아시안 선물의 도입과 시장에의 함의
(Asian Futures and their Market Implications)

유 진*

Abstract

2010년 11월11일의 옵션 쇼크의 예에서 알 수 있듯이, 1997년의 아시아외환위기 이후 우리나라의 증권 시장은 외국인 투자자 등의 정보거래자들(informed traders)로 인하여 유가증권 및 파생상품 가격이 교란되는 경우가 적지 않았다. 이로 인해 현재 대표적인 파생상품인 코스피200지수 선물 및 옵션 시장에는 국내외 기관투자가를 제외하고는 매우 투기성 강한 개인투자자들만이 참여하는, 준최적(sub-optimal)의 상태를 벗어나지 못하고 있다. 이와 관련하여 본 연구에서는 효시적으로 연구한 아시안선물(Asian Futures)과 이미 금융선진국에서 거래되고 있는 아시안옵션(Asian Options)의 도입을 제시한다. 이 상품들은 그 가격교란이 매우 어렵거나 거의 불가능하므로 선의의 투자자들을 보호할 수 있다. 또한 이 상품들은 일반 선물이나 옵션에 비해 그 변동성이 유의하게 감소되며 상품 설계에 따라 변동성의 감소 정도를 조절할 수 있어 보다 많은 투자자들이 참여하는, 즉 전체로서의 파생상품 투자자 풀(pool)이 확대되는 효과가 있다. 그리고 이 상품들은 현·선물 지수차익거래로 발생하는 역기능 또한 해소할 수 있다. 본 연구의 구체적 내용으로는, 먼저 파생상품 거래로 인하여 그 기초자산인 주가의 변동성이 어떤 영향을 받고 있는지를 1998년 1월초부터 2012년 8월말까지 14년 8개월의 자료로 심층 분석하였다. 이어 아시안선물 즉 평균가격선물의 개념을 설명하고 그 가치평가를 수리적으로 입증하였으며, 이 외의 기존 파생상품의 문제점과 새 파생상품의 특성을 계량적으로 또 직관적으로 분석하였다. 마지막으로 본 연구에서는 새로운 아이디어를 제시하고 그것의 현실적 타당성과 시장에의 함의를 정량적 및 정성적 접근방법을 모두 사용하여 균형적으로 제시하고자 하였다.

Keywords: 아시안선물, 아시안옵션, 변동성, 주가 조작, 차익거래

JEL Classification: G13

---

* 한양대학교 경제금융대학, 서울특별시 성동구 행당동 17 (133-791),
전화: 82-02-2220-1026, cell phone: 010-8121-3902, 이메일: jyoo@hanyang.ac.kr

목차

1. 서론

2010년 11월의 둘째 목요일인 11일, 대한민국 증권 시장에서 발생한 충격적인 사건은 본 연구자가 1999년초 이래 10여년간 우려를 금치 못했던 시나리오의 재현이었다. 이날 오후 2시 50분까지 $1,963^{03}$ 포인트로 약보합을 유지하던 KOSPI(Korea Stock Price Index, 코스피)가 마감 동시호가에 무려 53^{12} 포인트 급락한 $1,914^{74}$로 마감하였다.[1] 한 외국계 증권사의 차익거래와 연계된 2조원 이상의 대량 매도 주문으로 인하여 주가가 폭락하였던 것이다. 이는 선물컨버전 등으로 대규모의 코스피200지수 풋옵션 매수 포지션을 취하고 있었던 모 외국계 기관투자자가 자신의 합성선물 매수차익거래를 청산하기 위하여 대규모 주식 매도를 실행하였기 때문이었고, 결과적으로 이들은 풋옵션 매수 포지션으로 인하여 큰 폭의 이익을 실현하였다. 구체적으로는, 마감 직전의 KOSPI200 지수는 254.62이었고 행사가격 250인 KOSPI200 풋옵션은 최저가인 0.01을 기록하고 있었는데 10분 뒤 KOSPI200 지수가 7.11 포인트 급락한 247.51로 마감함으로 당 풋옵션 매수자는 무려 248배의 순이익을 실현하였다. 한편 이로 인해 주식시장에서는 시가총액 약 28조 8천억원이 증발되어 일반 주식 투자자들은 거액의 손실을 입었다.

위의 예에서도 알 수 있듯이, 1997년의 아시아외환위기(the Asian Currency Crisis) 이후 우리나라의 증권 시장이 사실상 100% 외국인 투자자들에게 개방된 이후 이 시장에서 (상대적으로) 강력한 그리고 지배적인 영향력을 행사하는 외국인 투자자들로 인하여 주식 및 선물 가격이 교란되는 경우가 적지 않다. 최근에는 이러한 현상을 빗대어 "한국 증권시장은 외국인들의 ATM (Automatic Teller Machine, 현금자동지급기)"이라는 냉소적인 표현까지 만들어졌다. 그러나 2010년 11월11일의 옵션 쇼크가 향후에도 발생할 소지가 여전히 존재하며, 코스피200 지수선물의 경우에도 이른바 "Wag the dog" 현상으로 인하여 주식 가격이 교란되는 경우도 많다. 요컨대 지금까지의 우리나라의 대표적 파생상품인 지수선물 및 지수옵션 상품은 일부 투자자의 효용을 증대시키는 것 못지 않게 위의 예에서와 같이 투자 일반 대중에게 (불필요한) 폐해도 끼쳐 왔는데, 현재로서는 후자의 경우를 근본적으로 해소하기 어렵다는 데에 문제의 심각성이 있다.[2]

한편 주가연계증권(ELS, Equity-linked Securities), 주식계워런트증권(ELW, Equity-linked warrant) 등의 비교적 신종 파생상품들은 그 가치평가가 너무 어렵거나 혹은 시장의 유동성 공급자(liquidity provider)에 의한 가격 왜곡이 발생하기 쉬워 일반 투자자들의 파생상품 투자 대안으로서 추천하기 어려운 것이 사실이다. 그러므로, 대부분의 일반 투자자들이 "risk-averse"하다고 전제할 경우, 현재 우리나라에서는 이러한 투자자들이 투자할 만한 적절한 파생상품이 거의 없다고 해도 과언이 아니다. 그 결과 우리나라의 파생상품 시장은 외국인이나 국내 기관투자자들과 같은 소위 정보투자자(informed traders, sophisticated investors)와 매우 투기적인 개인 투자자들의 게임의 장이 될 수 밖에 없다. 그런데 투기적인 개인 투자자는 잡음투자자(noise traders, naïve investors)에 가까워 결국은 이들이 주로 손실을 실현하고 외국인이나 국내 기관들이 주로 이익을 실현하는, 균형적이지 못하고 건강하지 못한 시장이 될 수 밖에 없다. 비록 국내 파생상품 거래 규모가 전세계적으로도 최상위급으로 성장했다고 하나

[1] 시각적인 명료성을 위해 1,948.12 포인트를 $1,948^{12}$ 포인트로 표기 한다.
[2] 위의 예에서의 폐해는 "필요악"이 아니라 제거할 수 있다는 점에서 "불필요한" 이라는 표현을 사용하였다.

이는 외면적 특성에 불과하며 내면적으로는 투자자 일반 대중에게 의미있는 투자의 장으로 진화하지는 못하고 있는 실정인 것이다.

본 연구에서는 이와 관련하여, 현재의 코스피200 지수선물이나 지수옵션의 대안으로서 아시안선물(Asian Futures)과 아시안옵션(Asian Options)의 도입을 제시한다. 이들은 내용상 "평균가격선물(Average Value Futures)" 및 "평균가격옵션(Average Value Options)"인 파생상품으로서, 전자는 본 연구에서 창의적으로 고안하여 제시하는 상품이며 후자는 이미 미국, 영국 등에서 거래되는 상품으로서 본 연구에서 그 적극적인 도입을 제안하는 바이다. 특히 본 연구에서는 기존의 코스피200 지수선물 및 지수옵션 상품을 거부하며 이 새 상품들을 도입하자는 것이 아니라, 기존의 지수 파생상품에 더해 이러한 새 상품들을 거래함으로써 일반 투자자들의 선택의 폭을 확대할 수 있음을 주장한다. 사실 아시안옵션의 경우는 본 연구자가 자산운용업계에서 파생상품전략가(derivatives strategist)로 일하던 1999년 1월25일 한국경제신문의 "제언" 면에서 일찍이 그 도입을 주장한 바 있는데, 이때의 우려가 11년이 지나 2010년 11월11일의 옵션쇼크로 현실화된 바 있어 본 연구에서 다시금 이러한 상품의 도입을 진지하게 재주장하는 바이다.[3]

본 연구에서 이 새 상품들의 도입을 주장하는 이유와 근거는 대략 다음의 세 가지이다. 첫째로 이 상품들은 그 가격교란이 매우 어렵거나 거의 불가능하다는 것이다. 우리나라는 주식시장의 동시호가 제도로 인해, 마감 동시호가 10분 동안만 주가를 조작하면 그날의 종가가 변경되므로, 이 종가를 기초자산 가격으로 하는 모든 파생상품의 가치가 왜곡될 수 있다. 반면 아시안선물이나 아시안옵션은 이러한 기초자산 가격 조작을 불가능하거나 매우 어렵게 하여 이로 인한 모든 폐해로부터 보호된다. 둘째로 아시안선물과 아시안옵션은 일반 선물이나 옵션에 비해 그 변동성이 유의하게 감소되며, 상품 설계에 따라 변동성의 감소 정도를 조절할 수 있다. 변동성이 적절히 감소되면, 코스피200 지수선물이나 지수옵션 상품을 위험하다고 여겨 투자에 참여하지 않았던 많은 잠재적 투자자들도 참여할 수 있게 된다. 그러므로 전체로서의 파생상품 투자자 풀(pool)이 확대되는 효과가 있다. 만일 이러한 점에서 새로운 파생상품이 투자자들의 효용을 제고할 수 있다면, 지금까지 일부의 투기적 개인투자자들만이 참여했던 우리의 파생상품 시장에서 벗어나 합리적인 대부분의 투자자들이 참여할 수 있는 새로운 시장으로 본질적, 획기적 변화와 발전을 꾀할 수 있을 것이다. 게다가 최근 제기된 "파생상품거래세"의 도입 명분 중 하나가 (지나치게) 투기적인 개인투자자들의 시장 퇴출이었음을 생각하면, 보다 많은 투자 대중이 참여할 수 있는 합리적 파생상품의 개발은 의미심장한 일이라고 여겨진다. 셋째로, 현·선물 지수차익거래로 인한 현·선물 시장의 문제점을 해소할 수 있다. 사실 지수차익거래를 포함한 모든 차익거래는 간단한 공식에 기반하여 순전히 기계적으로(mechanically) 이루어지는 것으로 현·선물의 본질적 가치와 유리될 수 있는 기계적인 거래이다. 그런데 이러한 차익거래 결과 현·선물의 가격이 등락할 수 밖에 없어, 본질적 가치를 좇아 현·선물 거래를 하는 투자자에게는 단기적으로 폐해를 줄 수도 있다. 반면 본 연구의 아시안선물과 아시안 옵션은 실제로 차익거래를 실행하기는 어렵기 때문에, 현·선물 가격이 차익거래의 유탄을 맞아 등락을 거듭할 개연성이 거의 없다.

본 연구에서는 주로 평균가격선물에 대해서 논의하지만 이 논의는 평균가격옵션에 대해서도 동일하게 적용된다. 후자에 대해서는 Kemna and Vorst (1990) 등에서 그 가치평가 등이

[3] 원문은 "http://www.hankyung.com/news/app/newsview.php?aid=1999012500271&intype=1"에서 다시 볼 수 있다.

제시된 이래 그 연구가 많이 진척되었고 실제로 미국 및 유럽 등에서 거래도 되고 있기 때문에 본 연구에서는 이에 대한 내용은 생략하기로 한다. 본 연구의 내용은 다음과 같다. 2장에서는 파생상품 거래로 인하여 그 기초자산인 주가의 변동성이 어떤 영향을 받는지를 심도있게 분석한다. 3장에서는 본 연구에서 새로이 제시하는 평균가격선물의 개념과 그 가치평가를 제시한다. 4장과 5장에서는 기존 파생상품의 문제점과 그 대안으로서의 새 파생상품의 특성을 설명하며 또한 사례연구로 Black-Scholes 옵션 이론가격의 감추어진 순기능에 대해 설명한다. 6장에서는 본 연구를 요약하며 마친다.

2. 주식가격의 변동성

코스피200 지수선물이나 지수옵션 거래에서 일정한 포지션을 가진 투자자들 중 만기일까지 그 포지션을 유지하는 경우에는 가능하면 만기일에 이익을 실현하기를 당연히 원한다. 이러한 이해관계 때문에 만기일에 그 기초자산인 코스피200지수에 영향을 미치고자 하는 유인(incentives)이 상존한다. 실제로도 이러한 이유 등으로 옵션이나 선물의 만기일인 매달 혹은 3, 6, 9, 12월의 둘째 목요일 혹은 이 날을 포함하는 1주 전체에 걸쳐 주가의 등락이 가속화되는 성향이 있다. 흔히 더블위칭데이(double witching day) 혹은 트리플위칭데이(triple witching day) 등으로 표현되는 선물·옵션의 만기일은 시장의 이러한 성향을 반영하고 있다. 그러나 동시에 이는 선의의 (주식-선물-옵션) 투자자들이 그로 인한 피해를 입게 될 수 있음을 의미한다. 여기서는 과연 이러한 우려가 사실인지를 객관적으로 파악해 보고자 한다.

