

변동성 스큐가 반영된 모델에서의 PDE를 이용한 multi-asset 옵션 평가

허정규*, 전재기**, 김정훈***

초 록

금융 시장이 발전함에 따라 기초자산의 개수가 여러 개로 늘어나고 상품 구조가 매우 복잡해지는 경향을 보이고 있다. 이러한 여건 하에서는 상품을 평가하는 공식을 유도하기가 대단히 힘들기 때문에, 상품을 평가할 때 일반적으로 PDE나 몬테카를로 시뮬레이션 등의 계산과학적인 방법을 사용한다. 이 중 PDE를 푸는 방법은 빠르고 안정적으로 그릭스를 구할 수 있는 장점이 있어 인기가 있지만, 기초자산의 개수가 늘어남에 따라 계산 비용이 기하급수적으로 늘어나는 단점 또한 나타난다. 그동안 블랙-숄즈 모델을 사용한 multi-asset 옵션을 평가할 때 계산 비용을 줄일 수 있는 여러 연구들이 진행되어왔다. 하지만 단순히 확장된 확률변동성 모델을 사용하게 되면, multi-asset 옵션 평가를 위해 기초자산 개수의 2배가 넘는 차원의 PDE를 풀어야 하는 어려움에 직면하게 된다. 시장에서 나타나는 다양한 변동성 스큐를 반영하기 위해 확률변동성 모델을 사용하고 있다면 이는 반드시 해결해야 하는 문제이다.

Fouque(2010)의 방법론은 단순히 확장된 확률변동성 모델에서 나온 PDE를 확률변동성에 의존하지 않는 여러 PDE로 나눠준다는 점에서 우리가 처한 문제를 해결하는 데 큰 도움이 된다. 이 방법론을 적용하면, 확률변동성 모델을 사용할지라도 여전히 블랙-숄즈 모델과 동등한 차원의 PDE를 풀 수 있게 된다. 하지만 Fouque가 잡은 모델은 확률변동성 간의 완벽한 상관관계가 가정되어있고, 표현할 수 있는 변동성 스큐가 한정적이라는 몇 가지 아쉬운 점을 가지고 있다. 우리는 기초자산 별로 확률변동성을 두거나 Fouque(2003)가 한 것처럼 천천히 회귀하는 변동성을 추가하는 방식으로 Fouque의 방법론을 확장하는 데 중점을 두었다. 이에 대한 수치 실험 결과 우리가 제시한 모델은 Fouque의 방법론이 가지고 있는 한계를 극복하고, 다양한 변동성 스큐를 반영하며 multi-asset 옵션 평가에서도 더 좋은 성과를 발휘함을 확인할 수 있었다.

주제어 : multi-asset 옵션, 확률변동성, 편미분방정식(PDE),

* 주저자, 교신저자, 연세대학교 수학과 박사과정, 주소 : 03722, 서울특별시 서대문구 연세로 50,
E-mail : phstar2005@naver.com, 전화 : 010-8960-0122

