(driving factor)의 수이다. 여기에서는 시간 간격 $[0, T_1)$ 에서 최대 요소(full factor) LIBOR 시장 모형 $(d = n)$ 에 대해 WKB 근사를 적용해보도록 하자.

LIBOR 이자율 동태의 전이밀도함수 $p^L(s,u,t,v)(0 < s < t)$ 을 WKB 근사를 이용해 근사하기 위해서는 (6.1)의 추계적 미분 방정식을 아래의 형태로 변환시켜야 한다.

$$dY_i = \mu_i^Y(t,Y)dt + dW_i^{n+1}, \ 1 \le i \le n \quad (6.2)$$

우선 Y 에 대한 전이밀도함수 $p^Y(s,x,t,y)$ 을 근사하기 위해서는 IV장의 식들을 이용하여 $c_k(k = 0,1,\ldots)$ 을 계산해야 한다. $p^Y(s,x,t,y)$ 을 근사하면 밀도 변환공식을 이용하여 $p^L(s,u,t,v)$ 을 계산할 수 있다. (6.2)의 $\mu^Y(t,Y)$ 를 계산하기 위해서 (6.1)을 $K_i = \ln L_i (1 \le i \le n)$ 로 변환하자. 변환 후에 K_i 의 동태는 다음과 같다.

$$dK_i = \frac{1}{L_i}dL_i - \frac{1}{2L_i^2}d\langle L_i\rangle = (-\frac{\gamma_i'\gamma_i}{2} + \mu_i(t, e^{K_1}, \ldots, e^{K_n}))dt + \gamma_i' dW^{n+1} \tag{6.3}$$

μ_i는 (6.1)에서 주어진 것이다. K의 동태에 관련된 계수들은 모두 유계되어 있으므로 IV 장에서 언급한 WKB 이론의 조건 (A), (B)를 만족시킨다. 따라서 K의 동태에 대한 전이 밀도함수를 구하는데 WKB 근사를 적용시킬 수 있다. 변환 $Y := \Gamma^{-1}K$를 통해 (6.2)를 얻을 수 있고 추세항 $\mu^Y(t,Y)$은 다음과 같다.

$$\mu_i^Y(t,Y) = V_i + \sum_{j=1}^{n}\Gamma_{ij}^{-1}\mu_j(t, e^{(\Gamma Y)_1}, \ldots, e^{(\Gamma Y)_n}),\ \ V_i = -\sum_{j=1}^{n}\Gamma_{ij}^{-1}\frac{|\gamma_j|^2}{2} \tag{6.4}$$

이 변환을 통해 포물형 확산 연산자의 확산 계수가 크로네커 델타 함수가 되어 확산항이 라플라시안 확산항으로 변환되고 이는 WKB 전개에 상당한 편리함을 제공한다. 이제 IV 장의 식들을 이용하여 c_0, c_1을 계산하자. 편의성을 위해.

$$F_l(s,x,y) := \frac{1}{(\Gamma(x-y))_l}\ln\frac{1+\delta_l e^{(\Gamma x)_l}}{1+\delta_l e^{(\Gamma y)_l}},\ \ 1 \le l \le n$$

$$a_{ij} := \gamma_i'\gamma_j,\ 1 \le i, j \le n \tag{6.5}$$

를 정의하고 이를 이용하여 c_0를 계산하면

$$c_0(s,x,y) = \sum_{i=1}^{n}V_i(y_i - x_i) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\Gamma_{ij}^{-1}(y_i - x_i)\sum_{l=j+1}^{n}a_{jl}F_l(s,x,y) \tag{6.6}$$