선물·옵션의 만기일에 주가의 등락 정도가 다른 거래일의 그것에 비해 차이가 있는지를 알기 위해 다음과 같은 작업을 하였다. 먼저 흔히 "IMF 외환위기"로 불리는 "아시아외환위기" 직후인 1998년 1월 3일부터 2012년 8월31일까지의 3,681개의 코스피200 지수의 1일 수익률 자료를 수집하여 그 수익률의 변동성 즉 그 표준편차를 산출하였다.[4] 그리고 이 중에서 선물이나 옵션 만기일만의 자료를 추출하여 혹은 만기일을 포함한 1주의 자료를 추출하여 이들만의 수익률 표준편차를 구하여 보았다. 여기서 만기일을 포함한 (월요일부터 목요일 혹은 금요일까지의) 1주의 자료를 추출한 이유는, 선물·옵션의 만기일에 특정 세력이 주가의 등락을 유도하기 위해서는 만기일이 포함된 주 초반부터 주가 교란이 시작될 수 있기 때문이다. 또한 목요일이 만기임에도 불구하고 만기일이 지난 금요일까지의 자료를 포함하는 이유는, 만기일인 목요일에 인위적으로 주가를 올렸다면(내렸다면) 만기일이 지나면 더 이상 그러한 유인이 존재 하지 않아 시장이 다시 정상 가격을 회복할 가능성이 있기 때문이다. 즉 만기일인 목요일에 특정 세력의 개입으로 과도하게 주가가 상승하여 그 본질적 가치로부터 혹은 시장 컨센서스(market consensus)로부터 이탈하였다면, 다음 거래일인 금요일에는 이러한 세력의 개입 없이 주가가 그 본질적 가치 혹은 시장 컨센서스를 회복하기 위하여 다소 하락할 개연성이 있다고 예상되기 때문이다. 이 경우 목요일과 금요일의 수익률은 (+)와 (-) 값을 가지게 되어 수익률의 변동성 즉 표준편차가 커지며, 그 반대의 경우에도 (-)와 (+) 값을 가지게 되어 역시 변동성이 심화된다.

구체적인 작업 과정은 다음과 같다. 전술한 바, 1998년 12월 27일부터 2012년 8월31일

[4] 실제적으로는 1999년 1월3일부터의 수익률자료를 분석하기 위해 직전 거래일인 1998년 12월27일의 코스피200 지수값까지 포함하였다.

까지의 3,682개의 코스피200 지수의 종가 자료를 수집하여, 이들의 3,681개의 1일 수익률을 산출하였다. 재무·금융분야에서 통상 수익률 자료로 사용되는 연속복리 수익률을 산출하기 위하여 각 지수의 로그 값을 구한 다음 이들을 차분하여 수익률을 산출하였다. 즉 $\ln(P_d/P_{d-1일}) = x$ 라 하면 이 x는 연속복리법으로 산출된, 코스피200지수의 (거래일 d의) 1일 수익률이 된다. 이 과정은 다음의 <표 1>과 같다.

<표 1> 1일 수익률 산출

일자	KOSPI200	ln(KOSPI200)	1일 수익률
1997-12-27	42.34	3.74573	
1998/01/03	43.59	3.77483	0.02910
1998/01/05	44.77	3.80154	0.02671
1998/01/06	45.77	3.82363	0.02209
1998/01/07	45.75	3.82319	-0.00044
1998/01/08	47.49	3.86052	0.037327

이제 이 1일 수익률 자료들을 모아 전체 표본의 표준편차를 산출하면 코스피200지수 (1일 수익률의) 변동성이 파악된다. 그런데 표본(sample data)에 따라 다양한 변동성 수치를 파악해 볼 수 있다. 즉 다음의 각각의 표본에 대해 1일 수익률의 표준편차를 계산해 볼 수 있다.

(1) 모든 일별 수익률 자료
(2) 모든 선물 만기일의 일별 수익률 자료
(3) 모든 선물 및 옵션 만기일의 일별 수익률 자료
(4) 선물 만기일까지의 1주 동안의 일별 수익률 자료
(5) 선물 만기일이 포함된, 금요일까지의 1주 동안의 일별 수익률 자료
(6) 선물과 옵션 만기일까지의 1주 동안의 일별 수익률 자료
(7) 선물과 옵션 만기일이 포함된, 금요일까지의 1주 동안의 일별 수익률 자료
(8) 자료 (1)에서 자료 (5)를 제외한 일별 수익률 자료

자료 (1)로부터 “raw data”의 변동성이 산출된다. 자료 (2)로부터 매 3개월마다의 선물 만기일의 변동성이, 자료 (3)으로부터 매월의 선물·옵션 만기일의 변동성이 파악된다. 한편 자료 (4)는 자료 (2)를 확대한 것으로 선물 만기일인 목요일뿐 아니라 그 주(week)의 월, 화, 수요일까지 포함하는 것으로, 선물만기일이 포함된 주(week)의 만기일까지의 수익률의 변동성이 산출된다. 자료 (5)는 자료 (4)에 더해 만기일의 익일인 금요일까지의 1일 수익률 자료를 포함한 것으로, 선물 만기일이 포함된 1주(week)의 1일 수익률의 표준편차가 구하여진다. 자료 (6), (7)은 자료 (5), (6)과 동일한 방식으로 매달 옵션 만기일이 포함된 주(week)의 만기일까지 및 금요일까지의 1주 자료로부터 1일 수익률 변동성을 구하는 것이다. 한편 자료 (8)은, 결과적으로 자료 (5)의 변동성이 가장 높은 값으로 판명되었기 때문에, 이를 제외한 즉 비정상적으로 높은 변동성을 보이는 시기의 자료를 제외한 나머지 자료의 1일 수익률 자료를 산출한 것이다.

<표 2>는 예시를 위한 것으로 자료 (3)의 생성과정이다.[5] 일단 자료 (1)을 <표 1>과 같이 완성해 놓으면 나머지 자료 (2) ~ 자료 (8)은 각 조건에 맞는 "data points"만 모으면 된다. 이렇게 생성한 각 자료에서 구한 1일 수익률 변동성은 <표 3>의 "1일 수익률 분산" 열(column)에 나와 있다. 결과를 보면 <표 3>에 나타났듯이, 자료 (2)부터 자료 (7)까지의 모든 표본의 분산은 자표 (1)의 그것보다 크게 나타났으며, 이중 분산이 가장 큰 표본은 자료 (5)인 것으로 판명되었다. 그러므로 전체자료를 자료 (5)와 나머지 자료(= 자료 (1) - 자료 (5))로 구분하여 두 모집단의 변동성이 유의하게 다른가를 검정하여 보았다. 두 모집단의 수익률 변동성이 유의하게 다른가를 검정할 때 사용되는 F-검정은 표본 표준편차 값을 비교하는 것이 아니라 표본 분산 값을 비교하기 때문에 <표 3>에서는 표본분산 수치를 밝혔다. 구체적으로는, 선물만기일이 포함된 주(week)의 수익률 분산이 그렇지 않은 거래일의 수익률 분산과 같다는 귀무가설(H_0)을 전자가 후자보다 크다는 대립가설(H_a)로 단측검정(one-tailed test)를 수행하였다. 두 표본의 자유도인 283-1 = 282와 3,394-1 = 3,393을 사용하여 유의수준 5% 및 1% 수준에서 검정하였는데 귀무가설(H_0)은 이 모두의 단측검정에서 기각되었다. 그러므로 우리나라 코스피200지수선물의 결제일이 포함된 1주(one week) 동안의 코스피200지수는 이 기간이 아닌 거래일에서보다 적어도 1% 유의수준에서 유의하게 높은 변동성을 나타내고 있다.

<표 2> 선물·옵션 만기일의 수익률: 자료 (3)

일자	KOSPI200	1일 수익률
1998/01/08	47.49	0.03733
1998/02/12	58.38	-0.01209
1998/03/12	62.57	0.00513
1998/04/09	53.88	0.02919
1998/05/14	42.84	0.02219
1998/06/11	37.84	0.01545

<표 3> 1일 수익률 변동성 (분산)

자료 내용	구분	data points	1일수익률 분산	F 값 = (5)/(8)	F-Table df_1 = 282, df_2 = 3393	
전체 거래일	(1)	3,677	0.0004035		α = 0.05	α = 0.01
선물 만기일	(2)	58	0.0004933			
선물 및 옵션 만기일	(3)	176	0.0004769			
선물만기일까지 포함한 1주	(4)	225	0.0005262			
선물만기일 및 금요일까지의 1주	**(5)**	**283**	**0.0005432**	**1.386**	**1.244**	**1.300**
선물 및 옵션 만기일까지 포함한 1주	(6)	686	0.0004148			
선물, 옵션 만기일 및 금요일까지의 1주	(7)	862	0.0004228			
전체 자료에서 자료 (5) 제외	(8)	3,394	0.0003920			

[5] 1998년 1월의 첫째 목요일은 1월1일로서 공휴일이지만, 옵션·선물의 결제일은 "calendar day"상의 둘째 목요일로 결정되기 때문에 1월8일이 옵션 결제일이 된다. 한편 둘째 목요일이 공휴일인 경우에는 전(前)거래일인 수요일이 결제일이 된다.

3. 평균가격선물의 이론가격

본 장에서는 평균가격선물의 개념을 설명하고 그 이론가격을 도출한다. 이론가격은 거의 모든 파생상품 가치평가에서 사용되는 “no arbitrage price”를 계산함으로써 도출한다. 1절에서는 본 장에서 사용될 용어와 가정을 소개하고, 3절에서는 이를 사용하여 평균가격선물의 이론가격을 도출하며, 2절에서는 이에 앞서 이 선물과 유사하면서 이해가 보다 쉬운 선물 포트폴리오의 이론가를 산출해 본다.

3.1 가정 및 용어

다음은 본 장에서 사용될 주요 용어들이다.

① n: 평균가격선물에서 사용하는 “reference dates”의 개수 ($n = 2, 3, \cdots$)
② $T_1,\ldots,T_{n-1},T_n$: 평균가격선물의 n 개의 reference dates ($T_1 < T_2 < \cdots < T_{n-1} < T_n$)
③ T_n; 평균가격선물의 만기일
④ S_t: 시점 t의 주가
⑤ F_{G,t,T_2} : 만기일이 T_2인 (일반) 선물의 시점 t에서의 이론가격

⑥ F_{AP,t,T_1,T_2} : 만기일인 T_2인(n=2) 평균가격선물의 시점 t에서의 이론가격 ($t<T_1<T_2$)

⑦ F_{AP,T_1,t,T_2} : 만기일인 T_2인 평균가격선물의 시점 t에서의 이론가격 ($T_1 \leq t <T_2$)

⑧ $F_{AP,T_1,t=T_2}$: 만기일인 T_2인 평균가격선물의 시점 t에서의 이론가격 ($t = T_2$)

본 장에서 사용될 주요 가정은, 투자자들이 주식 등의 기초자산을 0.2주 혹은 0.5주 등 1 개 미만의 수량으로 구입할 수 있다는 것이다. 이러한 가정은 사실 Capital Asset Pricing Model(CAPM)이나 Black-Scholes Pricing Model 등의 가치평가 모형에서 널리 쓰이는 가정이기도 하다. 이 가정은 3절의 평균가격선물의 이론가격을 도출할 때 사용된다.

3.2 선물 포트폴리오의 이론가격

두 시점 T_1과 T_2에서의($T_1<T_2$) 평균 주가에 대한 선물 상품을 이해하기 위해, 이보다 더 이해하기 쉬운 다음의 선물 계약을 생각해 보자. 즉 T_2 시점에서 S_{T_1}과 S_{T_2}의 가격으로 한 주씩을 매수 혹은 매도하는 선물 계약 “A”를 생각해 보자(물론 T_2 시점에서 S_{T_1}은 이미 알려진 상수가 된다). 일반적인 (주식) 선물 계약에서는 만기시점 T_2에서의 선물 결제 가격은 S_{T_2}가 된다. 즉 “no arbitrage principle”에 의해, 만기시점의 선물 가격은 그 기초자산의 현물

가격과 같아지는 것이다.[6] 그런데 평균가격선물은 이러한 선물이 아니라, 비유적으로 말하면, 만기시점에 주식 2주를 서로 다른 가격 S_{T_1}과 S_{T_2}로 거래하는 계약과 유사하다. 이러한 선물 A의 이론가격 도출 과정을 이해하면, 본 연구에서 궁극적으로 제시하는 평균가격선물 즉, 만기일에 $\frac{1}{2}(S_{T_1}+S_{T_2})$의 가격으로 현물 1주를 매매하는, 나아가 만기일에 $\frac{1}{n}\left(S_{T_1}+S_{T_2}+\ldots+S_{T_n}\right)$의 가격으로 현물 1주를 매매하는 선물 계약의 이론가격도 비교적 용이하게 이해할 수 있다.