** 연세대학교 수학과 박사과정, Email : clickmiru@naver.com

*** 연세대학교 수학과, E-mail : jhkim96@yonsei.ac.kr

1. 서론

투자자의 욕구가 다양화됨에 따라 금융상품 또한 상품 구조가 복잡해지고 기초자산의 개수가 늘어나는 경향을 보이고 있다. 예를 들어 최근 들어 유행하는 구조화 상품은, 채권의 수익률을 높이기 위해 상품의 일정 부분을 파생상품의 성격을 띠게 만든 것인데, 상품 구조가 복잡하고 기초자산이 여러 개인 경우가 대부분이다. 이로 인해 금융상품의 평가 공식을 유도해내기가 점점 힘들어지면서, 편미분방정식(Partial differential equation, 이하 PDE)에 기초한 방법(유한차분법(이하 FDM), 유한요소법(이하 FEM) 등), 트리, 몬테카를로 시뮬레이션 등 계산과학적인 방법으로 상품을 평가하는 방식이 일반화되어가고 있다. 기초자산의 개수가 적을 때는 보통 PDE를 푸는 방법이 선호된다. 이 방법은 다른 방법들에 비해 훨씬 빠르고 안정적으로 그릭스를 얻을 수 있다는 장점을 가지고 있다. 하지만 기초자산의 개수가 많아지면, 이 방법은 계산 비용이 기하급수적으로 커지게 되는 단점을 갖게 된다. 한 예로 FDM으로 PDE를 푸는 경우, 파티션의 개수가 m 일 때 필요한 계산의 복잡도는 기초자산이 1개일 때 $O(m)$ 이지만 기초자산이 2개일 때는 $O(m^3)$ 이다. 이를 매우 단순화해서 말하면, 기초자산이 1개일 때 FDM으로 PDE를 푸는데 10초가 걸리는 경우 기초자산이 2개일 때는 1000초가 걸리게 된다는 것을 뜻한다. 기초자산의 개수가 많을 때 몬테카를로 시뮬레이션이 대안이 될 수 있지만, 이 방법은 매우 느리고 불안정하게 그릭스를 도출하기 때문에 우수한 대안이라고 말하기 힘들다. 오히려 모델의 변형이나 알고리즘 최적화를 통해 PDE를 푸는데 필요한 계산 비용을 줄이는 것이 현실적인 해법이다.

앞서 말했듯이, 차원이 커질수록 계산에 필요한 비용이 기하급수적으로 증가하기 때문에, 기초자산의 개수가 많은 상품, 즉 multi-asset 옵션은 PDE를 수치적으로 푸는 방법으로 평가하기가 매우 힘들다. 이런 현상은 관습적으로 '차원의 저주(curse of dimensionality)'라고 불리는데 금융공학 분야에서 이 문제를 해결하기 위한 노력은 꾸준히 이어져왔다. Lötstedt(2007)과 Persson(2007)은 블랙-숄즈 PDE를 FDM으로 풀면서 adaptive method를 적용하였고, Heinecke(2012)는 블랙-숄즈 PDE를 sparse grid 위에서 FEM으로 풀면서 병렬 컴퓨팅을 적용하는 방식으로 계산에 필요한 비용을 절감시켰다. 또한 발전하는 하드웨어를 금융공학 분야에 이용하는 연구들도 점차 늘어나는 추세이다. Gaikwad(2009)는 Hierarchical 근사와 preconditioned Krylov subspace based methods를 이용하여, PDE를 풀 때 scalability를 보장한 후, GPGPU로 병렬 컴퓨팅을 적용하여 계산 속도를 극적으로 향상시켰다.

언급한 연구들이 PDE에 기반을 둔 multi-asset 옵션 평가에 계산과학적인 측면에서 중요한 성과를 이룩한 것은 분명하지만, 다루는 시장 모델이 대부분 블랙-숄즈 모델로 한정되었다는 한계를 가지고 있다. 하지만 많은 경험적 연구에서 알려진 것처럼, 실제로 시장은 상수 변동성을 갖지 않아 implied volatility skew 혹은 smile 같은 현상이 관측된다. 이런 현상을 반영하는 모델들 중 가장 널리 알려진 부류가 Heston(1993) 모델 같은 확률변동성 모델이다. 기존의 확률변동성 모델은 single-asset 옵션을 평가하기 위해 만들어진 것인데, 이를 multi-asset 옵션 평가 모델로 확장하려는 연구는 최근 들어 활발히 진행되고 있다. Dimitroff(2011)은 Heston 모델을 multivariate 모델로 확장하였고, Muhle-Karbe(2012)은 확률변동성 과정이 OU process일 때의 multivariate 모델을 연구한 바 있다. 이러한 모델에 Feynman-Kac 정리를 적절히 적용하면, 블랙-숄즈 PDE보다 차원이 2배 높은 PDE가 나오게 된다. 이는 금융상품의 가격이 기초자산 뿐만 아니라 확률변동성에도 의존하기 때문이다. 하지만 3차원을 넘어선 PDE는 수치적으로 풀기가 매우 힘들다. 이처럼 PDE를 이용하여 multi-asset 옵션을 평가할 때, 'curse of dimensionality'는 블랙-숄즈 모델보다 확률변동성 모델에서 더욱 심각한 문제로 나타난다.

