

# KOSPI200 변동성의 장기기억 속성 분석

송 준 혁\*

## 〈 초 록 〉

본 논문에서는 KOSPI200 지수 변동성의 장기기억 속성에 대한 실증 분석을 수행하였다. 분석 결과 실현변동성과 VKOSPI를 대상으로 단위근 검정을 수행한 결과 단위근의 존재는 발견되지는 않았으나, ARFIMA 모형을 이용하여 추정한 결과 이들 변동성들은 안정적인 장기기억 과정인 것으로 분석되었다.

장기기억 과정은 시계열에 구조 변화가 존재할 경우 가성적(spurious) 현상일 수 있다. 실제로 이를 검정하기 위해 구조 변화를 고려한 마코프 스위칭모형과 1일 및 5일 이후의 예측성과를 Diebold-Mariano(1995) 검정을 통해 살펴본 결과 실현변동성의 5일 예측에서는 마코프 스위칭모형의 예측력이 높게 나타난 반면 그 외의 경우에는 두 모형간의 큰 차이는 발견되지 않았다. 이러한 결과는 장기기억 과정의 유용성에 대한 비판이라기보다는 이를 보다 정확히 파악하기 위해서는 구조적 변화가 변동성에 가지는 의미에 관심을 둘 필요가 있음을 시사하는 것으로 해석된다.

주제어 : 실현변동성, VKOSPI, 장기기억 과정, 예측성과

---

\* 한국외대 경제학부 조교수, 주소: (130-791) 서울시 동대문구 이문동 270, Tel: 02-2173-3107, E-mail : jhsong@hufs.ac.kr

# I. 서 론

시장에서 거래되는 자산의 변동성을 측정하고 예측하는 것은 효율적인 자산배분 및 위험관리 측면뿐만 아니라 기초자산의 변동성에 가치가 의존하는 파생상품들의 가격결정 및 헤지전략 수립에 필수적인 문제로 현대 재무경제학에서는 그 중요성이 더욱 강조되는 추세이다. 이러한 추세에 부응하여 한국거래소(KRX)는 KOSPI200 지수를 바탕으로 CBOE에서 사용중인 공정분산스왑(fair variance swap) 방식<sup>1)</sup>을 한국시장의 특성에 맞도록 변형하여 독자적으로 개발한 변동성지수(이하 VKOSPI)를 2009년 4월 13일부터 발표하였다<sup>2)</sup>.

변동성지수는 1993년 미국의 CBOE(Chicago Board Options Exchange))에서 처음으로 도입되기 시작하여 현재에는 미국, 독일, 스위스, 프랑스 등 많은 국가에서 이러한 지수를 산출하고 있다. 변동성지수는 통상 기초자산과 음(-)의 상관관계를 가지고 있어 미래의 시장상황에 대해 예측할 수 있는 중요한 투자지표로 인식되고 있다.<sup>3)</sup> Glostn and Milgrom(1985), Kyle(1985) 등의 정보중심 시장미시구조이론에서는 시장정보가 가격에 반영되는 과정에서 변동성의 증감이 발생한다고 설명하고 있다. 이는 변동성은 시장 움직임의 방향과 강도에 대한 정보를 내포하고 있음을 시사한다. 따라서 이러한 변동성의 시계열적 특성을 파악하는 것은 시장을 분석하고 예측하는데 상당한 유용성을 지닐 것이다.

Mandelbrot(1963), Fama(1965) 이후 변동성이 시간에 따라 변하며, 분포가 정규분포와는 달리 한쪽으로 치우쳐져 있고 첨도가 정규분포에서 관찰되는 수준보다 높게 나타나며 한번 증가하면 일정 기간 지속되는 속성을 가진 것으로 알려졌다. Engle(1982)은 이러한 특성을 지니는 금융시계열의 속성을 설명하기 위해 ARCH 모형을 소개하였으며 Bollerslev(1986)는 이를 일반화시킨 GARCH 모형

- 
- 1) 공정분산스왑은 분산스왑의 현재가치를 0으로 만드는 분산을 이용하여 변동성지수를 산출하는 방식으로 특정 옵션가격결정모형을 가정하지 않고 모든 행사가격에 내재되어 있는 변동성을 반영한다는 장점을 보유하고 있다.
  - 2) 동 지수는 지수옵션시장의 옵션가격을 사용하여 구해지는 내재변동성을 이용하여 미래 30일간의 기대변동성을 지수로 산출한 것이다. 한국거래소(KRX)에서는 2003년까지 소급해서 산출한 지수를 발표한다.
  - 3) 시장변동성이 확대되면 이에 따른 위험을 축소하기 위해 옵션에 대한 수요가 증가함에 따라 옵션 가격이 상승하게 되고 이에 따라 높아진 내재변동성이 결국 변동성지수를 커지게 한다. 이러한 속성으로 인해 변동성지수는 공포지수(fear index)라고도 알려져 있다.

을 도입하였다. 한편 Nelson(1991)과 Glosten et al.(1993)은 양(+)의 충격과 음(-)의 충격이 변동성에 비대칭적인 효과를 가지는 것을 설명하기 위해 지수형(exponential) GARCH(EGARCH) 및 GJR-GARCH모형을 각각 제시하였다. 이들 모형들은 변동성의 시간가변성과 비대칭적 정보효과를 설명하고는 있으나 변동성 충격의 효과가 지수적(exponentially)으로 감소함으로써 실질적인 충격의 효과는 단기에 그치는 것으로 나타났다.

이후 많은 실증분석에서는 변동성은 지속성이 높다는 사실을 제기함에 따라 변동성의 단기기억에 의존하는 ARCH 또는 GARCH 모형의 현실 적합력에 의문이 제기되었다. 이를 설명하기 위해 단위근을 모형에 포함하는 IGARCH(Integrated-GARCH) 모형이 개발되었는데 이것은 변동성의 충격이 영원히 지속된다는 경직된 가정에 기초하였다는 또 다른 한계를 안고 있었다. 이러한 문제를 극복하기 위해 Baillie et al.(1996)은 변동성 충격이 장기적으로 서서히 감소한다는 장기기억(long memory) 속성을 부여한 FIGARCH 모형이 개발되었다<sup>4)</sup>. 즉, FIGARCH 모형은 GARCH 모형의 일시적 충격과 IGARCH 모형의 영구적 충격을 모두 반영한 결합 GARCH 모형이라고 할 수 있다.

장기기억 속성을 가진 시계열의 특징은 먼 과거의 충격이 현재 시점에서 완전히 사라지지 않고 여전히 어느 정도의 영향을 미친다는 것을 의미한다. 이에 반해 단위근을 가진 시계열의 특징은 한 번 가해진 충격은 무한한 미래에까지 그 영향이 지속된다는 것인데 이는 변동성에 가해진 충격이 언젠가는 소멸되어 간다는 사실과는 괴리가 존재한다. 예를 들면 1997년에 발생한 외환위기의 충격도 시간이 지남에 따라 시장이 점차 안정을 찾아가는데 단위근을 이러한 현상을 제대로 설명하지 못한다. 단위근이 가지는 이러한 비현실적인<sup>5)</sup> 특징으로 인해 상당한 비판을 받아왔는데 장기기억 모형은 단위근을 대체할 수 있는 모형으로 인식되어 왔다.