먼저 만기시점 T_2에서 주식 2주를 각각 S_{T_1}과 S_{T_2}의 가격으로 결제하는 선물계약 A는 두 개의 (선물)계약의 포트폴리오임을 알 수 있다. 즉 만기시점 T_2에서 주식 1주를 S_{T_2}에 매매하는 선물(a)과 동일한 만기시점 T_2에서 주식 1주를 S_{T_1}에 매매하는 선물계약(aa)으로 이루어진 선물 포트폴리오가 된다. 여기서 유의해야 할 것은 두 번째 계약인 aa이다. 왜냐하면 aa는 만기시점 T_2에서 주식을 S_{T_2}에 결제하는 것이 아니라 S_{T_1}의 가격으로 결제하는, 특이한 계약이기 때문이다. 이는 만기시점의 선물 결제가격이 그 이전 시점의 현물가격으로 결정되는, 이를테면 이색선물(exotic futures)이라 할 수 있다. 이색선물 aa의 시점 t에서의 이론가격($F_{aa,t,TH}$)은 시간 t 의 시점에 따라 S_{T_1} 혹은 $S_0 \cdot e^{r(T_1-t)}$이 된다.[7] 그렇지 않으면 차익거래가 발생하기 때문인데, 다음은 이에 대한 증명이다.

Lemma 1: 선물 aa의 이론가격($F_{aa,t,TH}$)

$$F_{aa,t,TH} = \begin{cases} S_{T_1} & where\ \ T_1 \le t \le T_2 \\ S_t \cdot e^{r(T_1-t)} & where\ \ t < T_1 \end{cases}$$

Proof 1: Lemma 1 증명

i) $t = T_2$인 경우:

먼저 $t = T_2$인 경우를 생각하자. 이 시점에서는 S_{T_1}은 이미 알려진 상수이다. 그러므로 시점 T_2에서의 이 선물의 시장가격은 S_{T_1}이 되어야 한다. "만기시점 T_2에서 (알려진) S_{T_1}의 가격으로 주식 1주를 결제하는" 선물 aa의 T_2에서의 가격이 S_{T_1}이 아니라면, 즉각적인 차익거래가 가능하기 때문이다. 이는 마치 일반적인 선물 즉 시점 T_2에서 S_{T_2}의 가격으로 주식 1주를 결제하는 선물(a)의 시장가격이 S_{T_2}가 되어야 하는 것과 동일한 이치이다. 만기시점 T_2에서는 S_{T_1}이나 S_{T_2}나 모두 알려진 상수이기 때문이다.

ii) $T_1 \le t < T_2$인 경우:

[6] 이 가격으로 주식 몇 주를 매매하는가에 대해서는 합리적인 규모를 고려해서 현 개별주식선물의 경우처럼 주식 10주를 매매하는 것 등으로 설정할 수는 있지만, 결제 기준이 되는 선물 가격 자체는 만기일 현물 종가가 된다.
[7] 여기서 "r"은 1 기간의 무위험이자율이다.

시점 t가 T_1을 지난 경우($T_1 \le t$)를 생각해보자. 이 경우에도 시점 t에서 S_{T_1}은 이미 알려진 상수이다. 그러므로 시점 t에서의 이 선물의 시장가격은 S_{T_1}이 되어야 한다. “T_2에서 (알려진) S_{T_1}의 가격으로 주식 1주를 결제하는” 선물 aa의 시점 t의 시장가격이 S_{T_1}이 아니라면 차익거래가 가능하기 때문이다. 즉 시점 t에서 이 선물계약의 시장가격($F_{aa,t}$)이 S_{T_1}과 같지 않다면 투자자들은 이 선물의 매수나 매도를 통해 손쉽게 무위험 차익을 얻을 수 있다. 예로서 $F_{aa,t} = S_{T_1} + \alpha$라고 하자($\alpha>0$). 이처럼 선물가격이 이론가격 S_{T_1}보다 클 때 투자자 갑이 이 선물계약에서 매도 포지션을 취한다고 가정하자. 갑은 만기시점 T_2에서 이 선물계약을 정산해야 하는데 이는 곧 반대 매매 즉 매수 포지션을 취하거나 최종결제가격으로 자동청산 됨으로써 가능하다. i)에서 입증된 바, 이 선물의 만기시점 T_2에서의 결제가격은 항상 S_{T_1}이므로 갑의 선물 투자 이익은 “선물 매도가격 – 선물 매수가격” = $(S_{T_1} + \alpha) - S_{T_1} = \alpha(>0)$가 된다. 마찬가지로 $F_{aa,t} = S_{T1} - \alpha$라고 하자($\alpha>0$). 이 경우에는 갑이 이 선물계약에서 매수 포지션을 취함으로써 무위험 차익 α를 시점 T_2에서 실현할 수 있다. 그러므로 이러한 무위험 차익을 제공하지 않는 S_{T_1}이 이 선물의 시점 t에서의 가격이 된다($F_{aa,t,TH} = F_{aa,t} = S_{T_1}$).

iii) $0 \le t < T_1$인 경우:

이 경우에는 시점 t에서 S_{T_1}은 알려진 수치가 아니다. 이는 마치 일반 선물계약 a에서 만기시점의 결제가격인 S_{T_2}가 그 이전에는 알 수 없는 것과 마찬가지인 것이다. 결론적으로, 만기시점 T_2에서 S_{T_1}의 가격으로 주식 1주를 결제하는 선물 aa의 시점 t에서의($t<T_1$) 이론가격은 $F_{aa,t,TH} = S_t \cdot e^{r\times(T_1-t)}$ 이다. 일반 선물 a의 이론가격이 $S_0 \cdot e^{r\times(T_2-t)}$ 임을 감안하면, T_2가 T_1으로 대체된 점만 다르다. 이 또한 “no arbitrage principle”을 사용하여 증명가능하다. 먼저 현재 선물 aa의 시장가격($F_{aa,t}$)이 이론가격보다 크다고 가정하자. 즉 $F_{aa,t} = S_t \cdot e^{r\times(T_1-t)} + \alpha$ 이다 ($\alpha>0$). 이때 투자자 갑이 이 선물계약에서 매도 포지션을 취하고 현물시장에서는 주식 1주를 S_t의 가격으로 매수한다. 매수 자금은 이자율 r로 차입한다고 가정하자. 시점 T_1이 되면 이 선물 aa의 가격은, ii)에서 입증한 바, $F_{aa,T_1} = S_{T_1}$ 이 된다. 이 값이 되지 않으면 차익거래가 발생하기 때문이다. 이 시점 T_1에서 갑이 선물계약과 현물을 모두 청산한다 하자. 즉 선물시장에서는 매수포지션을 취하고 현물은 매도한다. 그러면 선물 거래에서의 손익은 “선물 매도가격 – 선물 매수가격” = $F_{aa,t} - F_{aa,T_1} = (S_t \cdot e^{r\times(T1-t)} + \alpha) - S_{T_1}$ 이 된다. 한편 현물 매도로 인하여 S_{T_1}의 현금(cash flow)이 유입된다. 그리고 갑은 S_t 만큼의 자금을 빌려준 대출자에게 $S_t \cdot e^{r\times(T_1-t)}$ 만큼의 금액을 갚아야 한다. 이러한 일련의 거래로 인한 종국적인 현금흐름은 곧 선물 거래로 인한 현금흐름과 현물 거래로 인한 현금흐름의 합산인데 이는

$$[(S_t \cdot e^{r\times(T_1-t)} + \alpha) - S_{T_1}] + [S_{T_1} - S_t \cdot e^{r\times(T_1-t)}] = \alpha > 0$$

이 되어 갑은 무위험 차익 α를 얻게 된다. 마찬가지로, 만일 선물 aa의 시장가격이 이론가격보다 작다면, 즉 $F_{aa,t} = S_t \cdot e^{r\times(T_1-t)} - \alpha$ 이면, 투자자 갑이 선물시장에서 매수 포지션을 취하고 현물시장에서는 주식 1주를 S_t의 가격으로 공매도함으로써 무위험 차익 α를 시점 T_1에서 실현할 수 있다.

3.3 평균가격선물의 이론가격

이제 선물 a와 선물 aa로 이루어진 선물 포트폴리오인 A의 이론가격에 대해 파악해 보자. A의 이론가격은 선물 a의 이론가격과 선물 aa의 이론가격의 합이다. 일반 선물인 a의 이론가격은 잘 알려져 있듯이 $S_t \cdot e^{r\times(T_2-t)}$ 이고 이색선물 aa의 이론가격은 Lemma 1에서 제시되었다. 그러므로 선물 포트폴리오인 A의 이론가격은 다음과 같다.

Lemma 2: **선물 A의 이론가격($F_{A,t,TH}$)**

$$F_{A,t,TH} = \begin{cases} S_t \cdot e^{r(T_1-t)} + S_t \cdot e^{r(T_2-t)} & where\ t < T_1 \\ S_{T_1} + S_t \cdot e^{r(T_2-t)} & where\ T_1 \le t < T_2 \\ S_{T_1} + S_{T_2} & where\ t = T_2 \end{cases}$$

한편 본 연구의 직접적인 대상인 평균가격선물(average price futures)은 A가 약간 변형된 형태라고 할 수 있다. 선물 A는 주식 2주를 시점 T_2에서 각각 S_{T_1}과 S_{T_2}의 가격으로 1주씩 결제하는 선물 포트폴리오인 반면, 이에 대응하는 평균가격선물은 주식 1주를 시점 T_2에서 S_{T_1}과 S_{T_2}의 평균 가격으로(= $\frac{1}{2}[S_{T_1} + S_{T_2}]$) 결제하는 선물 계약이기 때문이다. 그런데 만일 Capital Asset Pricing Model(CAPM)이나 Black-Scholes Pricing Model에서와 같이 0.5주 등 1주 미만의 주식을 거래할 수 있다고 가정한다면, 이 평균가격선물의 이론가격은 간단히 산출된다. 즉 이 선물은 시점 T_2에서 S_{T_1}의 가격으로 $\frac{1}{2}$주를, 그리고 S_{T_2}의 가격으로 $\frac{1}{2}$주를 결제하는 선물 계약이라 할 수 있기 때문이다. 즉 이 평균가격선물은 위의 선물 A와 내용은 동일하고 단지 계약 규모만 $\frac{1}{2}$로 감소된 선물계약이 된다. [8] 그러므로 평균가격선물의 이론가격은 정확히 선물 A의 이론가격의 $\frac{1}{2}$배가 된다. 이러한 평균가격선물의 이론가격은 위의 Proof 1에 나오는 주식 1주를 모두 $\frac{1}{2}$주로 대체하면 쉽게 증명이 가능하다.

Lemma 3 **평균가격선물의 이론가격($F_{AP,t,TH}$): n = 2**

$$F_{AP,t,TH} = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \left[S_t \cdot e^{r(T_1-t)} + S_t \cdot e^{r(T_2-t)} \right] & where\ t < T_1 \\ \frac{1}{2} \cdot \left[S_{T_1} + S_t \cdot e^{r(T_2-t)} \right] & where\ T_1 \le t < T_2 \\ \frac{1}{2} \cdot \left[S_{T_1} + S_{T_2} \right] & where\ t = T_2 \end{cases}$$

한편 3 시점의 주식가격들이 평균의 대상이 될 때는 어떠할까? 예로서 만기시점 T_3 에서

[8] 두 삼각형의 관계를 따질 때 사용하는 “합동” 혹은 “닮음”이라는 용어를 사용하여 비유한다면, 선물 A와 이 평균가격선물은 서로 “닮음”의 관계이다.

주식 1주를 S_{T_1}, S_{T_2}, 및 S_{T_3} 의 평균 가격으로(= ⅓[S_{T_1} + S_{T_2} + S_{T_3}]) 결제하는 선물 계약을 선물 AP 라 하자($T_1 < T_2 < T_3$). 1주 미만의 주식을 거래할 수 있다면, AP의 이론가격 또한 위의 Lemma 3과 크게 다르지 않다. 즉 지금까지와 마찬가지로 분석한다면 이 선물 AP의 이론가격은 다음과 같이 결정된다.

Lemma 4 평균가격선물의 이론가격($F_{AP,t,TH}$): n = 3

$$F_{AP,t,TH} = \begin{cases} \frac{1}{3}\cdot\left[S_t\cdot e^{r(T_1-t)} + S_t\cdot e^{r(T_2-t)} + S_t\cdot e^{r(T_3-t)}\right] & where\ \ t < T_1 \\ \frac{1}{3}\cdot\left[S_{T_1} + S_t\cdot e^{r(T_2-t)} + S_t\cdot e^{r(T_3-t)}\right] & where\ \ T_1 \le t < T_2 \\ \frac{1}{3}\cdot\left[S_{T_1} + S_{T_2} + S_t\cdot e^{r(T_3-t)}\right] & where\ \ T_2 \le t < T_3 \\ \frac{1}{3}\cdot\left[S_{T_1} + S_{T_2} + S_{T_3}\right] & where\ \ t = T_3 \end{cases}$$

동일한 원리로, 일반적으로 n 개의 시점의 주식가격들이 평균의 대상이 되는 평균가격선물 AP의 이론가격은 다음과 같이 도출된다.