이 된다. 그리고 c_1을 계산하기 위해서 c_0의 미분 값들을 계산하면

$$\frac{\partial c_0}{\partial x_p}(s,x,y) = -V_p - \sum_{j=1}^{n}\Gamma_{pj}^{-1}\sum_{l=j+1}^{n}a_{jl}F_l(s,x,y) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\Gamma_{ij}^{-1}(y_i - x_i)\sum_{l=j+1}^{n}a_{jl}\frac{\partial F_l(s,x,y)}{\partial x_p}\ (1 \le p \le n)$$

$$\frac{\partial^2 c_0}{\partial x_p^2}(s,x,y) = -2\sum_{j=1}^{n}\Gamma_{pj}^{-1}\sum_{l=j+1}^{n} a_{jl}\frac{\partial F_l(s,x,y)}{\partial x_p} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\Gamma_{ij}^{-1}(y_i - x_i)\sum_{l=j+1}^{n} a_{jl}\frac{\partial^2 F_l(s,x,y)}{\partial x_p^2} \tag{6.7}$$

(단, $\dfrac{\partial F_l(s,x,y)}{\partial x_p} = \dfrac{\Gamma_{lp}}{(\Gamma(x-y))_l^2}\left(\dfrac{\delta_l e^{(\Gamma x)_l}}{1+\delta_l e^{(\Gamma x)_l}} - F_l(s,x,y)\right)$

$$\frac{\partial^2 F_l(s,x,y)}{\partial x_p^2} = \frac{2\Gamma_{lp}^2}{(\Gamma(x-y))_l^2}\left(F_l(s,x,y) - \frac{\delta_l e^{(\Gamma x)_l}}{1+\delta_l e^{(\Gamma x)_l}}\right) + \frac{\Gamma_{lp}^2}{(\Gamma(x-y))_l}\frac{\delta_l e^{(\Gamma x)_l}}{(1+\delta_l e^{(\Gamma x)_l})^2}$$)

이 된다. 위 식들을 이용해 $R_0(x,y)$를 구하면 아래와 같이 되고 이걸 이용해

$$R_0(x,y) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial c_0}{\partial x_i}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 c_0}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^{n}\mu_i^Y\frac{\partial c_0}{\partial x_i}$$

$$c_1(x,y) = \int_0^1 R_0(y + s(x-y), y)\,ds \tag{6.8}$$

와 같이 되고 c_1을 계산할 수 있게 된다. (6.8)의 두 번째 식의 경우에는 사다리꼴 공식(trapezoidal rule)을 이용하여 수치적으로 계산할 수 있다. 그리고 $(\Gamma x)_l = (\Gamma y)_l (1 \le l \le p)$인 경우에 특이점(singularity)가 사라지게 되는데 이 경우에는 로피탈 정리(L'Hospital's Rule)를 이용하여 극한값을 유도한 뒤 계산한다. 계산의 편의성을 위해서 행렬 Γ는 상삼각행렬(upper triangular matrix)이라 가정하면 $p^L(s,u,t,v)$은

$$p^L(s,u,t,v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}^{\,n}}\prod_{i=1}^{n}\frac{\Gamma_{ii}^{-1}}{v_i}\exp\left(-\frac{(\Gamma^{-1}(\ln\frac{v_1}{u_1},\ldots,\ln\frac{v_n}{u_n})')^2}{2(t-s)} + \sum_{k=0}^{\infty}c_k(s, S_s^{-1}(u), S_t^{-1}(v))(t-s)^k\right) \tag{6.9}$$

(단, $S_t^{-1}(v) := \Gamma^{-1}(t)(\ln v_1,\ldots,\ln v_n)'$)

로 도출된다.

2. 파생상품에 대한 적용

V장에서 설명했던 래칫 캐플릿, 스틱키 캐플릿에 WKB 근사를 적용시켜 보자. 정확(exact)하게 몬테 카를로 시뮬레이션을 통해 구하는 경우, 로그 정규 근사를 이용한 몬테 카를로 시뮬레이션을 통해 구하는 경우, c_0를 계산해서 WKB 근사를 적용해 구하는 경우, c_0, c_1을 계산해서 WKB 근사를 적용해 구하는 경우 이렇게 네 가지 방법으로 0시점의 파생상품의 가격과 선도 LIBOR 이자율에 대한 델타를 구해서 비교해보자. 선도 LIBOR 이자율에 대한 델타의 경우는 (3.4)를 이산화(discretized)한

$$\frac{\partial I^{(h)}}{\partial x_i}(x) := \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{2h}\left(\frac{p(x+h_i, g(x+h_i, {}_m\xi))u(g(x+h_i, {}_m\xi))}{\phi(x+h_i, g(x+h_i, {}_m\xi))} - \right.$$

$$\left.\frac{p(x-h_i, g(x-h_i, {}_m\xi))u(g(x-h_i, {}_m\xi))}{\phi(x-h_i, g(x-h_i, {}_m\xi))}\right),\ 1 \le i \le n, h_i = h(\delta_{i1}, \cdots \delta_{in}) \qquad (6.10)$$