장기기억의 존재 여부는 소비 및 투자결정에 있어서 자산의 최적 보유기간에 대한 정보를 제공해 줄 뿐만 아니라 마팅계일을 이용하여 가격을 도출하는 옵션과 같은 파생상품들의 가격 결정에 있어서도 중요한 시사점을 제공한다. 대부분의 파

4) 시계열의 적분이 정수가 아닌 분수형태로 나타내는 모형을 분수적분(fractional integration) 또는 장기기억(long memory) 모형이라고 일컫는다. 전통적인 GARCH 모형에서는 충격의 영향이 FIGARCH 모형에서는 쌍곡선적(hyperbolically)으로 감소함에 따라 충격의 장기효과를 잘 표현한다는 장점을 가지고 있다.

5) 주가가 단위근을 가진다면 1987년 블랙먼데이의 효과가 아직까지도 여전히 동일한 규모의 효과로 계속 남아있어야 하지만 현실적으로는 그렇지 않다.

생상품의 가격결정이 단위근과 같은 영구기억을 가지는 마팅계일 과정을 이용하여 위험중립적 평가방법에 의존하고 있음을 감안하면 장기기억의 존재는 효율적 시장 가설에 대한 근본적인 의문을 제기한다는 측면에서 상당한 관심을 받아왔다.

내재 및 실현변동성과 관련해서 국내 선행연구들은 대부분 변동성의 예측력 분석에 치중하고 있다. 김태혁·박종해(2006)에서는 VIX 계산방법으로 측정한 내재 변동성이 GARCH류의 모형에서 추정된 변동성보다 예측력이 우수한 것으로 나타났으며 이재하·정제련(2006)에서도 VIX의 예측력이 우수하다고 보고하였다. 한편 최영수·이현정(2010)에서는 동시호가제도의 특성을 반영한 새로운 실현변동성을 제시하고 이들 실현변동성이 VKOSPI 예측력을 살펴본 결과 새롭게 제시한 실현변동성의 예측력이 가장 높았다고 주장하였다. 한편 변동성의 장기기억 속성과 관련해서는 이일균(2001), 박재곤·이필상(2009) 등에서 우리나라 주가가 안정적인 장기기억 과정을 가지고 있으며 이러한 장기기억 속성을 감안한 모형의 예측력이 다른 모형보다 우수하다고 보고하고 있다.

본고에서는 KOSPI200 지수의 실현변동성과 VKOSPI를 대상으로 이들의 시계열적 특징을 비교·분석하는데 일차적인 목표를 두고 있다. 장기기억과 관련한 선행연구는 대부분 GARCH류의 모형을 사용하여 과거 실현되었던 역사적 변동성의 장기기억 속성을 분석한 반면 여기서는 VKOSPI와 실현변동성을 통해 미래에 발생한 변동성에 대한 시장에서 예상하고 있는 기대변동성을 대상으로 장기기억 속성을 분석하고 있다는 점에서 차이가 있다. 이와 더불어 구조 변화를 감안하지 않기 때문에 가성적인 단위근이 발생할 수 있음을 착안하여 장기기억 과정에도 그러한 성격이 존재하는 지를 살펴보고자 한다.

아래에서의 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서는 분석대상 자료를 소개하고 변동성에 단위근이 존재하는 지 여부를 살펴본다. 3장에서는 장기기억 속성 및 추정방법을 설명하고 4장에서는 추정 결과를 제시한다. 그리고 5장에서는 구조 변화를 감안한 마코프 스위칭 모형과 장기기억 모형간의 예측성과를 비교한다. 6장에서의 이상의 결과들을 요약하고 결론은 제시한다.

## 2. 자료의 소개 및 단위근 검정

### 2.1 자 료

본 연구에서는 KOSPI 시장에서의 변동성을 살펴보기 위해 한국증권전산(KOSCOM)에서 제공받은 2003년 1월 3일부터 2011년 3월 22일까지의 자료를 사용하였다. 변동성 지표로는 자료에서 제공되는 VKOSPI와 더불어 실현변동성을 사용하였다.

실현된 변동성을 측정하는 데 있어 일별 종가만을 이용하여 변동성을 도출할 경우 가격변동에 대한 시장정보를 충분히 반영하지 못함에 따라 변동성 추정에 왜곡을 가져올 수 있다. 즉, 일중 변동성이 높음에도 불구하고 주가가 등락을 반복함에 따라 일정한 구간내에서만 움직일 경우 종가만을 대상으로 변동성을 추정할 경우 실제 시장의 움직임과는 괴리가 발생하게 된다. Anderson et al.(1997, 1998)에서는 고빈도 자료에서 얻은 변동성이 저빈도 자료에서 도출한 변동성보다 더 많은 정보를 가지고 있으므로 더 좋은 예측력을 보인다고 주장하였다. 고빈도 자료에서 변동성을 도출하기 위해 연속시간에서의 로그가격  $p(t)$ 의 확률과정을 다음과 같은 확산과정을 따른다고 하자.

$$dp(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dW(t)$$

로그차분을 수익률로 정의하고 이를 적분하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$r(t) \equiv p(t) - p(0) = \int_0^t \mu(s)ds + \int_0^t \sigma(s)dW(s)$$

여기서  $\sigma(t)$ 와  $W(t)$ 가 독립일 경우,  $t$ 기에서 도출되는  $h$ -기간 이후 동안의 수익률( $r(t+h)$ )의 분산은  $\int_0^t \sigma^2(s)ds$ 로 주어진다. 그러나 이렇게 정의된 변동성은 연속시간 모형에서 도출된 결과로 이에 대응하는 이산적으로 관측되는 실현변동성(realized volatility)은 고빈도 일중자료를 이용하여 계산된 수익률의 제곱자료를 합산하여 다음과 같이 계산하였다.

$$RVOL_t(n) = \sqrt{\sum_{i=1}^n r_{t+\frac{i}{n}}^2}$$

<표 1>에서는 분석 자료들에 대한 기초통계량을 제시하였다. 분석 기간중 실현 변동성의 평균은 22.55로 VKOSPI보다는 낮은 수준을 보였다. KOSPI200의 일일 수익률은 0.0564%로 나타났다. 한편 Jacque Bera 검정 결과 분석대상 자료 모두에서 정규성이 기각되는 것으로 나타났다. 또한 자료들의 자기상관 존재여부를 확인하기 위해 Ljung-Box의 Q 통계량을 살펴보면 변동성 지수의 경우 p값이

1% 이하로 나타남에 따라 강한 자기상관을 가지고 있음을 확인할 수 있다. 이에 반해 KOSPI200 수익률의 경우에는 단기간에서는 자기상관의 존재가 통계적으로 유의하지 않음을 알 수 있다.

<표 1> 분석 자료의 기초 통계량

변수명	평균	표준편차	왜도	첨도	Jarque Bera (p-value)
실현변동성	22.550	11.080	2.477	9.535	0.0000
VKOSPI	25.710	9.792	2.413	8.231	0.0000
KOSPI200 수익률(%)	0.0564	1.561	-0.414	5.256	0.0000
변수명	Ljung-Box statistics				
	Q(1)	Q(10)	Q(30)	Q(60)	Q(120)
실현변동성	2007.38***	18008.39***	38619.71***	49715.11***	55135.18***
VKOSPI	1978.24***	18254.84***	45617.86***	67378.84***	81674.20***
KOSPI200 수익률(%)	0.1435	11.58	50.92***	107.55***	177.25***

주 : \* p < 10%, \*\* p < 5%, \*\*\* p < 1%

분석대상 변수들간의 교차상관관계를 살펴보면 먼저 VKOSPI와 실현변동성간의 교차상관관계는 0.746으로 통계적으로 유의한 양(+)의 상관관계가 존재함을 알 수 있다. 반면 KOSPI200 수익률의 경우에는 실현변동성과 VKOSPI와 모두 통계적으로 유의한 음(-)의 상관관계를 가지고 있음을 확인할 수 있었다.