Lemma 5 평균가격선물의 이론가격($F_{AP,t,TH}$): n개의 주가

$$F_{AP,t,TH} = \begin{cases} \frac{1}{n}\left[S_t e^{r(T_1-t)} + S_t e^{r(T_2-t)} + \cdots + S_t e^{r(T_{n-1}-t)} + S_t e^{r(T_n-t)}\right] & where\ \ t < T_1 \\ \frac{1}{n}\left[S_{T_1} + S_t e^{r(T_2-t)} + \cdots + S_t e^{r(T_{n-1}-t)} + S_t e^{r(T_n-t)}\right] & where\ \ T_1 \le t < T_2 \\ \frac{1}{n}\left[S_{T_1} + S_{T_2} + S_t e^{r(T_3-t)} + \cdots + S_t e^{r(T_{n-1}-t)} + S_t e^{r(T_n-t)}\right] & where\ \ T_2 \le t < T_3 \\ \cdots & \\ \frac{1}{n}\left[S_{T_1} + S_{T_2} + \cdots + S_{T_{n-2}} + S_t e^{r(T_{n-1}-t)} + S_t e^{r(T_n-t)}\right] & where\ \ T_{n-2} \le t < T_{n-1} \\ \frac{1}{n}\left[S_{T_1} + S_{T_2} + \cdots + S_{T_{n-2}} + S_{T_{n-1}} + S_t e^{r(T_n-t)}\right] & where\ \ T_{n-1} \le t < T_n \\ \frac{1}{n}\left[S_{T_1} + S_{T_2} + \cdots + S_{T_{n-2}} + S_{T_{n-1}} + S_{T_n}\right] & where\ \ t = T_n \end{cases}$$

한편 n이 무조건 클수록 좋은 선물 상품이 된다고는 할 수 없다. n이 지나치게 큰 상품은,

이 상품을 거래할 투자자들에게 지나치게 복잡하고 어려운 상품으로 여겨질 수 있어 그 유동성이 제한될 수도 있다. 평균가격선물의 취지를 잘 살리면서 어느 정도의 유동성을 확보할 수 있는 n의 최적값에 대해서는 향후 보다 세밀한 이론적, 실무적 검증이 필요할 것이다. 참고로, 현재 국내의 대부분의 ELS(equity-linked securities, 주가연계증권) 상품들은 최종기준가격(결제가격)을 1일의 주가(종가)가 아닌 연속되는 3일의 주가로 설정된다.

4. 평균가격선물의 변동성

본 장에서는 일반 선물 대비 특성 중 하나인 평균가격선물의 변동성의 감소에 대하여 체계적으로 파악한다. 결론적으로 평균가격선물의 변동성은 일반 선물의 그것보다 작으며, “reference dates”의 수를 조절함에 따라 변동성의 감소 정도를 조절할 수도 있다. 그러므로 현재 코스피200지수선물이나 옵션의 리스크 혹은 변동성이 다소 높다고 생각하여 이 시장에 참여하기를 주저하는 일반 투자자들은 그 위험이 적절히 감소된 평균가격선물 상품에는 관심을 가질 수 있어 파생상품 투자의 저변이 확대될 수 있다. 변동성 감소에 대한 수리적 분석은 동일한 만기의 일반 선물과 대비하여 수익률 분산이 여하히 감소하는가를 고찰함으로써 이루어진다. 한편 5장에서는 평균가격선물의 또 다른 장점인 “의도적 주가 교란의 방지” 및 “차익거래의 폐해로부터의 보호”에 대하여 논한다. 내용상 본 장의 논의는 수리적인 반면 5장에서의 논의는 직관적이며 서술적(descriptive)임을 밝힌다.

4.1 로그정규분포

Black-Scholes Pricing Model 등에서 가정하듯이 특정 주가 S의 확률과정(stochastic process)이 다음과 같다고 하자.

$$dS = \mu \cdot S \cdot dt + \sigma \cdot S \cdot dB, \qquad \text{where } dB \sim N(0, dt) \qquad \text{(식 1)}$$

여기서 μ와 σ는 S의 수익률의 평균과 표준편차를 나타내는 모수이고 B는 “Wiener process” 혹은 브라운운동(Brownian motion)을 의미하는 변수로, 시간 dt 가 경과할 때 이 변수의 변화량 dB는 평균이 0이고 분산이 dt인 정규분포를 따른다. 즉 $dB \sim N(0, dt)$이다. 그러면 (식 1)의 주가 S에 자연대수를 취한 ln(S)의 확률과정은 다음과 같다.

$$d[\ln(S)] = (\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2) \cdot dt + \sigma \cdot dB \qquad \text{(식 2)}$$

(식 1)이 주어지면, “Ito’s Lemma” 에 의해 (식 2)는 쉽게 도출된다. 이는 이미 잘 알려져 있는 사실로 여기서는 증명을 생략한다. (식 2)는 순간적인 로그주가의 증분 d[ln(S)]이 다음의 정규분포를 따름을 의미한다.

$$d[\ln(S)] = \ln(S_{dt}) - \ln(S_0) \sim N\left((\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2) \cdot dt, \sigma^2 \cdot dt\right) \qquad \text{(식 3)}$$

브라운운동의 특성에 의해, 시간의 경과가 dt(= dt − 0)가 아니라 일반적으로 t(= t – 0)일 경우 로그주가의 증분은 다음의 정규분포를 따른다.

$$\ln(S_t) - \ln(S_0) \sim N(\, (\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)\cdot t,\ \sigma^2\cdot t) \qquad \text{(식 4)}$$

현 시점 t = 0에서 S_0 혹은 $\ln(S_0)$는 알려진 상수이므로, (식 4)는 결국 다음을 의미한다(equivalent).

$$\ln(S_t) \sim N(\, \ln(S_0) + (\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)\cdot t,\ \sigma^2\cdot t) \qquad \text{(식 4-1)}$$

또 (식 4-1)은 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\ln(S_t) = \ln(S_0) + (\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)\cdot t + \sigma\cdot(B_t - B_0) \qquad \text{(식 4-2)}$$

한편 로그정규분포를 따르는 확률변수 X의 평균과 분산은 다음과 같이 알려져 있다.

$$\ln(X) \sim N(m, v^2) \text{ 이면 } E[X] = e^{m+\frac{v^2}{2}},\ Var[X] = e^{2m+v^2}\cdot\left(e^{v^2} - 1\right) \text{ 이다.} \qquad \text{(식 5)}$$

그러므로 (식 4-1)과 (식 5)에 의해 현시점 t = 0에서 미래 시점 T의 주가 S_T의 평균과 분산은 다음과 같이 산출된다.[9]

$$E[S_T] = S_0\cdot e^{\mu\cdot T},\ \ Var[S_T] = (S_0)^2\cdot e^{2\mu T}\left(e^{\sigma^2 T} - 1\right) \qquad \text{(식 6)}$$

4.2 선물의 미래 가격의 적률(moments)

본 절에서는 일반 선물과 평균가격선물의 미래 가격의 변동성을 비교함으로써 선물 투자의 위험에 있어서 유의한 변화가 있는지를 파악해 보기로 한다. 먼저 현재의 시점을 0, 미래 임의의 시점을 t(>0)라 하고, 시점과 관계 없이 선물 가격은 선물의 이론가격에서 벗어나지 않는다고 가정한다. 그러므로 본 장에서는 선물의 미래 가격을 표기할 때 굳이 시장 가격과 이론 가격을 구별하지 않고 동일한 표기를 사용하기로 한다. 한편 실제로는 선물 가격이 이론 가격에서 벗어날 수도 있는데 이에 대해서는 5장에서 자세히 논의한다.

평균가격선물을 본격적으로 논하기에 앞서 일반적인 선물의 경우 즉 n = 1인 경우의 미래 선물 가격의 평균과 분산을 구해보자. 이 선물의 만기일이 T_2이면 이 선물의 임의의 미래 시점 t(>0)에서의 이론 가격은 $S_t\cdot e^{r(T_2-t)}$이다.[10] 한편 예로서 오늘 = 2012년 9월 14일, 만기일

[9] 지수 함수의 특성 중 “$e^{\ln(S)} = S$”라는 사실을 이용하면 쉽게 도출된다.
[10] 단기 무위험 이자율은 시점 0에서 시점 T_2 까지는 “r”이라는 고정된 값을 가진다고 가정한다. 현실적으로도 코스피200 지수선물 상품들 중 대부분의 거래를 점하는 근월물의 잔존만기는 최장 3개월 즉 0.25년으로 이 짧은 기간 동안 단기 무위험 이자율이 크게 변동하는 일은 거의 없다.

= 2012년 12월 13일, 임의의 미래 시점 t = 2012년 10월 12일 이라 하면 T_2 = 3개월이후 = 3/12(년), t = 1개월 이후 = 1/12 등으로 이미 알려진 상수가 된다. 그러므로 오늘 시점 0에서 임의의 미래 시점 t에서의 선물 가격의 평균과 분산은 (식 6)에 의해 다음과 같이 구해진다.

$$E[S_t \cdot e^{r(T_2-t)}] = E[S_t]\cdot e^{r(T_2-t)} = S_0 \cdot e^{\mu \cdot t} \cdot e^{r(T_2-t)} = \; S_0 \cdot e^{\mu \cdot t + r(T_2-t)}$$

$$Var[S_t \cdot e^{r(T_2-t)}] = Var[S_t]\cdot e^{2r(T_2-t)} \; = \; (S_0)^2 \cdot e^{2\mu \cdot t}\left(e^{o^2 \cdot t} - 1\right)\cdot e^{2r(T_2-t)}$$

그러므로, 만기 T_2인 일반 선물의 시점 t에서의 가격을 F_{G,t,T_2} 라 표기하면, Lemma 6이 도출된다(여기서 G는 “general”을 의미한다).

Lemma 6 만기 T_2인 선물의 미래 가격의 1, 2차 적률: $t < T_2$
$F_{G,t,T_2} \equiv S_t \cdot e^{r(T_2-t)}$ $E\left[F_{G,t,T_2}\right] = E[S_t \cdot e^{r(T_2-t)}] = S_0 \cdot e^{\mu \cdot t + r(T_2-t)}$ $Var\left[F_{G,t,T_2}\right] = Var[S_t \cdot e^{r(T_2-t)}] = (S_0)^2 e^{2\mu \cdot t + 2r(T_2-t)}\left(e^{o^2 t} - 1\right)$

Lemma 6으로부터, 만기 T_1인 일반 선물의 시점 t에서의 가격을 F_{G,t,T_1} 라 표기하면, Corollary 1이 도출된다. 여기서 만기 T_1인 일반 선물의 이론가를 논하는 이유는 평균가격선물의 한 구성원인 (3장 2절의) 선물 “aa"의 시점 t(<T_1)의 이론가격이 만기 T_1인 일반 선물의 이론가격과 일치하기 때문이다.

Corollary 1 만기 T_1인 선물의 미래 가격의 1, 2차 적률: $t < T_1 < T_2$
$F_{G,t,T_1} \equiv S_t \cdot e^{r(T_1-t)}$ $E\left[F_{G,t,T_1}\right] = E[S_t \cdot e^{r(T_1-t)}] = S_0 \cdot e^{\mu \cdot t + r(T_1-t)}$ $Var\left[F_{G,t,T_1}\right] = Var[S_t \cdot e^{r(T_1-t)}] = (S_t)^2 e^{2\mu \cdot t + 2r(T_1-t)}\left(e^{o^2 t} - 1\right)$

한편 만기 T_1인 선물 F_{G,t,T_1} 은 만기 T_2인 F_{G,t,T_2} 의 함수로 표시할 수 있다. 즉

$F_{G,t,T_1} \equiv S_t \cdot e^{r(T_1-t)} = S_t \cdot e^{r(T_2-t)} \cdot e^{r(T_1-T_2)} = F_{G,t,T_2} \cdot e^{r(T_1-T_2)}$ 인데 $T_1<T_2$ 이므로 $e^{r(T_1-T_2)}<1$이 되어

$F_{G,t,T_1} = F_{G,t,T_2} \cdot e^{r(T_1-T_2)} < F_{G,t,T_2}$ 이다. 그러므로 Corollary 1은 다음을 의미한다.