우리는 Fouque(2012)의 결과를 이 문제의 해결책으로 제시하고자 한다. 이 결과를 이용하면 변동성 스칼라를 반영하면서도 풀어야 하는 PDE의 차원을 기초자산의 개수와 동일하게 두는 것이 가능하다. Fouque는 이 모델에서 변동성이 빠르게 회귀한다는 가정을 하고, Feynman-Kac 정리로 얻어진 PDE에 asymptotic method를 적용하였다. 그러면 풀어야 하는 PDE가 2개로 나뉘지는데, 이 PDE의 해는 확률변동성에 의존하지 않게 된다. Fouque의 방법론은 우리가 처한 문제를 푸는데 획기적으로 도움이 되지만,

모델 세팅 면에서 몇 가지의 문제점 혹은 아쉬운 점을 가지고 있다. 우선 자산의 개수가 여러 개인데 비해 확률변동성 과정의 개수는 한 개로 한정되어 있다. 이는 각 자산의 변동성이 서로 완벽히 상관되어 있다고 가정한 것과 동등한데 이와 상반되는 관측 결과는 수없이 많다. 또한 Fouque의 방법론으로 반영할 수 있는 변동성 스큐의 모양이 비교적 한정적이다. 좀 더 자세히 말하면 Fouque의 방법론은 짧은 만기에서 강하게 나타났다가 긴 만기에서 급격히 사라지는 변동성 스큐만을 표현할 수 있다. 따라서 본 논문에서는 각 자산마다 확률변동성 과정을 따로 두는 방법을 통해 확률변동성 간의 합리적인 상관성을 가정할 것이다. 그리고 느리게 회귀하는 변동성을 추가적으로 고려함으로써 반영할 수 있는 변동성 스큐 모양을 크게 확장할 것이다. 각 접근법이 가지는 의미를 충분히 짚고 넘어갈 수 있도록, 한번에 확장하기 보다는 단계적으로 나눠서 진행할 것이다. 또한 마지막으로 이러한 접근이 Fouque의 방법론보다 얼마나 나은 성과를 보이는지를 수치 실험을 통해 구체적으로 보일 것이다.

2. 문헌 연구

우리 논문의 출발점이 되는 Fouque(2012) 논문의 결과물을 간단히 살펴보자. 그 이전에 Fouque 논문이 확률변동성 모델을 단순하게 확장한 논문들과 어떤 차이점이 있는지를 알아보기 위해 Dimitroff (2011)이 잡은 모델을 보도록 하자. 다음은 기초자산이 2개인 경우에 Dimitroff이 확장한 Heston 모델이다.

$$\begin{aligned} dX_t^1 &= \mu_1 X_t^1 dt + \sqrt{Y_t^1} X_t^1 dW_t^{X,1}, & dX_t^2 &= \mu_2 X_t^2 dt + \sqrt{Y_t^2} X_t^2 dW_t^{X,2} \\ dY_t^1 &= \kappa_1(\theta_1 - Y_t^1)dt + \sigma_1 \sqrt{Y_t^1} dW_t^{Y,1}, & dY_t^2 &= \kappa_2(\theta_2 - Y_t^2)dt + \sigma_2 \sqrt{Y_t^2} dW_t^{Y,2} \\ dW_t^{X,1} dW_t^{Y,1} &= \rho_1^{XY} dt, & dW_t^{X,2} dW_t^{Y,2} &= \rho_2^{XY} dt, & dW_t^{X,1} dW_t^{X,2} &= \rho_X dt \end{aligned}$$