<표 2> 교차상관관계 분석

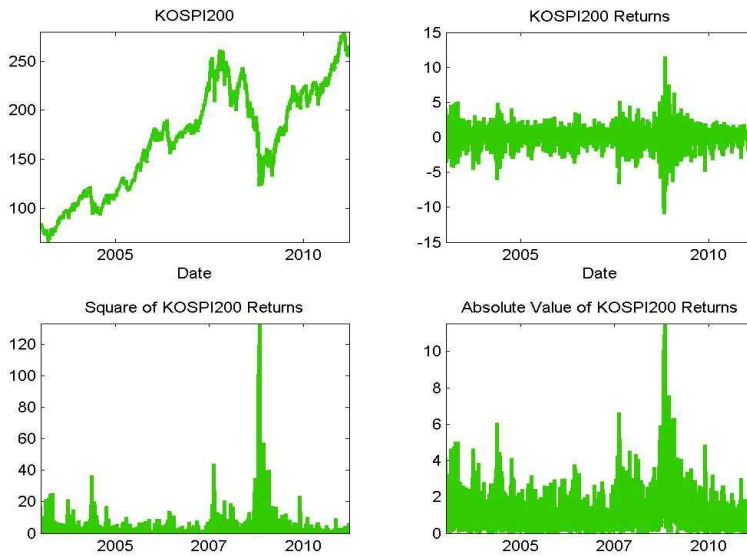
pearson	실현변동성	VKOSPI	KOSPI200수익률
실현변동성	-	0.746	-0.140
VKOSPI	<0.001	-	-0.103
KOSPI200 수익률	<0.001	<0.001	-

주 : 하방 삼각행렬은 p-value를 표시한 것임.

분석 자료들의 특성을 좀 더 시각적으로 관찰할 수 있는 <그림 1>에서 분석대상 기간중의 주가는 몇 차례의 상승과 침체를 겪었음을 확인할 수 있다. 또한 주

가수익률, 주가수익률 제곱 및 주가수익률의 절대값을 통해 우회적으로 주가의 변동성을 살펴보면 주가 역시 다른 금융시계열과 동일하게 변동성 집중현상 (volatility clustering)이 표본기간내에 존재하고 있음을 직관적으로 알 수 있는데 이는 <표 1>에서 제시되어 있는 왜도와 첨도값을 통해서도 확인이 가능하다.

<그림 1> 주가 및 변동성 추이



## 2.2 단위근 검정

여기서는 자료에서 나타난 변동성 시계열의 장기적 안정성(long-run stationarity)을 확인하기 위해 각 시계열에 대해 단위근의 존재 여부를 확인하였다. 단위근 검정은 어떤 시계열에 충격이 가해졌을 때 그 충격의 효과가 장기적으로 지속되는지 또는 일시적인지 여부를 검정하는 것이다. 단위근 검정을 위해 ADF검정, PP검정 및 KPSS 검정을 모두 수행하였다.<sup>6)</sup>

6) 소표본에서는 귀무가설을 기각하기 어려운 small sample bias가 존재하는데 KPSS검정에서는 ADF검정이나 PP검정과는 달리 단위근이 존재하지 않는다는 것을 귀무가설로 삼고 있어 이러한

검정 결과 실현변동성과 VKOSPI는 KPSS 검정에서는 단위근을 가지는 것으로 나타난 반면, ADF와 PP 검정에서 모두 단위근을 기각하는 것으로 확인되었다. 모든 검정에서 동일한 결과를 제시하지 않아 단정하기는 어렵지만 3가지 검정중 두 가지에서 단위근은 기각하고 있어 변동성 지수가 단위근을 가진다고 말하기는 어려울 것으로 보인다. 이에 반해 KOSPI200의 경우에는 모든 검정에서 단위근을 가지고 있는 것으로 나타났으며 이를 로그차분한 수익률의 경우에는 안정적인 시계열로 나타나고 있어 KOSPI200은 I(1) 시계열로 나타났다.

〈표 3〉 단위근 검정

검정 통계량	구 분	실현변동성	VKOSPI	KOSPI200	KOSPI200 수익률
ADF t-statistics	w/o cons,	-2.182	-1.458	1.194	-32.322
	w/o trend	(-1.95)	(-1.95)	(-1.95)	(-1.95)
	w/ cons,	-4.700	-3.434	-0.934	-32.379
	w/o trend	(-2.86)	(-2.86)	(-2.86)	(-2.86)
	w/ cons,	-4.705	-3.432	-2.113	-32.375
	w/ trend	(-3.41)	(-3.41)	(-3.41)	(-3.41)
Phillips- Perron	$z_a$	-29.364	-22.481	-2.037	-2023.474
		(-14.100)	(-14.100)	(-14.100)	(-14.100)
	$z_{t_a}$	-3.832	-3.373	-0.942	-44.770
KPSS		(-2.863)	(-2.863)	(-2.863)	(-2.863)
		0.580	0.555	76.460	0.073
		(0.463)	(0.463)	(0.463)	(0.463)

주 : ( )안의 숫자는 5% 유의수준 하에서의 임계치이다. 각 변수의 시차는 AIC를 기준으로 설정하였으며 각 변수별 시차는 실현변동성(13), VKOSPI(19), KOSPI200(1), KOSPI200 수익률(1)이다.

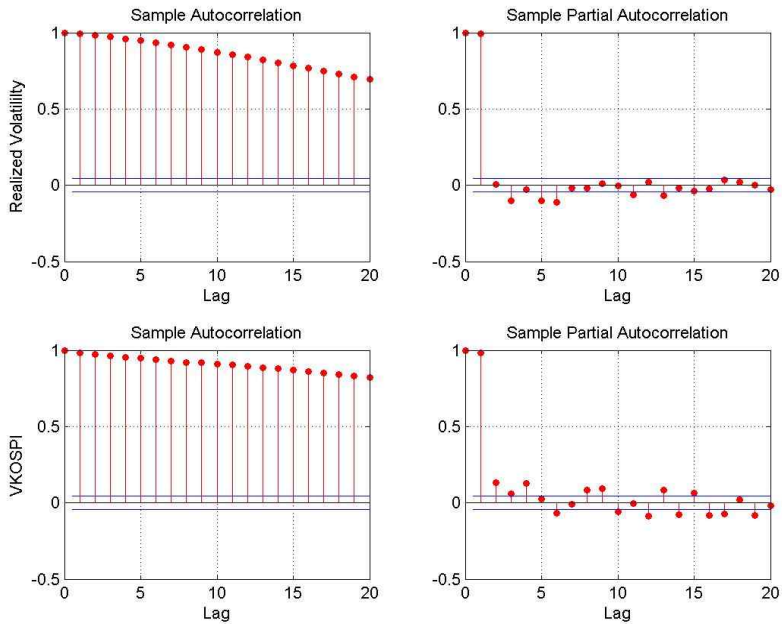
이러한 결과는 변동성에 단위근을 가진다는 견해와 다소 배치되는 측면이 있어 추가적인 분석이 필요할 것으로 보인다. Sowell(1990), Diebold and Rudebusch

small sample bias를 일정 정도 완화할 수 있을 것으로 사료된다.