을 이용하였다. $\delta_i \equiv 0.5(1 \le i \le n)$, $L(0) = 3.5\%$, $s = 0.0025$, $\gamma_i(t) \equiv 0.2e_i$, $h = 3.5 \times 10^{-5}$, $M = 5 \times 10^5$로 설정하고 시뮬레이션을 하였다. e_i는 n차원 단위 벡터(unit vector)로 공분산 행렬(correlation matrix) ρ가 다음과 같은 성분으로 이루어져 있다.

$$\rho_{ij} = \exp[\frac{|i-j|}{n-1}\ln \rho_\infty],\ 1 \le i, j \le n \qquad (6.11)$$

ρ_∞는 Schoenmakers(2005)의 설정을 따라 0.3으로 두고 시뮬레이션을 하였다. 래칫 캐플릿, 스틱키 캐플릿의 경우 만기를 1년에서 0.5년씩 증가시켜 5.5년까지 총 10개의 캐플릿

에 대해 시뮬레이션을 하였다.

(1) 래칫 캐플릿

T_k가 만기인 래칫 캐플릿의 가치를 P^{k+1}측도에서 생각해보면 다음 식이 성립한다.

$$C_k(t) = B_{k+1}(t)E^{k+1}[\frac{\delta_k \max(L_k(T_k) - (L_{k-1}(T_{k-1}) + s), 0)}{B_{k+1}(T_{k+1})}], \ (0 \le t < T_{k+1}) \qquad (6.12)$$

정확하게 몬테 카를로 시뮬레이션을 통해 구하는 경우는 작은 시간 간격 $\Delta t (= \frac{\delta_i}{10})$에 대해 로그 오일러 근사를 적용시킨 (5.7)를 이용하여 시뮬레이션을 하였다. 나머지 세 가지의 경우는 블랙-숄즈 공식(Black-Scholes formula)를 이용하여 계산하였다. 우선 0시점에서 만기 바로 전인 T_{k-1}사이의 시간 간격인 T_{k-1}에 대해 (5.7)를 이용하여 래칫 캐플릿의 가치에 영향을 주는 L_{k-1}, L_k에 대해서만 시뮬레이션을 하였다. 그러면 $L_{k-1}(T_{k-1})$, $L_k(T_{k-1})$ 을 구할 수 있고 기초 자산의 T_{k-1} 시점의 가치인 $L_k(T_{k-1})$, 행사가격인 $L_{k-1}(T_{k-1}) + s$도 계산할 수 있다. 이를 블랙-숄즈 공식에 적용시켜 만기 T_k에서의 가치를 계산하였다. 만기에서의 가치를 0시점으로 할인한 가격은 (3.4)의 $u(g(x, {}_m\xi))$에 대응된다. $\phi(x, g(x, {}_m\xi))$은 전이 커널을 로그 정규 근사한 $p_{\ln}^L(s,u,t,v)$에 대응하는데 일반적인 형태는 다음과 같다.

$$p_{\ln}^L(s,u,t,v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}^n} \prod_{i=1}^{n} \frac{\Gamma_{ii}^{-1}}{v_i} \exp\left(- \frac{(\Gamma^{-1}((\ln\frac{v_1}{u_1}, \ldots, \ln\frac{v_n}{u_n}) - \mu^{\ln}(s,t,u))')^2}{2(t-s)} \right)$$

$$\mu_i^{\ln}(s,t,u) = (t-s)\left(-\frac{|\gamma_i|^2}{2} - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{|\gamma_i||\gamma_j|\rho_{ij}\delta_j u_j}{1+\delta_j u_j}\right), \ 1 \le i \le n \tag{6.13}$$