Corollary 2 만기가 T_1, T_2인 선물의 미래 가격의 1, 2차 적률 비교: $t<T_1<T_2$

만기가 짧은(T_1) 선물의 미래 시점 t에서의 이론 가격, 그 평균 및 분산은
만기가 긴(T_2) 일반 선물의 그것들보다 작다.

$$F_{G,t,T_1} = F_{G,t,T_2} \cdot e^{r(T_1-T_2)} < F_{G,t,T_2}$$

$$E\left[F_{G,t,T_1}\right] = E\left[F_{G,t,T_2} \cdot e^{r(T_1-T_2)}\right] = E\left[F_{G,t,T_2}\right] \cdot e^{r(T_1-T_2)} < E\left[F_{G,t,T_2}\right]$$

$$Var\left[F_{G,t,T_1}\right] = Var[F_{G,t,T_2} \cdot e^{r(T_1-T_2)}] = Var[F_{G,t,T_2}] \cdot \left(e^{r(T_1-T_2)}\right)^2 < Var\left[F_{G,t,T_2}\right]$$

4.3 평균가격선물의 미래 가격의 적률

4.3.1 $0<t<T_1$ 의 경우

이제 평균가격선물이 거래된다고 가정하고 이 새로운 상품이 투자자의 효용에 어떠한 변화를 가져오는지를 고찰해 보자. 편의상 n = 2인 경우 즉 시점 T_1과 T_2의 주가의 평균가격선물을 가정하며, 우선 미래 시점 t가 $0<t<T_1$ 인 경우를 살펴보기로 하자. F_{AP,t,T_1,T_2} 는 이 선물의 미래 시점 t에서의 (이론)가격을 의미하며, $t<T_1<T_2$ 인 경우이다. 참고로 $T_1<t<T_2$인 경우의 시점 t에서의 이론가격은 F_{AP,T_1,t,T_2} 로 표기한다. 먼저 $F_{AP,t,T_1,T_2} = \frac{1}{2}\left(S_t \cdot e^{r(T_1-t)} + S_t \cdot e^{r(T_2-t)}\right)$이다. 그리고 그 기대값은

$$E\left[F_{AP,t,T_1,T_2}\right] = E\left[\frac{1}{2}\left(S_t \cdot e^{r(T_1-t)} + S_t \cdot e^{r(T_2-t)}\right)\right] = E\left[\frac{1}{2}\left(F_{G,t,T_1} + F_{G,t,T_2}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{2} \cdot E\left[F_{G,t,T_2} \cdot e^{r(T_1-T_2)} + F_{G,t,T_2}\right] = \frac{1}{2} \cdot E\left[F_{G,t,T_2} \cdot \left(1+e^{r(T_1-T_2)}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \left(1+e^{r(T_1-T_2)}\right) E\left[F_{G,t,T_2}\right].$$

이는 동일한 최종 만기(T_2)를 가지는 일반 선물의 기대값 $E\left[F_{G,t,T_2}\right]$보다는 작다. 즉

$$E\left[F_{AP,t,T_1,T_2}\right] = \frac{1}{2} \cdot \left(1+e^{r(T_1-T_2)}\right) E\left[F_{G,t,T_2}\right] < \frac{1}{2} \cdot (1+1) E\left[F_{G,t,T_2}\right] = E\left[F_{G,t,T_2}\right] .$$

또한 이 선물의 t 시점 가격의 분산은 다음과 같이 산출된다.

$$
\begin{aligned}
&Var\left[F_{AP,t,T_1,T_2}\right] \\
&= Var\left[\frac{1}{2}\left(S_t \cdot e^{r(T_1-t)} + S_t \cdot e^{r(T_2-t)}\right)\right] = Var\left[\frac{1}{2}\left(F_{G,t,T_1} + F_{G,t,T_2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{4}Var\left[F_{G,t,T_1} + F_{G,t,T_2}\right] = \frac{1}{4}Var\left[F_{G,t,T_2} \cdot \left(e^{r(T_1-T_2)} + 1\right)\right] \\
&= \frac{1}{4}Var\left[F_{G,t,T_2}\right] \cdot \left(e^{r(T_1-T_2)} + 1\right)^2
\end{aligned}
$$

이는 동일한 최종 만기(T_2)를 가지는 일반 선물의 분산 $Var\left[F_{G,t,T_2}\right]$보다는 작다. 즉

$$
Var\left[F_{AP,t,T_1,T_2}\right] = \frac{1}{4}Var\left[F_{G,t,T_2}\right] \cdot \left(e^{r(T_1-T_2)} + 1\right)^2 < \frac{1}{4}Var\left[F_{G,t,T_2}\right] \cdot (1+1)^2 = Var\left[F_{G,t,T_2}\right].
$$

그러므로, 평균가격선물의 시점 t에서의 가격을 F_{AP,t,T_1,T_2} 라 표기하면, Lemma 7이 도출된다.

> **Lemma 7 평균가격선물의 미래 가격의 1, 2차 적률: $t < T_1 < T_2$**
>
> $$E\left[F_{AP,t,T_1,T_2}\right] = E\left[F_{G,t,T_2}\right] \cdot \frac{1}{2}\left(1 + e^{r(T_1-T_2)}\right) < E\left[F_{G,t,T_2}\right]$$
>
> $$Var\left[F_{AP,t,T_1,T_2}\right] = \frac{1}{4}Var\left[F_{G,t,T_2}\right] \cdot \left(e^{r(T_1-T_2)} + 1\right)^2 < Var\left[F_{G,t,T_2}\right]$$

4.3.2 $T_1 \le t < T_2$ 의 경우

Lemma 3 등에서 알 수 있듯이, $t < T_1 < T_2$ 인 경우, $T_1 \le t < T_2$ 인 경우, 또는 $t = T_2$ 인 경우의 평균가격선물의 이론 가격의 형태가 다르다. 이제 $T_1 \le t < T_2$ 인 경우의 이론가격을 F_{AP,T_1,t,T_2} 로 표기한다. 먼저 $F_{AP,T_1,t,T_2} = \frac{1}{2} \cdot \left[S_{T_1} + S_t \cdot e^{r(T_2-t)}\right]$ 이다. 그러면 이 선물의 t 시점 가격의 기대값은 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
E\left[F_{AP,T_1,t,T_2}\right] &= E\left[\frac{1}{2}\left(S_{T_1} + S_t \cdot e^{r(T_2-t)}\right)\right] = \frac{1}{2} \cdot E\left[S_{T_1}\right] + \frac{1}{2} \cdot E\left[S_t \cdot e^{r(T_2-t)}\right] \\
&= \frac{1}{2} \cdot S_0 \cdot e^{\mu \cdot T_1} + \frac{1}{2} \cdot S_0 \cdot e^{\mu \cdot t + r(T_2-t)} = S_0 \cdot e^{\mu \cdot t + r(T_2-t)}\left[\frac{1}{2}\left(e^{\mu \cdot (T_1-t) - r(T_2-t)} + 1\right)\right].
\end{aligned}
$$

이는 최종 만기가 T_2 인 일반 선물의 평균($E\left[F_{G,t,T_2}\right]$)보다는 작다. 왜냐하면

$T_1 \le t < T_2$, r>0 이므로 $e^{\mu\cdot(T_1-t)-r(T_2-t)} < 1$ 즉 $\left[\frac{1}{2}\left(e^{\mu\cdot(T_1-t)-r(T_2-t)}+1\right)\right] < 1$ 이고

$$E\left[F_{AP,T_1,t,T_2}\right] = S_0 \cdot e^{\mu\cdot t+r(T_2-t)}\left[\frac{1}{2}\left(e^{\mu\cdot(T_1-t)-r(T_2-t)}+1\right)\right] < S_0 \cdot e^{\mu\cdot t+r(T_2-t)} = E\left[F_{G,t,T_2}\right]$$

이기 때문이다. 또한 이 선물의 시점 t 가격의 분산도 최종 만기가 T_2 인 일반 선물의 분산인 $Var\left[F_{G,t,T_2}\right]$ 보다 작다. 즉 $Var\left[F_{AP,T_1,t,T_2}\right] < Var\left[F_{G,t,T_2}\right]$ 이며 이에 대한 증명은 다소 복잡하므로 <부록>에 싣는다.

> Lemma 8 평균가격선물의 미래 가격의 1, 2차 적률: $T_1 \le t < T_2$
>
> $$E\left[F_{AP,T_1,t,T_2}\right] = S_0 \cdot e^{\mu\cdot t+r(T_2-t)}\left[\frac{1}{2}\left(e^{\mu\cdot(T_1-t)-r(T_2-t)}+1\right)\right] < E\left[F_{G,t,T_2}\right]$$
>
> $$Var\left[F_{AP,T_1,t,T_2}\right] = \frac{1}{4}Var\left[S_{T_1}\right] + \frac{1}{4}Var\left[F_{G,t,T_2}\right] + \frac{1}{2}e^{r(T_2-t)}\cdot Cov\left[S_{T_1}, S_t\right] < Var\left[F_{G,t,T_2}\right]$$

Proof 2: Lemma 8 증명 (부록 참조)

4.3.3 $t = T_2$ 의 경우

이 경우의 평균가격선물의 시점 t에서의 이론가격을 $F_{AP,T_1,t=T_2}$ 로 표기하자. 이 확률변수의 기대값은 t = T_2를 Lemma 8의 $E\left[F_{AP,T_1,t,T_2}\right]$에 적용하여 얻을 수 있다.

$$E\left[F_{AP,T_1,t=T_2}\right] = S_0 \cdot e^{\mu\cdot T_2+r(T_2-T_2)}\left[\frac{1}{2}\left(e^{\mu\cdot(T_1-T_2)-r(T_2-T_2)}+1\right)\right] = S_0 \cdot e^{\mu\cdot T_2}\left[\frac{1}{2}\left(e^{\mu\cdot(T_1-T_2)}+1\right)\right].$$

여기서 $T_1 < T_2$ = t이므로 $\left[\frac{1}{2}\left(e^{\mu\cdot(T_1-T_2)}+1\right)\right] < 1$ 이고 $E\left[F_{AP,T_1,t=T_2}\right] = S_0 \cdot e^{\mu\cdot T_2}\left[\frac{1}{2}\left(e^{\mu\cdot(T_1-T_2)}+1\right)\right] < S_0 \cdot e^{\mu\cdot T_2}$ 이다.

한편 만기가 T_2인 일반 선물의 시점 t에서의 기대값은 Lemma 6에 의해 $E\left[F_{G,t,T_2}\right] = S_0 \cdot e^{\mu\cdot t+r(T_2-t)}$ 이며 특히 t = T_2이면 $E\left[F_{G,t,T_2} \mid t = T_2\right] = S_0 \cdot e^{\mu\cdot T_2+r(T_2-T_2)} = S_0 \cdot e^{\mu\cdot T_2}$ 이다.

그러므로 $E\left[F_{AP,T_1,t=T_2}\right] = S_0 \cdot e^{\mu\cdot T_2}\left[\frac{1}{2}\left(e^{\mu\cdot(T_1-T_2)}+1\right)\right] < S_0 \cdot e^{\mu\cdot T_2} = E\left[F_{G,t,T_2} \mid t = T_2\right]$이다. 또한 이 선물의 시점 t 가격의 분산도 최종 만기가 T_2 인 일반 선물의 시점 t = T_2에서의 분산인 $Var\left[F_{G,t,T_2} \mid t = T_2\right]$보다 작다. 이에 대한 증명은 <부록>에 싣는다.

Lemma 9 평균가격선물의 미래 가격의 1, 2차 적률: $t = T_2$

$$E\left[F_{AP,T_1,t=T_2}\right] = S_0 \cdot e^{\mu \cdot T_2}\left[\frac{1}{2}\left(e^{\mu\cdot(T_1-T_2)}+1\right)\right] < S_0 \cdot e^{\mu\cdot T_2} = E\left[F_{G,t,T_2} \mid t = T_2\right]$$

$$Var\left[F_{AP,t=T_2}\right] = \left(S_0\right)^2 e^{2\mu T_2}\left[\frac{1}{4}e^{2\mu(T_1-T_2)}\left(e^{\sigma^2 T_1}-1\right)+\frac{1}{4}\left(e^{\sigma^2 T_2}-1\right)+\frac{1}{2}e^{\mu(T_1-T_2)}\left(e^{\sigma^2 T_1}-1\right)\right] < Var\left[F_{G,t,T_2} \mid t = T_2\right]$$

Proof 3: Lemma 9 증명 (부록 참조)

5. 주가 조작 및 차익거래

5.1 주가 교란 예방

평균가격선물의 대표적인 또 하나의 특징은, 선물 만기일의 결제 가격이 여러 거래일(reference dates)의 기초자산 종가(closing prices)를 포함하기 때문에 특정 세력들의 의도적인 주가 교란 시도를 무력화할 수 있다는 것이다. 코스피200지수선물의 경우 그 만기일의 코스피200지수의 종가가 최종결제가격이므로, 이 만기일의 종가만을 변경시키면 선물의 결제가격이 변경된다. 그러므로 심리적으로나 기술적으로나 이 결제가격의 변경을 시도할 유인이 존재한다. 그런데 만일 코스피200지수선물의 만기일 최종결제가격이 마지막 세 주(three weeks)의 3개의 목요일 종가들의 평균이라 한다면, 만기일의 결제가격을 변경시키기 위하여 세 번의 주가 교란 혹은 조작을 실행하여야 한다. 이는 주가 조작을 시도하려는 투자 세력들에게 첫째로 심리적으로 부담감과 무력감을 주어 시도 자체를 포기하는 효과를 거둘 수 있다. 둘째로 실제로 주가 조작을 시도하려면 3일 동안 세 번이나 종가를 변경시켜야 하므로 그 만큼 더 힘들고 더 많은 자금이 필요하다.[11] 결국 심리적으로나 기술적으로나 주가 조작 혹은 교란의 유인을 현저히 떨어뜨려 이러한 시도 자체가 이루어지지 않을 가능성이 높다. 그 결과 의도적인 주가 교란 시도가 현저히 줄어들거나 아예 불가능하게 되면, 이러한 주가 교란 때문에 선물이나 옵션 거래 자체를 꺼렸던 많은 잠재적인 투자자들이 새로이 파생상품 투자에 참여할 수 있다.

현재의 코스피200지수선물 시장에 참여하는 대부분의 개인 투자자들은 차익거래자나 헤저가 아니라 투기적 투자자들(speculators)이다. 사실 정상적인 수준의 speculators는 어떤 면에서도 부정적인 의미가 아니다. 예로서 가치투자의 대가인 Warren Buffet은 대표적인 speculator인 것이다. 재무금융 영역에서 “speculators”란 단지 자신의 정보와 전망에 기초하여 거래하는 투자자를 의미하는, 지극히 중립적인 용어이다. 그런데 선물이나 옵션 결제일에 혹은 결제일 즈음에 최종 결제가격을 변경시키려는 시도가 거의 항상 있었음은 <표 3>의 자료를 통해서도 추정할 수 있고 2010년의 옵션쇼크를 비롯한 투자자들의 실제 체험을 통해서도 알 수 있다. 이러한 위험에도 불구하고 이 코스피200지수 선물·옵션 시장에

[11] 만일 두 개의 종가를 방치하고 나머지 세 번째 종가만을 변경시키려 한다면, 이 세 번째 종가를 약 3배 가량 더 많이 변경시켜야 이 세 종가의 평균을 자신이 원하는 수준만큼 변경시킬 수 있을 것이다.