(1991)에서는 전통적인 분수차분과정에 대한 단위근 검정의 검정력이 낮아<sup>7)</sup> 두 모형간 통계적인 식별은 상당히 어렵지만 충격의 시계열적 과정은 차이가 존재한다고 설명하고 있다. 변동성의 자기상관성을 확인하기 위해 표본자기상관함수를 살펴보았다.

<그림 2> 변동성의 표본자기상관함수



<그림 2>에서 보이는 것처럼 실현변동성과 VKOSPI는 강한 자기상관을 가지고 서서히 소멸되는 모습을 보이고 있으나 단위근을 가진 시계열의 자기상관과는 다소 차이를 보이고 있다. 변동성들의 자기상관에 어떤 규칙성이 존재하는 지를 살펴보기 위해 스펙트럴 분석을 수행해 보았다.<sup>8)</sup> 스펙트럴 분석은 스펙트럴 밀도 함수를 통해 자기공분산의 순환주기를 시간영역(time domain)이 아니라 주파수영역(frequency domain)에서 찾는 기법으로 외생적 충격에 따른 시계열의 사이클

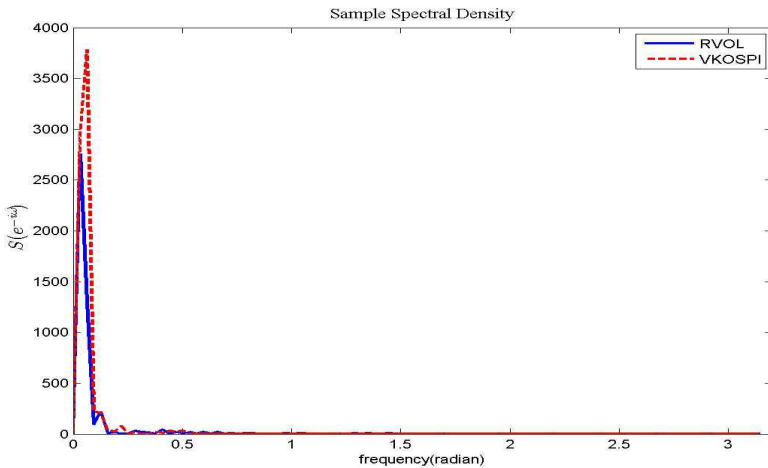
7) 여기서 낮은 검정력은 귀무가설을 기각하지 못할 경우 대립가설을 기각할 수 있어야 하는데 그렇게 하기 어렵다는 것으로 단위근과 분수차분의 경우를 거의 구분할 수 없다는 것을 의미한다.

8) 스펙트럴 분석에 대한 설명은 <부록>에 수록하였다.

을 확인하는 방법으로 자주 이용된다.

스펙트럴 밀도 함수를 계산한 결과는 <그림 3>에 제시되어 있는데 좌우대칭인 점을 고려하여 주파수 영역  $[0, \pi]$ 에서 그려진 것이다. 스펙트럴 밀도가 가장 높은 주파수 영역은 실현변동성의 경우에는 0.0314이고 VKOSPI의 경우에는 0.0628로 나타났다. 이를 주기로 환산하면 각각 200일과 100일에 해당한다. 즉, 실현변동성에 외부적 충격이 발생할 경우 향후 200일까지, VKOSPI의 경우에는 100일까지 그 영향이 지속됨을 의미한다. 이러한 속성은 비록 변동성이 단위근을 가지지는 않지만 상당히 오랜 기간 동안 지속성을 가지고 있음을 의미한다. 따라서 아래에서는 이러한 장기기억 속성을 반영한 모형을 설명하고 이를 이용하여 변동성의 통계적 속성을 살펴보고자 한다.

<그림 3> 스펙트럴 밀도 함수



### 3. 변동성 장기기억 모형

#### 3.1. ARFIMA 모형

여기서는 변동성지수를 직접 사용하여 변동성 시계열을 장기기억 속성을 살펴보고자 한다. 장기기억은 시계열의 자기상관함수가 천천히 감소하여 시계열에 가

해지는 충격의 영향이 오랜 기간 지속되는 것을 의미한다. 일반적으로 어떤 시계열이 차분연산자  $(1-L)^d$ 에 의하여 안정적이고 가역적인 ARMA모형으로 표현될 수 있을 때 그 시계열은  $d$  차수로 적분되었다고 하며 이를  $I(d)$ 과정이라고 설명한다. 여기서  $d$ 가 정수가 아닐 때 이 시계열은 분수적분 시계열이 된다. 장기기억 속성이 있는 시계열의 자기상관함수의 지속성은  $I(0)$ 나  $I(1)$  과정이 아닌 분수적분 과정인  $I(d)$  과정을 따른다.  $I(0)$  과정은 충격의 영향이 지수적으로 감소하고  $I(1)$  과정은 충격의 영향이 영구적으로 지속되는 데 비해  $I(d)$  과정은 충격의 영향이 느리게 감소함으로써 장기간 지속되는 시계열적 속성을 가지고 있다.

분수적분 과정은 비정상적인 시계열 과정을 정상적인 과정으로 전환하기 위해 정수 차분을 분수 차분으로 확장한 것으로 분수적분 ARMA과정, 즉 ARFIMA(fractionally integrated ARMA)는 다음과 같이 표현된다.

$$\phi(L)(1-L)^d(y_t - \mu) = \theta(L)\epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim iidN(0, \sigma_\epsilon^2) \quad (1)$$

여기서  $L$ 은 시차 연산자(lag operator)를,  $d$ 는 분수차분 계수를 나타내며  $\epsilon_t$ 는 오차항,  $y_t$ 는 실현변동성 또는 VKOSPI 시계열을 의미한다. 여기서  $d$ 의 값이  $(0,1)$ 범위에 있으면 장기기억과정을 가지는 것을 의미하는데 보다 구체적으로  $d$ 의 값이  $[0.5, 1)$ 의 범위에 있으면 평균회귀를 하나 분산이 지속적으로 증가하는 불안정적인 장기기억 과정(non-stationary long memory process)을,  $(0,0.5)$ 범위에 있으면 안정적인 장기기억 과정(stationary long memory process)을,  $(-0.5, 0)$ 이면 중간기억 과정(intermediate memory process) 또는 반지속성 과정(anti-persistent process)을, 그리고 0이면 ARMA 과정으로 단기기억 과정(short memory process)을 각각 나타낸다.<sup>9)</sup>

분수차분 계수는 이항전개를 통해 다음과 같이 근사할 수 있다.

$$\begin{aligned} (1-L)^d &= \sum_{j=0}^{\infty} \binom{d}{j} (-L)^j \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} b_j L^j \end{aligned} \quad (2)$$

여기서  $b_0 = 1$ ,  $b_1 = -d$ ,  $b_2 = \frac{d(1-d)}{2}$ ,  $b_j = \frac{1}{j} b_{j-1} (j-1-d)$ ,  $j \geq 3$ 이다. 여

9) Hosking(1981)은 ARFIMA에서의 자기상관함수는  $j \rightarrow \infty$  하면  $j^{2d-1}$ 에 비례하게 되어 일반적인 ARMA과정의 자기상관함수가 기하급수적으로 감소하는 것과는 달리 ARFIMA과정의 자기상관함수는 쌍곡선을보다 느리게 감소한다고 주장하였다.