래칫 캐플릿에 적용할 경우 $n=2$로 하고 T_{k-1}시점의 L_{k-1}, L_k에 대해서만 적용해 계산하면 된다. $p(x, g(x, {}_m\xi))$는 로그 정규 근사를 이용한 경우에는 $p_{\ln}^L(s,u,t,v)$, c_0를 계산해서 WKB 근사를 적용하는 경우에는 $p_{c_0}^L(s,u,t,v)$, c_0와 c_1을 계산해서 WKB 근사를 적용하는 경우에는 $p_{c_1}^L(s,u,t,v)$이 대응된다. $p_{c_0}^L(s,u,t,v)$ 은 (6.9)의 식을 L_{k-1}, L_k에 대해서 적용한 뒤 c_0를 계산해 적용한 것이고 $p_{c_1}^L(s,u,t,v)$은 c_0, c_1을 계산해 적용한 것이다. 이 값들을 이용하여 파생상품의 가격을 추정하고 (6.10)를 이용해 델타를 추정한다. 위에서 언급한 방법대로 래칫 캐플릿의 가격과 델타를 계산하면 다음과 같다.

<표 1> 래칫 캐플릿의 가격 (단위: basis points)

$\hat{I}_{ex}$는 정확하게 몬테 카를로 시뮬레이션을 통해 구한 추정치이고 $\hat{I}_{\ln}$은 로그 정규 근사를 이용한 시뮬레이션을 통해 구한 추정치, $\hat{I}_0$, $\hat{I}_1$는 각각 c_0를 계산해서 WKB 근사를 적용해 구한 추정치와 c_0, c_1을 계산해서 WKB 근사를 적용해 구한 추정치이다.

만기	$\hat{I}_{ex}(SD)$	$\hat{I}_{\ln}(SD)$	$\hat{I}_0(SD)$	$\hat{I}_1(SD)$
1.0	5.699(0.018)	5.790(0.006)	5.821(0.006)	5.791(0.006)
1.5	6.344(0.020)	6.549(0.009)	6.619(0.009)	6.551(0.009)
2.0	6.999(0.021)	7.193(0.012)	7.309(0.012)	7.198(0.012)
2.5	7.591(0.023)	7.767(0.014)	7.935(0.014)	7.774(0.014)
3.0	8.140(0.025)	8.322(0.016)	8.548(0.016)	8.332(0.016)
3.5	8.641(0.026)	8.817(0.018)	9.106(0.018)	8.830(0.018)
4.0	9.070(0.028)	9.260(0.020)	9.616(0.021)	9.277(0.020)
4.5	9.527(0.029)	9.632(0.021)	10.057(0.022)	9.654(0.021)
5.0	9.987(0.031)	10.013(0.023)	10.513(0.024)	10.039(0.023)
5.5	10.404(0.032)	10.328(0.024)	10.903(0.026)	10.359(0.024)

<표 2> 래칫 캐플릿의 델타1 (단위: basis points)

(6.14)를 기준으로 $L_{k-1}(T_{k-1})$의 변화에 따른 래칫 캐플릿의 델타이다.

만기	$\Delta(1)_{ex}(SD)$	$\Delta(1)_{h}(SD)$	$\Delta(1)_{0}(SD)$	$\Delta(1)_{1}(SD)$
1.0	-1437.1(3.1)	-1435.0(1.0)	-1266.2(0.9)	-1436.4(1.0)
1.5	-1459.2(3.1)	-1459.9(1.4)	-1288.0(1.0)	-1460.5(1.4)
2.0	-1473.9(3.1)	-1469.2(1.6)	-1299.4(1.2)	-1472.1(1.6)
2.5	-1473.4(3.1)	-1474.2(1.7)	-1306.3(1.3)	-1477.4(1.7)
3.0	-1471.8(3.1)	-1473.4(1.8)	-1308.4(1.4)	-1473.7(1.9)
3.5	-1463.2(3.1)	-1465.1(1.9)	-1305.0(1.5)	-1467.6(2.0)
4.0	-1462.8(3.1)	-1455.3(2.0)	-1300.2(1.5)	-1460.0(2.0)
4.5	-1442.2(3.1)	-1444.0(2.1)	-1293.2(1.6)	-1450.6(2.1)
5.0	-1425.6(3.1)	-1428.8(2.1)	-1280.9(1.6)	-1434.6(2.2)
5.5	-1414.5(3.1)	-1411.8(2.2)	-1268.9(1.7)	-1417.9(2.2)