이 모델에 Feynman-Kac 정리를 적용하면, 다음처럼 2차원 PDE가 나오게 된다. (Dimitroff 모델을 포함한) 확률변동성 모델에서 금융상품의 가격이 기초자산 뿐만 아니라 확률변동성에도 의존하기 때문이다.

$$\begin{aligned} P_t + rx_1 P_{x_1} + rx_2 P_{x_2} + \frac{1}{2} y_1 x_1^2 P_{x_1 x_1} + \frac{1}{2} y_2 x_2^2 P_{x_2 x_2} + \rho_X \sqrt{y_1 y_2} x_1 x_2 P_{x_1 x_2} \\ + \kappa_1(\theta_1 - y_1) P_{y_1} + \kappa_2(\theta_2 - y_2) P_{y_2} + \frac{1}{2} \sigma_1^2 y_1 P_{y_1 y_1} + \frac{1}{2} \sigma_2^2 y_2 P_{y_2 y_2} + \rho_1^{XY} \sigma_1 x_1 y_1 P_{x_1 y_1} + \rho_2^{XY} \sigma_2 x_2 y_2 P_{x_2 y_2} - rP = 0 \end{aligned}$$

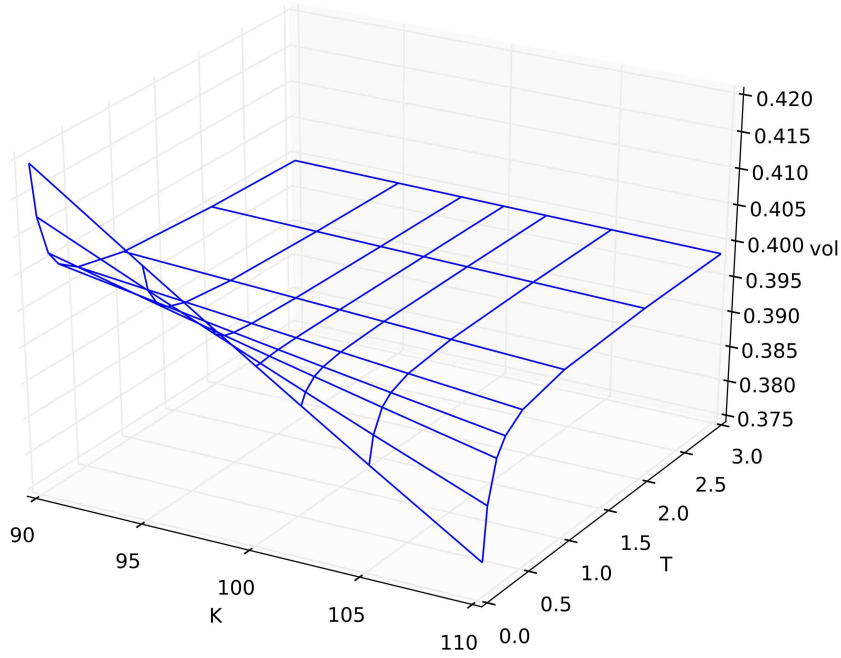
만약 기초자산의 개수가 3개라면 6차원 PDE가 나오게 되어 훨씬 더 풀기 힘든 문제가 될 것이다.