기서  $|d| < 0.5$ 이면  $\sum_{j=0}^{\infty} \binom{d}{k}^2 < \infty$ 가 되어 이 과정은 안정적인 시계열이 된다. 한편  $d > -0.5$ 이면  $(1-L)^d$ 의 역수가 존재하여  $y_t$ 는 Wold 분해가 가능해 진다. Granger and Joyeux(1980)은 이러한 이항전개는 감마함수를 이용하면 다음과 같이 표현될 수 있음을 보였다<sup>10)</sup>.

$$(1-L)^d = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(j-d)}{\Gamma(-d)\Gamma(j+1)} L^j \quad (3)$$

Geweke and Porter-Hudak(1983)은 분수차분 모수인  $d$ 를 준모수적(semi-parametric)으로 추정하는 방법을 소개하였다. GPH는 먼저 스펙트럴 밀도함수의 각주기가 0 근처에서 분수차분 모수를 추정한 후 회귀분석을 이용하여 나머지 모수를 추정하는 방법을 제시하였는데 먼저 시계열  $y_t$ 가 각주기  $\omega \in [0, \bar{\omega}]$ 에서의 파워스펙트럼 밀도(power spectral density),  $P(\omega)$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$P(\omega) = \frac{1}{2\pi T} \left| \sum_{t=1}^T e^{i\omega t} (y_t - \bar{y}) \right|^2 \quad (4)$$

그리고 스펙트럴 회귀식은 다음과 같이 정의된다.

$$\log[P(\omega)] = \beta_0 + \beta_1 \log[\sin^2(\omega/2)] + \epsilon \quad (5)$$

식 (5)를 회귀분석한 뒤 기울기 계수에 해당하는  $\beta_1$ 이  $-d$ 와 같게 되므로 이를 추정하면  $d$ 의 추정량을 구할 수 있다. 여기서 문제는 각주기의 최댓값,  $\bar{\omega}$ 를 얼마로 선정하는 가이다. 만약 최대 각주기가 적절히 선택이 되었다면 스펙트럴 회귀 오차항의 이론적인 점근적 분산은  $\pi^2/6$ 이 되는 것으로 알려져 있으므로 이러한 점근적 분산에 가까워지는 각주기의 구간을 찾으면 된다.

### 3.2 FIGARCH 모형

여기서는 실제로 구해진 변동성지수를 사용하기 보다는 KOSPI200 수익률 자료에서 추출된 변동서의 장기기억 속성을 분석해 보고자 한다. 이를 위해서

---

10) 감마함수는 스위스 수학자인 Leonhard Euler가 factorial을 일반적인 수로 확대하기 위해 도입된 함수로  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ 의 속성을 가지며  $\frac{\Gamma(j-d)}{\Gamma(-d)} = (-d)(-d+1)\dots(-d+j-1)$ 로 표현된다.

Baillie et al.(1996)에서는 변동성의 영구기억 속성을 가진 IGARCH 모형을 변형시켜 다음과 같은 FIGARCH(p,d,q) 모형을 소개하였다.

$$\begin{aligned} y_t &= \mu + \epsilon_t, \\ \epsilon_t &= \eta_t h_t^{1/2}, \\ \eta_t &\sim N(0,1) \\ h_t &= \omega + [1 - (1 - \beta(L))]^{-1} \alpha(L)(1 - L)^d \epsilon_t^2 \end{aligned}$$

여기서  $y_t$ 는  $t$ 시점의 주가 수익률을,  $h_t$ 는 조건부 변동성을 의미한다. 변동성 방정식의 차수 ( $p, d, q$ )의 선택은 GARCH(p,q) 모형의 대부분이  $p = 1, q = 1$ 로 설정하고 있음을 참고하고 설정하였다.

장기기억 속성이 있는 변동성 모형은 준최우추정법(quasi-maximum likelihood estimation),으로 추정할 수 있는데 이대 로그우도함수는 다음과 같다.

$$\ln L = \sum_{t=1}^T \ln f(\epsilon_t | \theta_t) = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left[ \ln(2\pi\sigma_t^2) + \frac{\epsilon_t^2}{\sigma_t^2} \right]$$

분수차분 계수의 실제 추정에서는 ARFIMA모형에서 이항전개를 통해 일정 시차 이상을 절삭한 뒤 추정을 수행한다. Baillie et al.(1996)에서는 절삭 크기를 1,000개의 시차를 사용하였는데 본고에서도 동일한 시차를 이용하여 절삭 크기를 정하였다.

## 4. 모형 추정 결과

실현변동성 및 VKOSPI를 ARFIMA 모형을 이용하여 추정한 결과는 <표 4>과 <표 5>에 제시되어 있다. 두 가지 변동성 모두 분수차분 계수가 0과 0.5사이를 보임에 따라 이들 변동성은 장기기억을 가진 정상과정으로 확인되었다. 이러한 결과는 주가변동성이 안정적인 장기기억과정이라는 박재곤·이필상(2009)과 이지현 외 2인(2002)의 연구 결과와 유사한 결론을 도출하였다.<sup>11)</sup> 여러 가지 시차를 주어 ARFIMA 모형을 추정한 후 로그우도값과 AIC를 기준으로 평가해 본 거로가 VKOSPI에서는 ARFIMA(3,d,2)모형이, 실현변동성에서는 ARFIMA(1,d,3)의 추정 결과가 가장 우수한 것으로 나타났다.

11) 박재곤·이필상(2009) 및 이지현 외 2인(2002)에서는 FIGARCH 모형을 사용하여 주가변동성의 장기기억 과정을 다루고 있는 반면 여기서는 변동성 지수를 직접 사용하여 추정했다는 점에서 차이가 존재한다.

<표 4> ARFIMA(p,d,q) 추정 결과: VKOSPI

	(1,d,2)	(1,d,3)	(2,d,1)	(2,d,2)	(2,d,3)	(3,d,1)	(3,d,2)
$d$	0.4991 (0.0143)	0.2149 (0.0491)	0.2622 (0.0720)	0.3186 (0.0653)	0.2492 (0.0699)	0.3445 (0.0611)	0.3609 (0.0621)
$\psi_1$	0.8152 (1.5211)	0.9836 (0.0031)	1.3309 (0.0464)	1.3817 (0.0442)	0.8945 (0.0587)	1.2933 (0.0439)	0.7388 (0.0637)
$\psi_2$	-	-	-0.3432 (0.0432)	-0.3943 (0.0418)	0.0855 (0.0555)	-0.2737 (0.0428)	0.4521 (0.0714)
$\psi_3$	-	-	-	-	-	-0.0340 (0.0109)	-0.2143 (0.0304)
$\theta_1$	187.4094 (131.3861)	-0.3637 (0.0472)	-0.7575 (0.0298)	-0.8691 (0.0528)	-0.3107 (0.0656)	-0.8089 (0.0224)	-0.2737 (0.0682)
$\theta_2$	36.3245 (18.6578)	-0.0913 (0.0114)	-	0.0582 (0.0273)	-0.1296 (0.0318)	-	-0.4395 (0.0463)
$\theta_3$	-	-0.1274 (0.0093)	-	-	-0.1384 (0.0117)	-	-
$\ln L$	-2,538.6	-2,202	-2,148.1	-2,135.9	-2,147.7	-2,133.8	-2,130.9
AIC	2.4922	2.1636	2.1098	2.0989	2.1113	2.0967	2.0949