<표 3> 래칫 캐플릿의 델타2 (단위: basis points)

(6.14)를 기준으로 $L_k(T_k)$의 변화에 따른 래칫 캐플릿의 델타이다.

만기	$\Delta(2)_{ex}(SD)$	$\Delta(2)_{h}(SD)$	$\Delta(2)_{0}(SD)$	$\Delta(2)_{1}(SD)$
1.0	1697.9(3.7)	1698.8(1.2)	1529.6(1.0)	1699.7(1.3)
1.5	1742.5(3.7)	1744.4(1.7)	1579.0(1.3)	1746.7(1.7)
2.0	1777.2(3.8)	1782.6(2.0)	1611.5(1.5)	1777.0(2.0)
2.5	1796.5(3.8)	1797.5(2.2)	1637.1(1.7)	1800.5(2.2)
3.0	1804.1(3.8)	1813.0(2.4)	1656.5(1.8)	1815.9(2.4)
3.5	1819.6(3.8)	1816.2(2.5)	1670.6(1.9)	1821.9(2.5)
4.0	1826.5(3.9)	1823.1(2.6)	1677.0(2.0)	1821.3(2.6)
4.5	1815.2(3.9)	1821.8(2.7)	1682.3(2.1)	1827.0(2.8)
5.0	1816.7(3.9)	1810.5(2.8)	1684.8(2.2)	1823.9(2.9)
5.5	1813.6(3.9)	1812.4(2.9)	1685.7(2.3)	1813.3(2.9)

$\hat{I}_1$는 평균적으로 2~3%정도의 오차율을 보였다. $\hat{I}_h$는 $\hat{I}_1$보다 조금 낮거나 비슷한 오차율을 보였다. 만기가 5년 이후에는 두 추정치 모두 오차율이 1%미만이었다. $\Delta(1)_1$는 만기가 4.5, 5년인 경우를 제외한 나머지 만기에서는 오차율이 0.5%미만이었다. $\Delta(1)_h$는 만기가 4.0년인 경우를 제외한 나머지 만기에서는 오차율이 0.5%미만이었다. $\Delta(2)_1$는 만

기가 3.0년인 경우를 제외한 나머지 만기에서는 오차율이 0.5%미만이었고 $\Delta(2)_{\ln}$ 는 모든 만기에서 오차율이 0.5%미만이었다.

(2) 스틱키 캐플릿

T_k 가 만기인 스틱키 캐플릿의 가치를 P^{k+1} 측도에서 생각해보면 다음 식이 성립한다.

$$C_k(t) = B_{k+1}(t)E^{k+1}\left[\frac{\delta_k \max(L_k(T_k) - K_k, 0)}{B_{k+1}(T_{k+1})}\right], \tag{6.14}$$

$$(K_k = \min(L_{k-1}(T_{k-1}), K_{k-1}) + s,\ K_0 = L_0(T_0)),\quad (0 \le t < T_{k+1})$$