참여하는 개인 투자자들은 어떤 면에서 매우 용감한 투자자들이긴 하나 또 다른 면에서는 위의 정상적인 speculators라기 보다, 다소 비정상적으로 투기성이 높은 투자자들(super speculative individuals, SSI)이기도 하다. 그렇다면 가격 조작 세력을 포함해서 현재 코스피200지수 파생상품 시장에 참여하는 투자자들의 유형은 ① 차익거래자 ② 헤저 ③ 조작 세력 및 ④ SSI 들인 것이다. ①, ②를 제외하고 ③, ④는 사실 선물 시장의 건전성이나 발전에 디딤돌이 되기 보다는 걸림돌이 될 수 있는 투자자들인 것이다. 이론적으로나 실제적으로나 가장 바람직한 선물 시장의 투자자 구성은 ①, ②에 더불어 ⑤ 정상적 투기자(normal speculators)일 것이다. 투기자들은 헤저나 차익거래자의 거래 상대방으로서 선물 시장의 유동성 제고를 위해 필요한 존재이지만 현재 코스피200지수선물 시장에서처럼 ⑤가 많지 않고 오히려 이들이 ③과 ④로 대체된 상황은 바람직하지 못하다. 예로서, 최근 당국에서는 증권업계의 반대에도 불구하고 파생상품거래세를 도입하려 하고 있는데, 2012년 5월 17일 자본시장연구원 대회의실에서 한국증권학회 주최로 "파생상품거래세와 자본이득세 도입방안과 과제"의 주제로 개최된 워크샵에서[12] 발제자의 주장 중에서는 "정부가 파생상품 거래세를 도입하려는 한 이유는 선물·옵션 시장에서 지나치게 투기적인 개인 투기자들을 퇴출시키려는 것"이라는 내용이 있었다. 지나치게 투기적인 개인투자자들이 선물·옵션 시장에 많이 참여하는 것이 파생상품 시장의 건전한 발전에 바람직하지 않기 때문에 파생상품 거래에 세금을 매겨 이들의 투자 유인을 감소시키려 한다는 것이다. 이러한 논리가 과연 타당한 것인지를 떠나, 이는 지나치게 투기적인 게임의 장이 된 현재의 선물·옵션 시장을 바라보는 외부의 시각의 한 단면을 말해주고 있다. 이런 맥락에서 보면, 평균가격선물의 도입은 주가 교란 가능성 등으로 인해 지나치게 투기적인 개인투자자들만이 참여하게 되는 현재의 준최적(sub-optimal)의 상황을 타개하고 보다 많은 "normal speculators"가 참여하게 되는 계기가 될 수 있다

5.2 선물 가격의 순기능의 부활

평균가격선물의 세 번째 특징은 차익거래의 폐해로부터 안전하다는 것이다. "차익거래의 폐해"라는 표현이 생소함에도 불구하고, 사실 차익거래는 의도하지 못했던 문제를 기초자산 투자자들이나 파생상품 투자자들에게 야기할 수 있다. 먼저 파생상품 투자자들에게 야기하는 문제점을 쉽게 설명하기 위하여 선물 투자자의 예를 들어보자. 본래 선물 가격의 기능 중 하나는 그것이 미래의 현물 가격에 대한 하나의 지표로서 역할을 한다는 것이다. 예로서 9월말 현재의 삼성전자의 주가는 약간 낮더라도 12월 중순(둘째 목요일) 즈음의 그것은 이보다 유의하게 높을 것으로 전망될 수 있다. 성탄절 특수 등을 기대해서 그럴 수도 있고, 새로운 스마트폰(smart phone)이 11월 중순 발매될 예정이라는 삼성전자의 공시 등이 있는 경우에도 그럴 수 있을 것이다. 사실 어떤 이유에서든 현재 주가와 3개월 후의 주가가 항상 유사해야 할 근거는 없다. 또한 주식 투자가 위험하다는 것의 근거가 미래 주가의 불확실성 때문이므로, 3개월 후의 주가가 현재 주가와 언제나 유사하다면 이는 "미래의 불확실성"을 부인하는 셈이기도 하다. 그런데 현·선물 시장에서 차익거래가 존재한다면, 삼성전자의 선물 가격은 3개월 후의 주가에 대한 전망이 전혀 반영되지 못하여 미래 주가의

[12] "증권사랑방"이라는 워크샵을 의미한다.

지표(indicator)라는 선물 가격의 중요한 기능을 상실하게 된다. 그 결과 아이러니컬하게도 삼성전자의 선물 가격은 항상 현물 가격과 “유사”해 지게 된다. 이를 간단히 살펴보자.

만일 오늘 9월 14일 즉 9월의 둘째 금요일 현재 삼성전자의 종가가 120만원이었다고 하자. 이 주식의 12월 선물의 만기일은 12월 13일로서 오늘로부터 “calendar day”로는 90일 후가 되며 “trading day”로는 64일 후가 된다. 이 90일 후의 삼성전자 주가는 여러 측면에서 오늘의 주가와 다를 개연성이 높다. 그런데 선물 시장에서 차익거래가 활발한 경우에는, 이 주식의 12월 선물의 시장 가격은 “no arbitrage”에 의해 그 이론가격과 유사하게 결정된다. 차익거래에서 무위험 이자율의 대용으로 사용되는 CD금리의 최근 수준이 약 3% 정도라 한다면, 삼성전자의 12월 선물의 (이론 및) 시장 가격은 ₩1,200,000×{1+0.03×64/260} = ₩1,208,861으로 121만원도 채 안된다.[13] 즉 오늘로부터 90일 후 시점이 선물 만기일임에도 불구하고 오늘 주가는 120만원이고 선물 가격은 120.9만원으로 거의 동일한 수준인 것이다. (이 주식의 배당 가능성까지 고려하면 선물의 이론가격은 이보다도 더 낮은 수준이 된다.) 이 두 가격간의 유일한 차이는 이 3개월간의 (낮은) 무위험이자율 요소로부터 발생한 것으로, 이 수치는 미래 주가 수준과는 별 관련이 없다. 또 선물가격의 이러한 특성은 코스피200지수 선물에도 동일하게 적용된다. 즉 위 예와 동일한 원리에 의해 코스피200지수선물의 시장 가격은 거의 항상 현재의 코스피200지수(현물) 값과 유사할 수 밖에 없다. 그러므로 삼성전자의 경우나 코스피200지수의 경우를 막론하고, 선물 가격이 미래 현물 가격에 대한 전망과는 거의 관계없는 값으로만 귀결되어, 선물 시장의 고유한 순기능 중 하나가 상실되는 것이다.

역설적으로, 만일 차익거래가 활발하지 않다면 선물 가격은 미래 현물 가격에 대한 투자자들의 치열한 예상과 전망이 반영되어 그 순기능을 제대로 발휘할 가능성이 높다. 게다가 현재와 같이 차익거래로 선물 가격이 결정되면 선물 시장에 고유한 현상도 종적을 감추게 된다. 예로서 “normal backwardation”과 “contango”는 선물 가격과 미래 예상 현물가격(expected future spot price)의 양자를 대비하여 그 하나가 더 클 때를 지칭하는 것이다(Kolb and Overdahl (2007)의 100 ~ 104쪽 참조).[14] 하지만 현재처럼 선물 가격이 기계적인 차익거래에 의해서 결정된다면, 미래 예상 현물가격은 선물 가격에 거의 반영되지 못하므로 이러한 선물 시장 고유의 특성도 아무 의미가 없게 된다.

뿐만 아니라 주식투자자들도 현·선물 차익거래의 피해를 입을 수 있다. 바람직한 주식 시장 혹은 효율적(efficient) 주식 시장의 특징 중 하나는 주식 가치에 대한 다양한 정보가 주가에 반영되어야 한다는 것이다. 그런데 현·선물 차익거래가 활발하다 보면 선물 가격으로 인해 주식 가격이 급등락하는 이른바 “Wag the dog” 현상이 발생할 수 있다. 주식의 본질적 가치에 대해 새로운 정보가 반영되어 주가가 변하는 것이 아니라, 선물 가격이 크게 움직일 때 이에 맞추어 현·선물 차익거래가 발생하면서 주가가 등락을 거듭하는 것이다. 게다가 이처럼 선물 가격이 먼저 급등락하는 경우에는, 사후적으로 파악해 보면 현물 주식시장의 포지션으로부터 이익을 얻으려는 투기적 세력들이 선물 가격에 선제적으로 개입하는 경우가 적지 않다. 그런데 만일 차익거래가 활발하지 않다면 선물 가격이 변한다 하더라도 이 때문에

[13] 1년의 거래일 수는 약 260일 정도 된다.

[14] 현재 시장에서는 단순히 선물가격과 현물가격을 대비하여 “contango,” “backwardation”의 용어를 활용하는데 이는 엄밀성이 다소 결여된 관습으로 보인다. “contango,” “normal backwardation”의 표현은 원래 농산물 선물 시장 등에서의 시간의 경과에 따른 선물 가격 경로의 특성을 나타내는 용어이다.

자동적으로 현물 가격이 변하지는 않는다. 결론적으로 "Wag the dog" 현상을 포함하여 비본질적인 이유로 주가가 변동하게 되면 주식 시장의 선의의 일반 투자자들은 큰 피해를 입을 수 있다. 특히 자금력이 약한 개인투자자들은 일정한 규모의 손실을 시현하게 되면 주식을 처분할 수 밖에 없다. 결국 현·선물 차익거래는 현·선물 시장의 투자자 중 오로지 차익거래자만을 위한 것이고 다른 모든 투자 일반 대중에게는 예상치 못한, 부당한(unfair) 피해를 입힐 수 있으며, 2010년 11월의 옵션 쇼크는 그 대표적인 사례라고 할 수 있다.

5.3 Case Study: Black-Scholes 옵션 이론가

여기서는 부가적인 설명을 위해 Black-Scholes 옵션 이론가격을 생각해 보기로 한다. 주지하다시피 이 이론가격은 주식과 그 주식을 기초자산으로 하는 옵션으로 구성된 포트폴리오와 무위험 자산간의 "no arbitrage" 관계를 이용하여 끊임없이 매초마다 (시간 dt가 지날 때마다) 차익거래를 수행함을 전제로 하여 도출된 옵션 이론가격이다. 즉 Black-Scholes 이론가격은 이러한 차익거래의 실행을 전제로 도출되는 가격이다. 그런데 현실적으로 이 이론가격을 활용하여 차익거래를 수행할 수는 없다. 즉 특정 옵션의 시장 가격이 Black-Scholes 옵션 이론 가격과 상이하다 하더라도 실제로 차익거래가 발생하지는 못한다. 왜냐하면 Black-Scholes 모형에서 차익거래를 위하여 전제한 비현실적 가정들이 존재하기 때문이다. 그 하나의 예를 든다면, Black-Scholes 이론가격을 도출하기 위하여는 오늘부터 만기일까지의 미래 주가의 변동성인 "σ"를 정확한 값으로 입력해야 하는데, 미래는 불확실하므로 이 수치를 확실히 알 수는 없고 단지 과거 주가의 변동성 값이나 time-series econometrics를 활용하여 이를 가공한 변동성 수치를 그 대용치(proxy)로 사용할 뿐이다. 그러므로 Black-Scholes 이론가격을 활용한 차익거래는 원천적으로 불가능하다. 그럼에도 불구하고 다양한 옵션 거래에서 Black-Scholes 이론가격은 하나의 "reference value"로 중요하게 활용되고 있다. 예로서 우리나라의 경우처럼 주식 거래에 상한가-하한가가 존재하여 즉 1일 수익률 제한이 존재하여 주가의 1일 (연속복리)수익률이 정규분포를 확연히 이탈하고 있음에도 불구하고 여전히 Black-Scholes 이론 가격이 코스피200지수 옵션 가치평가에 참조로 활용되고 있는 것이다.[15]

그런데 이러한 사실에서 Black-Scholes 이론가격의 감추어진 순기능을 발견할 수 있는데 이는 다음과 같다. 현실적으로 옵션의 시장가격은 특정 σ 추정치를 사용한 Black-Scholes 이론가격과는 다를 수 있다. 뿐만 아니라 각 옵션의 시장가격으로부터 역산된 이른바 "내재변동성(implied volatility)" 값들도 서로 다를 수 있다. 그런데 이처럼 잔존만기에 따라 서로 다른 내재변동성 수치가 나타난다는 것은 곧 옵션 투자자들의 미래에 대한 전망과 추정이 시장의 옵션 가격에 고스란히 반영되고 있음을 의미하는 것이다. 예로서 잔존만기가 1개월, 3개월로 서로 다르지만 다른 모든 면에서는 모두 동일한 두 옵션들의 내재변동성 수치가 다르게 나타나면 이는 곧 향후 1개월간 및 3개월간의 기초자산의 변동성을 투자자들이 상이하게 전망하고 있음을 시사하는 것이다. 그리고 사실 일반적으로도 향후 1개월간의 주가의 변동성과 향후 3개월간의 그것은 서로 다를 수 있다. 그러므로 차익거래를 수행할 수

[15] 코스피200지수옵션은 상한가, 하한가의 제한이 적용되는 주식 200개의 바스켓이므로 이 지수의 (연속복리)수익률 또한 정규분포와 다를 수 밖에 없다. 구체적으로, 이 경우의 수익률은 이른바 검열분포(censored distribution)를 따르는데 자세한 사항은 유진(2000, 2001A, 2001B)을 참조할 수 있다.