주 : (1) \*  $p < 10\%$ , \*\*  $p < 5\%$ , \*\*\*  $p < 1\%$

<표 5> ARFIMA(p,d,q) 추정 결과: 실현변동성

	(1,d,2)	(1,d,3)	(2,d,1)	(2,d,2)	(2,d,3)	(3,d,1)	(3,d,2)
$d$	0.4149 (0.0610)	0.4145 (0.0500)	0.4146 (0.0560)	0.3422 (0.0563)	0.4250 (0.0495)	0.4252 (0.0324)	0.4347 (0.0475)
$\psi_1$	0.9488 (0.0097)	0.9521 (0.0080)	0.9993 (0.0303)	0.1505 (0.0618)	0.4680 (0.0181)	1.0515 (0.0451)	0.3688 (0.1465)
$\psi_2$	-	-	-0.0477 (0.0252)	0.7708 (0.0577)	0.4585 (0.0138)	-0.0653 (0.0274)	0.6561 (0.1298)
$\psi_3$	-	-	-	-	-	-0.0306 (0.0171)	-0.1013 (0.0241)
$\theta_1$	-0.4061 (0.0530)	-0.4036 (0.0453)	-0.4550 (0.0521)	0.4572 (0.0777)	0.0692 (0.0410)	-0.5186 (0.0276)	0.1556 (0.1444)
$\theta_2$	-0.0180 (0.0103)	-0.0079 (0.0103)	-	-0.2605 (0.0499)	-0.2007 (0.02580)	-	-0.3537 (0.0634)
$\theta_3$	-	-0.0354 (0.0115)	-	-	-0.0580 (0.0114)	-	-
$\ln L$	-1,781.1	-1,780.0	-1,781.1	-1,780.9	-1,778.4	-1,780.8	-1,779.5
AIC	1.7504	1.7503	1.7503	1.7511	1.7496	1.7510	1.7507

주 : \* :  $p < 10\%$ , \*\* :  $p < 5\%$ , \*\*\* :  $p < 1\%$ 를 나타냄.

한편 변동성을 직접 이용하지 않고 모형내에서 도출될 경우 여전히 장기기억 속성이 존재하는 지를 살펴보기 위해 FIGARCH 모형과 더불어 단기기억 과정인 GARCH(1,1)과 IGARCH도 추정하였는데 추정 결과는 <표 6>에 제시하였다. GARCH(1,1)의 경우 1차 자기상관 계수값은 0.9139로 상당히 높은 지속성을 보이고 있음을 알 수 있다. IGARCH로 추정 결과에서도 계수값이 통계적 유의성을 보이고 있으나 로그우도값에서 GARCH(1,1)이 IGARCH(1,1)보다 조금 크게 나와 변동성은 안정적인 과정에 조금 더 가까울 것으로 보인다. FIGARCH(1,d,1)의 경우의 로그우도값이 GARCH 모형 중에서 가장 높게 나타나고 있어 변동성은 단기와 영구기억이 아닌 장기기억 과정을 가지는 시계열임을 다시 확인할 수 있었다. 다만 FIGARCH의 분수차분 계수값이 0.5를 상회하고 있어 장기기억 과정의 안정성에 의문이 들지만 안정적인 과정이 가능한 구간이 1 표준오차 안에 존재하여 장기기억 과정이 안정적이라고 추측하는 데 큰 무리는 없을 것이라고 판단된다. 이러한 결과는 Kang and Yoon(2006) 및 박재곤·이필상(2009) 등에서도 발견된 바 있다.

<표 6> GARCH 모형 추정 결과

	GARCH (1,1)	IGARCH (1,1)	FIGARCH (1,d,1)	FIGARCH (0,d,1)	FIGARCH (0,d,0)
$\omega$	0.0294*** (0.0089)	0.0152*** (0.0054)	0.0959 (0.0788)	0.1133** (0.0510)	0.3008*** (0.0571)
$\alpha$	0.0727*** (0.0111)	0.0822*** (0.0111)	0.1146 (0.0590)	0.4212*** (0.1124)	-
$d$			0.5731*** (0.2234)	0.4212*** (0.1242)	0.2064*** (0.0210)
$\beta$	0.9139*** (0.0114)	0.9178 (-)	0.6814*** (0.1809)	-	-
$\ln L$	-3.532.1	-3,535.5	-3,528.4	-3,532.5	-3,569.0

주: FIGARCH(1,d,0)는 모형이 수렴하지 않아 결과를 보고하지 않았음.

## 5. 장기기억과 구조적 변화

장기기억과 관련한 문제중 하나는 변동성 시계열에 구조적 변화(regime switching)가 존재할 경우 이들 간의 구별이 쉽지 않다는 점이다. 이러한 문제는 구조적 변화가 존재할 경우 이러한 변화를 무시하고 단위근 검정을 수행하면 단위근이 존재하지 않음에도 불구하고 단위근의 존재를 기각하지 못하는 결과를 초래한다는 Hansen and Gregory(1996)의 결과와도 일맥상통한다. Kramer and Sibbertsen(2000)에서는 장기기억을 가지고 있음에도 불구하고 이를 무시하고 검정을 수행하면 가성적인 구조 변화를 채택한다고 지적한 반면 Choi and Zivot(2007)에서는 그 역의 경우도 성립함을 보였다. 따라서 장기기억의 존재를 보다 명확히 하기 위해서는 장기기억과 구조적 변화간의 예측력을 비교해 볼 필요가 있다. 구조적 변화를 설명하기 위해 Hamilton(1988)이 도입한 Markov switching 모형을 사용하였는데 추정모형의 설정은 다음과 같다.

$$y_t = \mu_{S,t} + \beta_{S,t}y_{t-1} + \epsilon_{S,t}$$

$$\epsilon_{S,t} \sim N(0, \sigma_S^2)$$

$$S = \{1, 2\}$$

여기서  $y_t$ 는 실현변동성 또는 VKOSPI를 의미한다. 매 기간마다 변동성은 비관측 상태변수  $S_t$ 에 의해 영향을 받는다. 즉, 예를 들면  $S_t = 1$ 이면 변동성이 낮은 기간을,  $S_t = 2$ 이면 변동성이 높은 기간을 의미한다. 변동성은 안정적인 1차 마코프 과정을 따르는 것을 가정하였으며 전이확률은 다음과 같다.

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}, \quad p_{ij} = \Pr\{S_t = j | S_{t-1} = i\}$$

이와 같이 설정된 모형을 실현변동성과 VKOSPI에 대해 최우추정법을 통해 추정된 결과가 <표 7>에 제시하였다. 추정 결과를 보면 모든 계수값들의 통계적 유의성이 상당히 높은 것으로 나타나고 있다. 또한 실현변동성 및 VKOSPI들의 자기상관 역시 높게 나타나고 있음을 확인할 수 있다. 먼저 VKOSPI의 추정결과에서 나타난 전이확률을 보면 어떤 상태에 있으면 그 상태에 계속해서 머무를 확률이 고변동성의 경우 0.8378이고 저변동성의 경우에는 0.9789로 나타나고 있는데 이는 균제상태에서의  $S_t$ 의 ergodic 확률이 저변동성의 경우에는 0.8848이며 고변



동성의 경우에는 0.1152임을 의미한다.<sup>12)</sup> 즉, 전체적으로 보면 저변동성이 발생하는 경우는 고변동성에 비해 약 7.7배 정도 높게 나타난다. 한편 실현변동성의 경우에는 자기상관은 VKOSPI에 비해 높게 나타난 반면 한 상태에 계속 머무르는 확률은 상대적으로 약화된 것으로 분석되었다. 이에 따라  $S_t$ 의 ergodic 확률의 경우 저변동성은 0.6253, 고변동성의 경우에는 0.3747로 나타나 VKOSPI에 비해 고변동성의 발생정도가 높게 나타난 것이 특징이다.