정확하게 몬테 카를로 시뮬레이션을 통해 구하는 경우는 래칫 캐플릿의 경우와 동일하다. 나머지 세 가지의 경우도 블랙-숄즈 공식을 이용하여 계산하는 것은 동일하지만 스틱키 캐플릿은 선도 LIBOR 이자율 L_k 뿐만 아니라 그 이전의 시점을 만기로 가지는 선도 LIBOR 이자율이 행사가격에 영향을 주게 되므로 래칫 캐플릿과는 다르게 시간 간격 T_{k-1} 에 대해 (5.7)를 이용하여 $L_1, \ldots, L_k$ 에 대해 시뮬레이션을 하였다. 마찬가지로 $L_k(T_k)$, K_k 를 구할 수 있고 블랙-숄즈 공식에 적용해 만기 T_k 에서의 가치를 계산할 수 있다. 만기에서의 가치를 0시점으로 할인한 가격이 $u(g(x, {}_m\xi))$ 에 대응된다. $\phi(x, g(x, {}_m\xi))$ 는 $p^L_{\ln}(s,u,t,v)$ 에서 $n = k$ 로 두고 T_{k-1} 시점의 $L_1, \ldots, L_k$ 에 대해 적용시켜 계산한 값이 대응된다. $p(x, g(x, {}_m\xi))$ 의 경우는 로그 정규 근사는 $p^L_{\ln}(s,u,t,v)$ 로, WKB 근사를 이용한 $p^L_{c_0}(s,u,t,v)$, $p^L_{c_1}(s,u,t,v)$ 도 마찬가지로 $L_1, \ldots, L_k$ 에 대해 적용시켜 계산한 뒤에 대응된

다. 위에서 언급한 방법대로 스틱키 캐플릿의 가격과 델타를 계산하면 다음과 같다.

<표 4> 스틱키 캐플릿의 가격 (단위: basis points)

$\hat{I}_{ex}$는 정확하게 몬테 카를로 시뮬레이션을 통해 구한 추정치이고 $\hat{I}_{\ln}$은 로그 정규 근사를 이용한 시뮬레이션을 통해 구한 추정치, $\hat{I}_0$, $\hat{I}_1$는 각각 c_0를 계산해서 WKB 근사를 적용해 구한 추정치와 c_0, c_1을 계산해서 WKB 근사를 적용해 구한 추정치이다.

만기	$\hat{I}_{ex}(SD)$	$\hat{I}_{\ln}(SD)$	$\hat{I}_0(SD)$	$\hat{I}_1(SD)$
1.0	9.981(0.026)	10.130(0.015)	10.204(0.015)	10.135(0.014)
1.5	11.170(0.030)	11.363(0.020)	11.644(0.021)	11.400(0.020)
2.0	12.571(0.033)	12.768(0.024)	13.315(0.026)	12.848(0.025)
2.5	14.017(0.037)	14.212(0.029)	15.258(0.032)	14.427(0.030)
3.0	15.464(0.041)	15.586(0.033)	17.347(0.038)	15.969(0.035)
3.5	16.871(0.044)	16.971(0.037)	19.713(0.046)	17.505(0.040)
4.0	18.221(0.047)	18.304(0.040)	22.413(0.054)	19.126(0.046)
4.5	19.605(0.051)	19.619(0.044)	25.522(0.065)	20.807(0.053)
5.0	20.948(0.054)	20.994(0.048)	29.260(0.079)	22.595(0.061)
5.5	22.340(0.058)	22.300(0.052)	33.730(0.096)	24.504(0.070)

<표 5> 스틱키 캐플릿의 델타1 (단위: basis points)

(6.16)을 기준으로 $L_{k-1}(T_{k-1})$의 변화에 따른 스틱키 캐플릿의 델타이다.

만기	$\Delta(1)_{ex}(SD)$	$\Delta(1)_{\ln}(SD)$	$\Delta(1)_0(SD)$	$\Delta(1)_1(SD)$
1.0	-709.1(2.2)	-713.8(2.2)	-712.9(1.2)	-708.8(1.1)
1.5	-784.5(2.3)	-781.0(2.3)	-792.4(1.3)	-777.8(1.3)
2.0	-770.9(2.2)	-769.4(2.2)	-789.0(1.4)	-761.6(1.4)
2.5	-742.0(2.2)	-738.0(2.2)	-774.2(1.5)	-733.0(1.4)
3.0	-709.0(2.1)	-706.6(2.1)	-761.5(1.6)	-698.6(1.4)
3.5	-674.3(2.0)	-673.9(2.0)	-751.2(1.7)	-670.2(1.5)
4.0	-646.1(1.9)	-644.7(1.9)	-749.9(1.7)	-640.2(1.7)
4.5	-613.3(1.9)	-618.6(1.9)	-756.7(1.9)	-618.7(1.7)
5.0	-591.4(1.8)	-591.1(1.8)	-765.6(2.0)	-589.2(1.8)
5.5	-562.3(1.8)	-561.0(1.8)	-780.7(2.2)	-562.8(1.8)

<표 6> 스틱키 캐플릿의 델타2 (단위: basis points)

(6.16)을 기준으로 $L_k(T_k)$의 변화에 따른 스틱키 캐플릿의 델타이다.