없는, 무늬만 "no arbitrage price"인 Black-Scholes 이론가격은 ① 여전히 시장의 투자자들에게 하나의 중요한 지표로 활용되면서 ② 동시에 내재변동성 값의 산출을 통하여 투자자들의 전망과 견해가 옵션 가격으로부터 발견될(revealed) 수 있게 하는 순기능을 수행하고 있는 것이다.

이와 마찬가지로, 만일 평균가격선물이 거래된다면, 본 연구에서 산출된 "no arbitrage"에 의한 Lemma 3 ~ Lemma 5의 이론가격들이 선물의 시장가격에 하나의 지표로 활용될 수 있다. 그런데 (Lemma 3의) 이론가격들은 일반 선물의 이론가격처럼 현 주가(S_t)와 무위험이자율(r) 및 시점(t, T_1, T_2)의 함수일 뿐 기초자산의 미래 수익률에 대한 투자자들의 전망이 반영되어 있지 않다. 또 ½주(share)나 ⅓주 등도 거래할 수 있다고 가정하는 평균가격선물 차익거래가 (Black-Scholes 이론가격처럼) 현실적으로는 불가능하므로 실제의 선물 가격은 이와 다를 수 있다. 그런데 바로 이 때문에 선물의 시장가격으로부터 기초자산의 수익률 전망치를 추출할 수 있어, 이는 미래 주가 혹은 주가지수의 하나의 지표(indicator)로서 기능할 수 있다. 예로서 현 시점 $t<T_1$인 경우 n = 2인 평균가격선물의 이론가는 Lemma 3의 의해 $\frac{1}{2}\cdot\left[S_t\cdot e^{r(T_1-t)}+S_t\cdot e^{r(T_2-t)}\right]$이다. 만일 현 시점 t에서 선물의 시장가격 $F_{AP,t}$가 이 이론가격과 다르다면 다음과 같은 작업을 통하여 이 주식의 미래 수익률 전망치를 추출할 수 있다. 즉 $F_{AP,t}=\frac{1}{2}\cdot\left[S_t\cdot e^{\mu\cdot(T_1-t)}+S_t\cdot e^{\mu\cdot(T_2-t)}\right]$ 로 등치시켜 이 방정식의 유일한 미지수인 μ를 추출할 수 있는 것이다. 이는 마치 실제 옵션가격을 Black-Scholes 모형가격과 일치시켜 내재변동성 수치를 추출하는 것과 동일한 원리이다. 이렇게 추출된 기초자산의 미래 수익률 전망치 μ는 이 기초자산의 미래 현물가격의 한 지표로 활용될 수 있으므로, 이러한 선물 가격은 그 본연의 기능을 다 할 수 있다.

6. 결론

2010년 11월11일의 옵션 쇼크의 예에서 알 수 있듯이, 1997년의 아시아외환위기 이후 우리나라의 증권 시장은 상대적으로 강력한 영향력을 행사하는 외국인 투자자들로 인하여 유가증권 및 파생상품 가격이 교란되는 경우가 적지 않았다. 본 연구에서 실제 1일 수익률 자료를 분석한 결과에서도 선물·옵션의 만기일 혹은 만기일을 포함하는 주(week)에는 변동성이 유의하게 높아짐을 1% 유의수준에서 확인할 수 있었다. 이로 인해 현재 대표적인 파생상품인 코스피200지수 선물 및 옵션 시장에는 국내외 기관투자가를 제외하고는 매우 투기성 강한 개인투자자들만이 참여하는, 준최적(sub-optimal)의 답보 상태를 벗어나지 못하고 있다. 또한 주가연계증권(ELS)이나 주식워런트증권(ELW) 등의 신종 파생상품들도 가치평가나 가격 왜곡의 문제점으로 인해 일반 투자자들의 파생상품 투자 대안으로서 추천하기 어려운 상황이다.

본 연구에서는 이와 관련하여, 현재의 코스피200 지수선물이나 지수옵션의 대안으로서, 효시적으로 연구한 아시안선물(Asian Futures)과 이미 금융선진국에서는 거래되고 있는 아시안옵션(Asian Options)의 도입을 제시한다. 기존의 코스피200 지수선물 및 지수옵션 상품을 거부하며 배타적으로 이 새 상품들을 도입하는 것이 아니라, 기존의 파생상품에 더해 이 새 상품들을 거래함으로써 일반 투자자들의 선택의 폭을 확대할 수 있기 때문이다. 본 연구에서 이

새 상품들의 도입을 주장하는 이유는 다음과 같다. 첫째로 이 상품들은 그 가격교란이 매우 어렵거나 거의 불가능하므로 선의의 투자자들을 보호할 수 있다. 둘째로 이 상품들은 일반 선물이나 옵션에 비해 그 변동성이 유의하게 감소되며 상품 설계에 따라 변동성의 감소 정도를 조절할 수 있다. 보다 많은 투자자들이 투자할 수 있는, 적절한 변동성의 상품이 만들어지면 전체로서의 파생상품 투자자 풀(pool)이 확대되는 효과가 있다. 셋째로, 현·선물 지수차익거래로 인한 현·선물 시장의 문제점을 해소할 수 있다.

본 연구에서는 먼저 파생상품 거래로 인하여 그 기초자산인 주가의 변동성이 어떤 영향을 받고 있는지를 1998년 1월초부터 2012년 8월말까지 14년 8개월의 자료로 2장에서 심층 분석하였다. 3장에서는 아시안선물 즉 평균가격선물의 개념을 설명하고 그 가치평가를 수리적으로 입증하였다. 4장과 5장에서는 기존 파생상품과 그 대안으로서의 새 파생상품의 차이를 설명하였으며 4장에서는 계량적으로 또 5장에서는 직관적으로 접근하였다.

이 하나의 논문으로 새 파생상품 도입에 필요한 모든 내용이 완벽하게 준비되는 것은 아니다. 다만 본 연구에서는 새로운 아이디어를 제시하고 그것의 현실적 타당성과 시장에의 함의(implications)를 정량적(quantitative) 및 정성적(qualitative) 접근방법을 모두 사용하여 균형적으로 제시하고자 하였다. 본 연구에서 제시된 새 상품들의 보다 심층적이고 본격적인 연구는 향후 단계적으로 또 지속적으로 나올 수 있으리라 생각하며, 투자자와 시장 그리고 금융 당국 모두의 효용을 높이는 새 파생상품들이 탄생하기를 바라며 본 연구를 맺는다.

<참고문헌>

유진, 1999, “ ‘아시안옵션’ 도입하자,” 한국경제신문 1999년 1월25일 30면,

유진, 2000, “수익률제한과 옵션의 가치평가,” 증권학회지, 27권 1호, 403-438

유진, 2001A, “1일 주가수익률제한과 진실한 변동성의 추정” 증권학회지, 28권 1호, 403-438

유진, 2001B, “KOSDAQ50 기업들의 변동성 추정과 개별옵션가치평가에 대한 함의,” 선물연구, 9권 2호, 1-21,

http://www.hankyung.com/news/app/newsview.php?aid=1999012500271&intype=1

Black, F., and M. Scholes, 1973, “The pricing of options and corporate liabilities,” *Journal of Political Economy*, 81, 637-659

Kolb, R., and J. Overdahl, 2007, *Futures, options and swaps*, Wiley-Blackwell, 5th ed.

Hull, J., 2009, *Options, futures, and other derivatives*, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey

Kemna, A., and A. Vorst (1990), “A Pricing model for options based on average asset values,” *Journal of Banking and Finance*, 14, 113-129

Back, K., 2010, *A course in derivative securities*, Springer, The Netherlands

Sharpe, W., 1964, “Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risks, *Journal of Finance*, 19, 425-442

<부록>

1. Proof 2: Lemma 8 증명 ($T_1 \le t < T_2$)

$E\left[F_{AP,T_1,t,T_2}\right]$ 에 대한 증명은 본문에 나와 있으므로 $Var\left[F_{AP,T_1,t,T_2}\right]$ 에 대해서만 증명한다.

$Var\left[F_{AP,T_1,t,T_2}\right]$는 일단 다음과 같이 구성된다. 즉

$$Var\left[F_{AP,T_1,t,T_2}\right] = Var\left[\frac{1}{2}\left(S_{T_1} + S_t \cdot e^{r(T_2-t)}\right)\right] = \frac{1}{4} \cdot Var\left[S_{T_1} + S_t \cdot e^{r(T_2-t)}\right]$$
$$= \frac{1}{4}\left(Var\left[S_{T_1}\right] + Var\left[S_t \cdot e^{r(T_2-t)}\right] + 2 \cdot e^{r(T_2-t)} \cdot Cov\left[S_{T_1}, S_t\right]\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(Var\left[S_{T_1}\right] + Var\left[F_{G,t,T_2}\right] + 2 \cdot e^{r(T_2-t)} \cdot Cov\left[S_{T_1}, S_t\right]\right)$$

$$= \frac{1}{4}Var\left[S_{T_1}\right] + \frac{1}{4}Var\left[F_{G,t,T_2}\right] + \frac{1}{2}e^{r(T_2-t)} \cdot Cov\left[S_{T_1}, S_t\right].$$

여기서 $Cov[S_{T1}, S_t]$는 다음과 같다. 즉

$$Cov\left[S_{T_1}, S_t\right] = E\left[S_{T_1} \cdot S_t\right] - E\left[S_{T_1}\right] \cdot E\left[S_t\right].$$

(식 6)에 의해 $E[S_{T_1}] = S_0 \cdot e^{\mu \cdot T_1}$, $E[S_t] = S_0 \cdot e^{\mu \cdot t}$ 이다. 한편 $E\left[S_{T_1} \cdot S_t\right]$를 산출하기 위해

$\ln\left(S_{T_1} \cdot S_t\right)$를 생각해 보자. 먼저 $\ln(S_{T_1}) = \ln(S_0) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T_1 + \sigma \cdot (B_{T_1} - B_0)$이고

$\ln(S_t) - \ln(S_{T_1}) \sim N((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2) \cdot (t - T_1), \sigma^2 \cdot (t - T_1))$이다.
즉 $\ln(S_t) - \ln(S_{T_1}) = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2) \cdot (t - T_1) + \sigma \cdot (B_t - B_{T_1})$이다.

그러므로
$\ln(S_t) = \ln(S_{T_1}) + [\ln(S_t) - \ln(S_{T_1})]$
$= [\ln(S_0) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T_1 + \sigma(B_{T_1} - B_0)] + [(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2) \cdot (t - T_1) + \sigma \cdot (B_t - B_{T_1})]$ 이다.

이제

$\ln\left(S_{T_1} \cdot S_t\right) = \ln(S_{T_1}) + \ln(S_t)$

$$= \ln(S_0) + (\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)T_1 + \sigma(B_{T_1} - B_0)$$
$$+ [\ln(S_0) + (\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)T_1 + \sigma(B_{T_1} - B_0)] + [(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2) \cdot (t - T_1) + \sigma \cdot (B_t - B_{T_1})]$$
$$= 2 \cdot [\ln(S_0) + (\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)T_1 + \sigma(B_{T_1} - B_0)] + (\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2) \cdot (t - T_1) + \sigma \cdot (B_t - B_{T_1})$$

$= \ln(S_0)^2 + 2(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T_1 + 2\sigma(B_{T1}-B_0) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(t-T_1) + \sigma(B_t - B_{T_1})$
$= \ln(S_0)^2 + (2\mu - \sigma^2)T_1 + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(t-T_1) + 2\sigma(B_{T_1}-B_0) + \sigma(B_t - B_{T_1})$ 이다.

이다. 이는 곧 브라운 운동의 특성에 의해서 다음을 의미한다.

$\ln\left(S_{T_1} \cdot S_t\right) \sim N(\ln(S_0)^2 + (2\mu-\sigma^2)T_1 + (\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)(t-T_1),\ 4\sigma^2 \cdot T_1 + \sigma^2(t-T_1))$.

편의를 위해 $\ln\left(S_{T_1} \cdot S_t\right) \sim N(m, v^2)$라 하자. 그러면 (식 5)에 의해 다음이 성립한다.

$$E\left[S_{T_1} \cdot S_t\right] = e^{m+\frac{v^2}{2}} = e^{\ln(S_0)^2 + (2\mu-\sigma^2)\cdot T_1 + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\cdot(t-T_1) + \frac{4\sigma^2 \cdot T_1 + \sigma^2 \cdot (t-T_1)}{2}}$$

$$= e^{\ln(S_0)^2 + (2\mu-\sigma^2)T_1 + (\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)\cdot(t-T_1) + 2\sigma^2 \cdot T_1 + \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot (t-T_1)}$$
$$= (S_0)^2 \cdot e^{(2\mu+\sigma^2)T_1 + \mu\cdot(t-T_1)}$$
$$= (S_0)^2 \cdot e^{\mu(T_1+t)+\sigma^2 \cdot T_1}.$$

그러므로

$$Cov\left[S_{T_1},\ S_t\right] = E\left[S_{T_1} \cdot S_t\right] - E\left[S_{T_1}\right] \cdot E\left[S_t\right]$$
$$= (S_0)^2 \cdot e^{\mu(T_1+t)+\sigma^2 \cdot T_1} - \left(S_0 \cdot e^{\mu \cdot T_1}\right) \cdot \left(S_0 \cdot e^{\mu \cdot t}\right)$$
$$= (S_0)^2 \cdot e^{\mu(T_1+t)+\sigma^2 \cdot T_1} - \left(S_0\right)^2 \cdot e^{\mu(T_1+t)}$$
$$= \left(S_0\right)^2 \cdot e^{\mu(T_1+t)} \cdot \left(e^{\sigma^2 \cdot T_1} - 1\right).$$

참고로 만일 $T_1 = t$ 라면

$$Cov\left[S_{T_1},\ S_{T_1}\right] = Var\left[S_{T_1}\right] = \left(S_0\right)^2 \cdot e^{\mu(T_1+T_1)} \cdot \left(e^{\sigma^2 \cdot T_1} - 1\right) = \left(S_0\right)^2 \cdot e^{2\mu \cdot T_1}\left(e^{\sigma^2 \cdot T_1} - 1\right)$$

이 되어 (식 6)에서 $T = T_1$인 경우와 일치한다.