〈표 7〉 마코프 스위칭 모형 추정 결과

	VKOSPI		실현변동성	
	추정값	표준오차	추정값	표준오차
$\mu_1$	21.2778	(1.0954)	18.5432	(0.0001)
$\mu_2$	22.9505	(1.1345)	18.5193	(0.0002)
$\beta_1$	0.9791	(0.0037)	0.9950	(0.0017)
$\beta_2$	0.9858	(0.0092)	0.9896	(0.0051)
$\sigma_1^2$	0.7922	(0.0350)	0.1604	(0.0001)
$\sigma_2^2$	19.1904	(2.1707)	5.4537	(0.2746)
$p_{11}$	0.9789	(0.0046)	0.6277	(0.0011)
$p_{22}$	0.8378	(0.0367)	0.3786	(0.0331)
$\ln L$	-3,2154.9		-3,040.3	

마코프 스위칭으로 추정된 변동성 모형과 ARFIMA로 추정된 변동성 모형의 성과를 미래 변동성에 대한 예측력이라는 관점에서 어떤 모형이 더 우월한가를 살펴봄으로써 두 모형을 비교하고자 한다. 예측력 검정을 위해 일반적으로 자주 사용되는 방법에는 Diebold-Mariano 검정이 있다.<sup>13)</sup> 일반적으로 Diebold-Mariano(1995) 검정 방법은 각 모형을 이용하여  $h$ -기간의 예측오차를 계산한 후 이를 이용해서 계산된 손실함수를 비교하는 방식으로 이루어진다. 일반적으로

12) Ergodic 확률은  $S_t$ 가 정상상태(steady-state)에서의 확률을 의미하는데 저변동성의 ergodic 확률

$$\text{은 } \frac{1 - p_{22}}{2 - p_{11} - p_{22}} \text{로 계산된다.}$$

13) 예측력 검정에 사용되는 다른 방법으로는 Granger-Newbold 검정이 있으나 동 검정은 예측오차가 unbiased된 정규분포를 따른다는 가정이 필요하다. 이에 반해 Diebold-Mariano 검정은 이러한 가정을 필요로 하지 않는다.

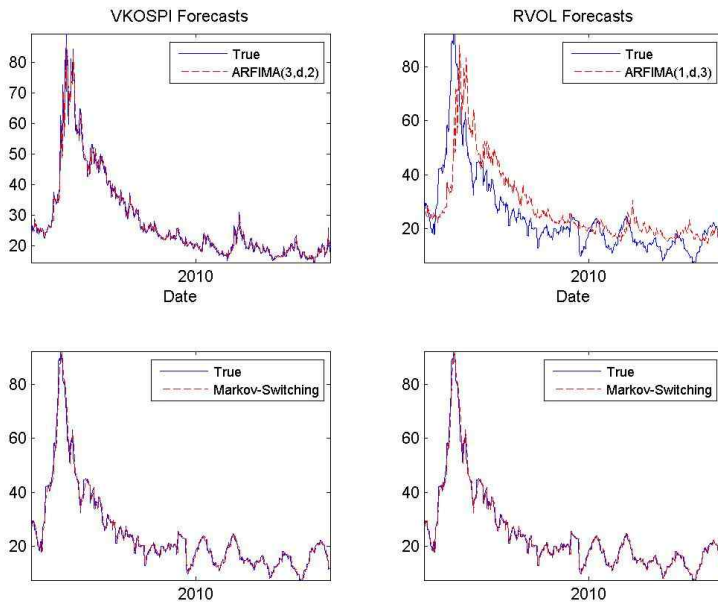
예측오차들의 제곱을 손실함수로 주로 사용하고 있으므로 본고에서도 이를 이용하여 예측력을 비교하였다. 예측에서는 초기 표본을 자료의 2/3 지점인 2008년 7월 3일까지를 추정에 사용하였으며 이후에는 구간을 이동하는 rolling window 방식으로 표본외 예측을 수행하였다. 분석 결과 1일 예측에 있어서는 실현변동성에서는 ARFIMA 모형의 예측력이 마코프 스위칭에 비해 다소 떨어지게 나타났지만 그 외의 경우에는 두 모형간의 예측력에는 큰 차이가 없는 것으로 분석되었다. 이러한 결과는 변동성의 장기기억 속성을 정확히 파악하기 위해서는 시계열상에 존재하는 구조적 변화에 대한 이해가 선행될 필요가 있음을 시사하는 대목이다.

<표 8> Diebold-Mariano 예측력 검정 결과

	VKOSPI		실현변동성	
	1일 예측	5일 예측	1일 예측	5일 예측
통계량(d)	0.2706	1.2014	-0.3088	-2.1032
t-value	1.3468	1.9510	-2.6912	-1.8984

주: Diebold-Mariano 통계량(d)은  $E[L(MS)] - E[L(ARFIMA)]$ 이며 여기서  $L(\cdot)$ 은 예측오차의 손실함수를 의미함

<그림 4> ARFIMA 및 마코프 스위칭 모형을 이용한 1일 예측



## 6. 결 론

장기 기억 속성의 존재는 실무적으로 금융자산의 보유기간이나 파생상품의 가격 결정에 상당히 중요한 요소로 인식되어 왔다. 그리고 이론적으로도 장기 기억의 존재는 합리적 기대에 기초를 두고 있는 효율적 시장가설에 배치되는 논거를 제시한다는 점에서 상당한 관심을 받아왔다.

본고에서는 KOSPI200 주가 변동성이 안정적인 장기 기억 과정을 가지는지 여부를 실증적으로 분석하였으며 이러한 장기 기억 과정이 구조 변화의 여부에도 여전히 견고한 현상인지를 살펴보았다. 동 연구가 기존의 장기 기억 속성을 실증적으로 분석한 선행 연구와의 차이점은 기존 연구가 GARCH류의 모형을 사용하여 과거 실현되었던 역사적 변동성의 장기 기억 속성을 분석하고 있는 반면 본고에서는 VKOSPI와 실현변동성을 통해 미래에 발생한 변동성에 대한 시장에서 예상하고 있는 기대변동성을 대상으로 장기 기억 속성을 살펴보았다. 분석 결과 기대변동성은 분수차분의 안정적인 장기 기억 속성을 가지고 있었으며 차분계수의 값은 기존의 연구보다 다소 높게 나타나고 있다는 점이 특징이다.