아래는 Fouque(2012)가 잡은 모델이다.

$$\begin{aligned} dX_t^1 &= \mu_1 X_t^1 dt + f_1(Y_t) X_t^1 dW_t^{X,1}, & dX_t^2 &= \mu_2 X_t^2 dt + f_2(Y_t) X_t^2 dW_t^{X,2} \\ dY_t &= \kappa(\theta - Y_t)dt + \sigma \sqrt{Y_t} dW_t^Y \\ dW_t^{X,1} dW_t^Y &= \rho_1^{XY} dt, & dW_t^{X,2} dW_t^Y &= \rho_2^{XY} dt, & dW_t^{X,1} dW_t^{X,2} &= \rho_X dt \end{aligned}$$

이 모델은 기초자산의 개수는 2개인데 비해 확률변동성을 이끄는 확률과정은 1개이다. 이러한 설정은 이론 전개 후 최종적으로 남는 모수의 개수를 크게 줄여주는 역할을 하게 된다. Fouque는 여기서 κ 가 크다는 가정을 하고, Feynman-Kac 정리로 얻어진 PDE에 asymptotic method를 적용하였다. 그 결과 모델의 모수를 10개 $(\kappa_1, \theta_1, \sigma_1, \rho_1^{XY}, \kappa_2, \theta_2, \sigma_2, \rho_2^{XY}, y, \rho_X)$ 에서 5개 $(\bar{\sigma}_1, V_3^1, \bar{\sigma}_2, V_3^2, \rho_X)$ 로 대폭 줄였고, P 를 P_0 와 P_1 의 합으로 근사할 수 있었다. 여기서 P_0, P_1 이 만족하는 PDE는 아래와 같은 2개의 1D PDE이다.

$$\begin{aligned} L_{BS}(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \rho_X) P_0 &= 0 \\ L_{BS}(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \rho_X) P_1 &= - \left[V_3^1 \bar{\sigma}_1 x_1 \partial_{x_1} + V_3^2 \bar{\sigma}_2 x_2 \partial_{x_2} \right] \left[(\bar{\sigma}_1 x_1)^2 \partial_{x_1 x_1} + 2\rho_X \bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2 x_1 x_2 \partial_{x_1 x_2} + (\bar{\sigma}_2 x_2)^2 \partial_{x_2 x_2} \right] P_0 \end{aligned}$$



그림[1] 만기가 짧을 때 강하게 나타나는 변동성 스쿠

여기서 $L_{BS}(\sigma_1, \sigma_2, \rho_X) = \partial_t + rx_1 \partial_{x_1} + rx_2 \partial_{x_2} + \frac{1}{2} \sigma_1^2 x_1^2 \partial_{x_1 x_1} + \rho_X \sigma_1 \sigma_2 x_1 x_2 \partial_{x_1 x_2} + \frac{1}{2} \sigma_2^2 x_2^2 \partial_{x_2 x_2} - r$.

P_0, P_1 이 확률변동성에 의존하지 않아서 블랙-숄즈 PDE와 차원이 동일한 것에 주목하길 바란다. 또한 Fouque의 방법론은 바닐라옵션 데이터에 나타나는 변동성 스쿠를 반영하는 것을 가능하게 만든다. 이 효과는 함수로 표현될 수 있다. 이 모델에서 내재변동성 I 를 행사가 K 와 만기 T 에 대한 함수로 나타내면,

$$I_1(K, T) \approx b_1^* + a_1^\epsilon LMMR_1(K, T), \quad I_2(K, T) \approx b_2^* + a_2^\epsilon LMMR_2(K, T)$$

여기서 $LMMR_1 = \frac{\log(K/x_1)}{T-t}$, $b_1^* = \bar{\sigma}_1 + \frac{(\bar{\sigma}_1)^2 V_3^1}{2} \left(1 - \frac{2r}{(\bar{\sigma}_1)^2}\right)$, $a_1^\epsilon = V_3^1$

$$LMMR_2 = \frac{\log(K/x_2)}{T-t}, \quad b_2^* = \bar{\sigma}_2 + \frac{(\bar{\sigma}_2)^2 V_3^2}{2} \left(1 - \frac{2r}{(\bar{\sigma}_2)^2}\right), \quad a_2^\epsilon = V_3^2$$

이 내재변동성 함수 I 는 그림[1]과 같이 만기가 길어지면서 급속히 사라지는 변동성 스쿠를 나타낸다. 지금까지 말한 대로, Fouque의 방법론은 변동성 스쿠를 반영하면서도, 단순하게 multi-asset 옵션으로 확장된 확률변동성 모델보다 모수가 훨씬 적고, 풀어야 하는 PDE의 차원도 절반이라는 장점을 가진다. 하지만 표현 가능한 변동성 스쿠의 종류가 한정적이고, 모수의 개수를 줄이기 위해 확률변동성 과정을 하나로 두어 각 자산의 변동성끼리 완벽히 상관되는 문제점을 가지고 있다.