이제 이 평균가격선물의 분산은 다음과 같다.

$$Var\left[F_{AP,T_1,t,T_2}\right] = \frac{1}{4}Var\left[S_{T_1}\right] + \frac{1}{4}Var\left[F_{G,t,T_2}\right] + \frac{1}{2}e^{r(T_2-t)} \cdot Cov\left[S_{T_1},\ S_t\right]$$

$$= \frac{1}{4}Var\left[S_{T_1}\right] + \frac{1}{4}Var\left[F_{G,t,T_2}\right] + \frac{1}{2}e^{r(T_2-t)} \cdot \left(S_0\right)^2 \cdot e^{\mu(T_1+t)} \cdot \left(e^{\sigma^2 \cdot T_1} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{4}Var\left[S_{T_1}\right] + \frac{1}{4}Var\left[F_{G,t,T_2}\right] + \frac{1}{2}\left(S_0\right)^2 \cdot e^{\mu(T_1+t)+r(T_2-t)} \cdot \left(e^{\sigma^2 \cdot T_1} - 1\right)$$

$$\stackrel{let}{=} \frac{1}{4}Var\left[S_{T_1}\right] + \frac{1}{4}Var\left[F_{G,t,T_2}\right] + \frac{1}{2} \cdot A.$$

여기서 A는 최종 만기가 T_2 인 일반 선물의 분산 $Var\left[F_{G,t,T_2}\right]$보다 작다. 왜냐하면 $T_1 \le t < T_2$ 이므로 $e^{2\mu\cdot t+2r(T_2-t)} > e^{\mu(T_1+t)+r(T_2-t)}$ 및 $\left(e^{\sigma^2 t}-1\right) > \left(e^{\sigma^2\cdot T_1}-1\right)$이 되어

$Var\left[F_{G,t,T_2}\right] = (S_0)^2\cdot e^{2\mu\cdot t+2r(T_2-t)}\left(e^{\sigma^2 t}-1\right) > (S_0)^2\cdot e^{\mu(T_1+t)+r(T_2-t)}\cdot\left(e^{\sigma^2\cdot T_1}-1\right) = A$이기 때문이다. 또 (식 6)에 의해 $Var\left[S_{T_1}\right] = (S_0)^2\cdot e^{2\mu\cdot T_1}\left(e^{\sigma^2 T_1}-1\right)$인데 이 또한 $Var\left[F_{G,t,T_2}\right]$보다 작다. 왜냐하면 $T_1 \le t$ 이므로 $(S_0)^2\cdot e^{2\mu\cdot T_1}\left(e^{\sigma^2\cdot T_1}-1\right) < (S_0)^2\cdot e^{2\mu\cdot t+2r(T_2-t)}\left(e^{\sigma^2 t}-1\right) = Var\left[F_{G,t,T_2}\right]$이기 때문이다.

결국 다음이 성립하여 이 선물의 시점 t 가격의 분산은 $Var\left[F_{G,t,T_2}\right]$보다 작다. 즉

$$
\begin{aligned}
&Var\left[F_{AP,T_1,t,T_2}\right] \\
&= \frac{1}{4}Var\left[S_{T_1}\right] + \frac{1}{4}Var\left[F_{G,t,T_2}\right] + \frac{1}{2}e^{r(T_2-t)}\cdot Cov\left[S_{T_1}, S_t\right] \\
&< \frac{1}{4}Var\left[F_{G,t,T_2}\right] + \frac{1}{4}Var\left[F_{G,t,T_2}\right] + \frac{1}{2}Var\left[F_{G,t,T_2}\right] \\
&= Var\left[F_{G,t,T_2}\right].
\end{aligned}
$$

Q.E.D. □

2. Proof 3: Lemma 9 증명 ($t = T_2$)

이 경우의 평균가격선물의 시점 t에서의 이론가격을 $F_{AP,T_1,t=T_2}$ 로 표기하자. 먼저 $F_{AP,T_1,t=T_2} = \frac{1}{2}\left(S_{T_1}+S_{T_2}\right)$이다. 이 선물의 t 시점 가격의 분산은 다음과 같이 산출된다.

$$
\begin{aligned}
Var\left[F_{AP,t=T_2}\right] &= Var\left[\frac{1}{2}\left(S_{T_1}+S_{T_2}\right)\right] = \frac{1}{4}\cdot Var\left[S_{T_1}+S_{T_2}\right] \\
&= \frac{1}{4}\left(Var\left[S_{T_1}\right] + Var\left[S_{T_2}\right] + 2\cdot Cov\left[S_{T_1}, S_{T_2}\right]\right) \\
&= \frac{1}{4}Var\left[S_{T_1}\right] + \frac{1}{4}Var\left[S_{T_2}\right] + \frac{1}{2}\cdot Cov\left[S_{T_1}, S_{T_2}\right].
\end{aligned}
$$

여기서 $Cov[S_{T_1}, S_{T_2}]$는 다음과 같다. 즉

$$Cov\left[S_{T_1}, S_{T_2}\right] = E\left[S_{T_1} \cdot S_{T_2}\right] - E\left[S_{T_1}\right] \cdot E\left[S_{T_2}\right]..$$

또 (식 6)에 의해 $E[S_{T_1}] = S_0 \cdot e^{\mu \cdot T_1}$, $E[S_{T_2}] = S_0 \cdot e^{\mu \cdot T_2}$ 이다. 한편 $E\left[S_{T_1} \cdot S_{T_2}\right]$를 산출하기 위해

$\ln\left(S_{T_1} \cdot S_{T_2}\right)$를 생각해 보자. 먼저 $\ln(S_{T_1}) = \ln(S_0) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T_1 + \sigma \cdot (B_{T_1} - B_0)$ 이다.

또 $\ln(S_{T_2}) = \ln(S_{T_1}) + [\ln(S_{T_2}) - \ln(S_{T_1})]$이고
$\ln(S_{T_2}) - \ln(S_{T_1}) = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T_2 - T_1) + \sigma(B_{T_2} - B_{T_1})$이다.

그러므로
$\ln(S_{T_2}) = \ln(S_{T_1}) + [\ln(S_{T_2}) - \ln(S_{T_1})]$
$= [\ln(S_0) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T_1 + \sigma(B_{T_1} - B_0)] + [(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2) \cdot (T_2 - T_1) + \sigma(B_{T_2} - B_{T_1})]$ 이다.

이제

$$\ln\left(S_{T_1} \cdot S_{T_2}\right) = \ln\left(S_{T_1}\right) + \ln\left(S_{T_2}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \ln(S_0) + (\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)T_1 + \sigma \cdot (B_{T_1} - B_0) \\
&\quad + [\ln(S_0) + (\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)T_1 + \sigma(B_{T_1} - B_0)] + [(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2) \cdot (T_2 - T_1) + \sigma(B_{T_2} - B_{T_1})] \\
&= 2 \cdot [\ln(S_0) + (\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)T_1 + \sigma(B_{T_1} - B_0)] + (\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2) \cdot (T_2 - T_1) + \sigma \cdot (B_{T_2} - B_{T_1}) \\
&= \ln(S_0)^2 + 2(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)T_1 + 2\sigma(B_{T_1} - B_0) + (\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2) \cdot (T_2 - T_1) + \sigma \cdot (B_{T_2} - B_{T_1}) \\
&= \ln(S_0)^2 + (2\mu - \sigma^2)T_1 + (\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)(T_2 - T_1) + 2\sigma(B_{T_1} - B_0) + \sigma(B_{T_2} - B_{T_1})
\end{aligned}$$

이다. 이제 브라운 운동의 특성에 의해서

$$\ln\left(S_{T_1} \cdot S_{T_2}\right) \sim N\left(\ln(S_0)^2 + (2\mu - \sigma^2)T_1 + (\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)(T_2 - T_1),\ 4\sigma^2 \cdot T_1 + \sigma^2(T_2 - T_1) \right)$$

이다. 편의를 위해 $\ln\left(S_{T_1} \cdot S_{T_2}\right) \sim N(m, v^2)$ 라 하자. 그러면 (식 5)에 의해 다음이 성립한다.

$$E\left[S_{T_1} \cdot S_{T_2}\right] = e^{m + \frac{v^2}{2}} ,= e^{\ln(S_0)^2 + (2\mu - \sigma^2) \cdot T_1 + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T_2 - T_1) + \frac{4\sigma^2 \cdot T_1 + \sigma^2 (T_2 - T_1)}{2}}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{\ln(S_0)^2 + (2\mu - \sigma^2)T_1 + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T_2 - T_1) + 2\sigma^2 \cdot T_1 + \frac{1}{2}\sigma^2 (T_2 - T_1)} \\
&= (S_0)^2 \cdot e^{(2\mu + \sigma^2)T_1 + \mu \cdot (T_2 - T_1)} \\
&= (S_0)^2 \cdot e^{\mu(T_1 + T_2) + \sigma^2 \cdot T_1}.
\end{aligned}$$

그러므로

$$Cov\left[S_{T_1},\, S_{T_2}\right] = E\left[S_{T_1}\cdot S_{T_2}\right] - E\left[S_{T_1}\right]\cdot E\left[S_{T_2}\right]$$
$$= (S_0)^2\cdot e^{\mu(T_1+T_2)+\sigma^2\cdot T_1} - S_0\cdot e^{\mu\cdot T_1}\cdot S_0\cdot e^{\mu\cdot T_2}$$
$$= (S_0)^2\cdot e^{\mu(T_1+T_2)+\sigma^2\cdot T_1} - \left(S_0\right)^2\cdot e^{\mu\left(T_1+T_2\right)}$$
$$= \left(S_0\right)^2\cdot e^{\mu\left(T_1+T_2\right)}\cdot\left(e^{\sigma^2\cdot T_1}-1\right).$$

그러므로 이 평균가격선물의 분산은 다음과 같이 산출되며, 이 값은 최종 만기가 T_2 인 일반 선물의 시점 t에서의 분산 $Var\left[F_{G,t,T_2} \mid t = T_2\right]$보다 작다. 즉

$$Var\left[F_{AP,T_1,t=T_2}\right] = \frac{1}{4}Var\left[S_{T_1}\right] + \frac{1}{4}Var\left[S_{T_2}\right] + \frac{1}{2}\cdot Cov\left[S_{T_1},\, S_{T_2}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left(S_0\right)^2\cdot e^{2\mu T_1}\left(e^{o^2 T_1}-1\right) + \frac{1}{4}\left(S_0\right)^2\cdot e^{2\mu T_2}\left(e^{o^2 T_2}-1\right) + \frac{1}{2}\left(S_0\right)^2\cdot e^{\mu\left(T_1+T_2\right)}\cdot\left(e^{\sigma^2\cdot T_1}-1\right)$$

$$=\left(S_0\right)^2\cdot e^{2\mu T_2}\left[\frac{1}{4}e^{2\mu\cdot\left(T_1-T_2\right)}\cdot\left(e^{o^2 T_1}-1\right) + \frac{1}{4}\left(e^{o^2 T_2}-1\right) + \frac{1}{2}e^{\mu\left(T_1-T_2\right)}\cdot\left(e^{\sigma^2\cdot T_1}-1\right)\right]$$

$$<\left(S_0\right)^2\cdot e^{2\mu T_2}\left[\frac{1}{4}\left(e^{o^2 T_1}-1\right) + \frac{1}{4}\left(e^{o^2 T_2}-1\right) + \frac{1}{2}\left(e^{\sigma^2\cdot T_1}-1\right)\right]$$

$$<\left(S_0\right)^2\cdot e^{2\mu T_2}\left[\frac{1}{4}\left(e^{o^2 T_2}-1\right) + \frac{1}{4}\left(e^{o^2 T_2}-1\right) + \frac{1}{2}\left(e^{\sigma^2\cdot T_2}-1\right)\right]$$

$$= \left(S_0\right)^2\cdot e^{2\mu T_2}\left[\frac{1}{4}e^{o^2 T_2} + \frac{1}{4}e^{o^2 T_2} + \frac{1}{2}e^{\sigma^2\cdot T_2} - 1\right]$$

$$= \left(S_0\right)^2\cdot e^{2\mu T_2}\left(e^{o^2\cdot T_2}-1\right) = \left(S_0\right)^2\cdot e^{2\mu T_2+2r\left(T_2-T_2\right)}\left(e^{o^2\cdot T_2}-1\right)$$

$$= Var\left[F_{G,t,T_2} \mid t = T_2\right]\ (Lemma\,6).$$

Q.E.D. □