장기 기억 과정과 구조 변화를 감안한 마코프 스위칭 모형과의 표본외 예측력을 비교한 결과 1일 예측력에 있어서 마코프 스위칭 모형의 예측력이 다소 높게 나타난 점은 재미있는 결과로 받아들여진다. 이러한 결과가 최근의 금융위기로 인해 시장의 변동성이 크게 확대되었기 때문에 이러한 현상을 구조 변화에 유연한 마코프 스위칭에 비해 장기 기억 모형에서 빨리 수용하지 못한 결과일 수도 있다. 따라서 이러한 결과를 장기 기억 모형의 유용성에 대한 비판이라기보다는 장기 기억 모형에 대한 이해력을 증가시키기 위해서는 구조 변화에 대한 고려가 필요하다는 점은 시사하는 대목으로 이해할 필요가 있다. 향후의 연구에서는 구조 변화를 감안한 장기 기억 모형을 도입할 경우 시장 변동성에 대한 설명력과 예측력이 한층 더 강화될 것으로 기대된다.

## [참고 문헌]

강병진, "원/달러 장외통화옵션시장에서 내재변동성의 정보효과," *선물연구*, 19(2), 2010, pp. 207-232.

김무성, "통화정책과 시장의 기대: VKOSPI를 중심으로," *금융공학연구*, 9(4), 2010, pp. 145-165.

박재곤·이필상, "장기 기억 속성을 이용한 주가변동성 예측에 관한 연구," *금융연구*, 23(4), 2009, pp. 33-62.

유시용·고중양, "KOSPI200 실현변동성 예측력 제고에 관한 연구," *선물연구*, 17(1), 2009, pp. 21-49.

이일균, "분수차분 장기기억과정과 증권의 가격결정," *재무관리연구*, 16(1), 2001, pp. 1-21.

이재하·정제련, "KOSPI 200 옵션시장에서의 변동성지수 산출 및 분석," *증권학회지*, 35, 2006, pp. 109-138.

이지현·김동석·이회경, "FIGARCH 모형을 이용한 주가수익률 변동성의 장기 기억에 관한 연구," *선물연구*, 10(2), 2002, pp. 95-114.

최영수·이현정, "변동성 측정방법에 따른 KOSPI200 지수의 변동성 예측 비교," *한국통계학회논문집*, 17(2), 2010, pp. 293-308.

Anderson, Torben G. and Tim Bollerslev, "Intraday Periodicity and Volatility Persistence in Financial Market," *Journal of Empirical Finance*, 4(2), 1997, pp. 115-158.

Anderson, Torben G. and Tim Bollerslev, "Answering the Skeptics: Yes, Standard Volatility Models do Provide Accurate Forecasts," *International Economic Review*, 39(4), 1998, pp. 885-905.

Bollerslev, T. and H. O. Mikkelsen, "Modeling and Pricing Long Memory in Stock Market Volatility," *Journal of Econometrica*, 73, 1996, pp. 151-184.

Bryzgalova, Svetlana and Sergey Gelman, "Spurious Long-range Dependence in Emerging Financial Markets," *Unpublished manuscript*, 2008.

Cheung Y.W. and K. Lai, "A Fractional Cointegration Analysis of Purchasing Power Parity," *Journal of Business and Economic Statistics*,

11, 1993, pp. 103–112.

Choi, K., and E. Zivot, "Long Memory and Structural Changes in the Forward Discount: An Empirical Investigation," *Journal of International Money and Finance*, 2007, pp. 342–363.

Cooray, Arusha V. and Bruce Felmingham, "The Cyclical and Trend Behavior of Australian Investment and Savings," *Journal of Business Cycle Measurement and Analysis*, 3(3), 2007, pp. 367–386.

Diebold Franxis and Rudebusch Glenn, "On the Power of Dickey–Fuller Tests against Fractional Alternatives," *Economic Letters*, 35, 1991, pp. 155–160.

Diebold Franxis and R. S. Mariano, "Comparing Predictive Accuracy," *Journal of Business and Economic Statistics*, 13(3), pp. 253–263.

Engle, Robert F., "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation," *Econometrica*, 50, 1982, pp. 987–1007.

Fama, Eugene, "The Behavior of Stock Market Prices," *Journal of Business*, 38, 1965, pp. 34–105.

Geweke, J. and S. Porter–Hudak, "The Estimation and Application of Long Memory Time Series Models," *Journal of Time Series Analysis*, 4, 1983, pp. 221–238.

Glosten, L. and P. Milgrom, "Bid, Ask and the Transaction Prices in a Specialist Market with Heterogeneously Informed Traders," *Journal of Financial Economics*, 48, 1985, pp. 1779–1801.

Granger, Clive and R. Joyeux, "An Introduction to Long–Memory Time Series Models and Fractional Differencing," *Journal of Time Series Analysis*, 1, 1980, pp. 15–39.

Hamilton, James D, "Rational Expectations Econometric Analysis of Changes in Regime: An Investigation of the Term Structure of Interest Rates," *Journal of Economic Dynamics and Control*, 12, 1988, pp. 385–423.

Hosking, J. R. M., "Fractional Differencing," *Biometrika*, 68, 1981, pp.

165–176.

Kang, Sang-Hoon and Seong-Min Yoon, "Asymmetric Long Memory Feature in the Volatility of Asian Stock Market," *Asia-Pacific Journal of Financial Studies*, 24(2), 2006, pp. 259–286.

Kramer, W., and P. Sibbertsen, "Testing for Structural Change in the Presence of Long Memory," University of Dortmund Working Paper, 2000.

Kyle, A., "Stock Market Volatility Around Expiration Days in Japan," *Journal of Derivatives*, 4, 1985, pp. 23–43.

Mandelbrot, B. B., "The Variation of Certain Speculative Prices," *Journal of Business*, 36, 1963, pp. 394–419.

Sowell, F., "The Fractional Unit Root Distribution," *Econometrica*, 58, 1990, pp. 495–505.

## <부 록> 스펙트럴 분석

스펙트럴 분석은 공분산이 안정적인(covariance stationary) 시계열에 주로 적용되는 기법으로 시계열의 사이클을 식별하는데 일차적인 목표를 가지고 있다. 개별 시계열의 변동은 자기공분산함수(autocovariance function)를 푸리에 변환한 스펙트럴 밀도(spectral density)에 의해 다음과 같이 표현된다.

$$S(\omega) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega j} \gamma_j$$

여기서  $\gamma_j$ 는  $j$ 차 자기상관함수를,  $i$ 는  $\sqrt{-1}$ 을, 그리고  $\omega$ 는 각진동수(angular frequency)를 각각 의미한다. 한편  $\gamma_j$ 는 대칭이고 코사인함수는 우함수, 사인함수는 기함수이므로 이를 이용하여 위 식을 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$S(\omega) = \gamma_0 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \cos(\omega j) \gamma_j$$

자기상관함수는 푸리에 역변환을 사용하여 다음과 같이 복원할 수 있다.

$$\gamma_j = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega j} S(\omega) d\omega$$

이것은 스펙트럴 밀도는 자기공분산함수를 생성하는 함수임을 의미한다. 위 식에  $j=0$ 을 대입하면 다음과 같이 된다.

$$\gamma_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(\omega) d\omega$$

이는 스펙트럴 밀도를 적분하면 분석대상 시계열의 분산이 된다는 것이다. 따라서 개별 스펙트럴 밀도는 분산을 각 진동수 영역에서 분해한 것임을 알 수 있다. 위 식의 양변을  $\gamma_0$ 로 나누고  $f(\omega) = \frac{S(\omega)}{\gamma_0}$ 라고 정의하면 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega) d\omega$$

이 식을 보면  $f(\omega)/2\pi$ 가 확률밀도와 유사하기 때문에 이를 스펙트럴 밀도로 일컫는다.