만기	$\Delta(2)_{ex}(SD)$	$\Delta(2)_{\ln}(SD)$	$\Delta(2)_0(SD)$	$\Delta(2)_1(SD)$
1.0	2323.0(3.9)	2314.0(3.9)	2343.2(2.0)	2331.5(2.0)
1.5	2355.6(4.0)	2344.2(4.0)	2407.5(2.5)	2364.5(2.4)

2.0	2411.5(4.0)	2405.3(4.0)	2516.8(2.9)	2431.7(2.8)
2.5	2470.6(4.1)	2452.9(4.1)	2643.2(3.2)	2495.4(3.1)
3.0	2511.3(4.1)	2510.7(4.1)	2789.4(3.6)	2561.6(3.3)
3.5	2550.9(4.1)	2545.5(4.1)	2944.4(4.0)	2615.9(3.6)
4.0	2571.1(4.2)	2564.5(4.1)	3129.9(4.5)	2675.1(3.9)
4.5	2591.8(4.2)	2588.3(4.2)	3361.6(5.2)	2725.3(4.2)
5.0	2602.7(4.2)	2601.6(4.2)	3628.1(5.9)	2793.8(4.6)
5.5	2605.1(4.2)	2608.9(4.2)	3959.7(7.1)	2867.6(5.1)

$\hat{I}_{ln}$이 $\hat{I}_1$ 보다 평균적으로 오차율이 더 낮았다. $\hat{I}_{ln}$는 만기가 4.0, 4.5, 5.0, 5.5년인 경우가 오차율이 0.5%미만이었고 $\hat{I}_1$은 모든 만기에서 오차율이 0.5%이상이었다. $\Delta(1)_{ln}$는 만기가 1.0, 2.5, 4.5년인 경우를 제외한 나머지 만기에서는 오차율이 0.5%미만이었다. $\Delta(1)_1$는 만기가 1.0, 5.0, 5.5년인 경우만 오차율이 0.5%미만이었다. $\Delta(2)_{ln}$는 만기가 2.5년인 경우를 제외한 나머지 만기에서는 오차율이 0.5%미만이었다. $\Delta(2)_1$는 만기가 1.0, 1.5년인 경우만 오차율이 0.5%미만이었다.

Ⅶ. 결론

본 논문에서 소개하고 있는 WKB 근사를 통하여 전이밀도함수를 근사하는 방법은 Kampen(2006)을 바탕으로 새롭게 제시되고 있는 것이다. Kampen et al(2008)에서는 WKB 근사를 통해 추정한 선도 LIBOR 이자율에 따른 스왑션의 가격과 델타를 정확하게

몬테 카를로 시뮬레이션을 통하여 구한 추정치와 비교하고 있다. 거기에 따르면 WKB 근사를 통한 추정치는 긴 만기의 스왑션에 대해 좋은 결과를 보여주고 있다. 본 논문에서 시뮬레이션한 두 개의 캐플릿에 대한 결과를 보면 WKB 근사가 로그 정규 근사보다 절대적으로 나은 성과를 보여주는 것은 아니다. 그러나 래칫 캐플릿에 대해서는 상당히 좋은 성과를 보여주고 있는 반면에 스티키 캐플릿에 대해서는 로그 정규 근사보다 크게 좋지 않은 성과를 보여주고 있다. 즉, WKB 근사를 통한 시뮬레이션이 현재 주로 사용되고 있는 로그 정규 근사를 완전히 대체할 만큼 여러 파생상품에 대해서 좋은 성과를 보이지 않는다는 것이 중요하며, 이 논문이 가지는 의의이다.

WKB 근사를 좀더 다양한 파생상품에 적용하여 다른 파생상품에 대해서는 어떤 결과를 보여주는지 검증이 필요하다. 본 논문에서는 WKB 근사가 로그 정규 근사를 대체하지 못한다는 사실은 보여주고 있지만 그에 대한 원인을 설명하지 못하고 있다. 따라서 원인을 규명하기 위한 추가적인 연구가 필요하다고 생각된다.

참고 문헌

Ait-Sahalia, Y., "Closed-form Likelihood expansions for multivariate diffusions," *Annals of Statistics,* vol. 36, No. 2, 906-937, 2008.

Broadie, M. and Ö. Kaya, "Exact Simulation of Option Greeks under Stochastic Volatility and Jump Diffusion Models," *Proceedings of the 2004 Winter Simulation Conference,* 2004.

Cont, R. and P. Tankov, "Financial Modelling with Jump processes," *Chapman &Hall,* 2003

Davis, M. H. A. and M. P. Johansson, "Malliavin Monte Carlo Greeks for jump diffusions," *Stochastic Processes and their Applications*, 116, 101–129, 2006.

Elie, R., J. Fermanian and N. Touzi, "Kernel estimation of Greek weights by parameter randomization," *The Annals of Applied Probability,* Vol. 17, No. 4, 1399–1423, 2007.

Forster, B., E. Lütkebohmert and J. Teichmann, "Absolutely continuous laws of Jump-Diffusions in finite and infinite dimensions with applications to mathematical Finance," *SIAM Journal of mathematical Analysis*, 2008.

Giles, M. and P. Glasserman, "Smoking Adjoints: Fast Monte Carlo Greeks," *Risk*, vol. 19, 88-92, 2006.

Glasserman, P., "Monte Carlo Methods in Financial Engineering," 2003.

Glasserman, P. and N. Merener, "Numerical Solution of Jump-Diffusion LIBOR Market Models," *Finance and Stochastics*, 7, 1-27, 2003.

Glasserman, P. and X. Zhao, "Fast Greeks by Simulation in Forward Libor Models," *Journal of Computational Finance*, Vol. 3, 1, 5-39, 1999.

Hunter, C., P. Jäckel, and M. Joshi, "Getting the Drift," *Risk,* vol. 14, 81-84, 2001.

Jamshidian, F., "LIBOR and swap market models and measures," *Finance and Stochastics,* 1, 293-330, 1997.

Kampen, J., "The WKB-Expansion of the fundamental solution of linear parabolic equations and its applications," book manuscript, submitted to Memoirs of the American Mathematical Society, 2006.

Kampen, J., A. Kolodko and J. Schoenmakers, "Monte Carlo Greeks for financial products via approximative Greenian Kernels", *WIAS-Preprint 1208*, 2007.

Kampen, J., A. Kolodko and J. Schoenmakers, "Monte Carlo Greeks for financial products via approximative transition densities," 2008.

Kloeden, P.E. and E. Platen, "Numerical solution of stochastic differential equations," *Springer Verlag Berlin*, 1992.

Kurbanmuradov, O., K. Sabelfeld and J. Schoenmakers, "Lognormal approximations to Libor market models," *Journal of Computational Finance*, Vol. 6, 1, 69-100, 2002.

Matsuoka, R., A. Takahashi and Y. Uchida, "A New Computational Scheme for Computing Greeks by the Asymptotic Expansion Approach," *Asia-Pacific Financial Markets 11*, 393–430, 2006.

Milstein, G.N. and M. V. Tretyakov, "Stochastic Numerics for Mathematical Physics," *Springer Verlag Berlin*, 2004.

Pietersz, R., A. Pelsser and M. van Regenmortel, "Fast Drift-Approximated Pricing in the BGM model," *Journal of Computational Finance*, Vol. 8(1), 93-124, 2004.

Schoenmakers, J, "Robust Libor Modelling and Pricing of Derivative Products," *Financial Mathematics*, Chapman & Hall/CRC, 2005.