3. 다양한 확장 모델

이 섹션에서는 Fouque(2012) 방법론의 약점을 극복하기 위해 여러 가지 방식들을 적용해 보도록 하자. 우선 자산의 변동성끼리 완벽히 상관관계를 갖는 현상을 해결하기 위해 확률변동성 과정을 자산마다 하나씩 놓을 수 있다. 또한 반영 가능한 변동성 스쿠의 종류를 늘리기 위해, Fouque(2003)가 한 것처럼 빠르

게 회귀하는 변동성 이외에 느리게 회귀하는 변동성을 추가할 수도 있다. 물론 이 2가지 방법을 한꺼번에 적용하는 것도 가능할 것이다. 하지만 모델 확장을 하면 피팅 능력이 개선되기는 하지만 모수가 늘어나는 부작용도 발생하게 된다. 따라서 2가지 방법이 따로 적용된 모델들을 제시한 후, 2가지 방법이 함께 고려된 모델을 제안할 것이다. 디테일한 몇 가지 사항을 제외하면 모델마다 사용하는 기법이 비슷하기 때문에, 부록에서 가장 일반적인 모델에 대해서만 확장 방식을 구체적으로 설명하도록 하겠다.

(1) 자산 별로 빠르게 회귀하는 변동성을 갖는 경우 (Y_t^1, Y_t^2)

$$\begin{aligned} dX_t^1 &= \mu_1 X_t^1 dt + f_1(Y_t^1) X_t^1 dW_t^{X,1}, & dX_t^2 &= \mu_2 X_t^2 dt + f_2(Y_t^2) X_t^2 dW_t^{X,2} \\ dY_t^1 &= \kappa_1^Y \alpha_1(Y_t^1) dt + \sigma_1^Y \beta_1(Y_t^1) dW_t^{Y,1}, & dY_t^2 &= \kappa_2^Y \alpha_2(Y_t^2) dt + \sigma_2^Y \beta_2(Y_t^2) dW_t^{Y,2} \\ & & dW_t^{X,1} dW_t^{X,2} &= \rho_X dt, & dW_t^{Y,1} dW_t^{Y,2} &= \rho_Y dt \\ & & dW_t^{X,1} dW_t^{Y,1} &= \rho_{XY}^1 dt, & dW_t^{X,2} dW_t^{Y,2} &= \rho_{XY}^2 dt \end{aligned}$$

Fouque(2012)가 잡은 모델에서 변동성끼리 완벽히 상관되어서 생기는 문제는 자산 별로 확률변동성 과정을 따로 놓는 방식으로 해결될 수 있다. 이 모델에서 κ_1^Y, κ_2^Y 가 크다는 가정을 하고, Feynman-Kac 정리로 얻어진 PDE에 asymptotic method를 적용한다. 그러면 모델의 모수를 7개 ($\bar{\sigma}_1, V_3^1, V_4^1, \bar{\sigma}_2, V_3^2, V_4^2, \bar{\rho}_X$)로 정리하고, 상품의 가격 P 를 $P_{0,0} + P_{1,0} + P_{0,1}$ 으로 근사할 수 있다. 여기서 $P_{0,0}, P_{1,0}, P_{0,1}$ 이 만족하는 PDE는 아래와 같은 3개의 1D PDE이다.

$$\begin{aligned} L_{BS}(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\rho}_X) P_{0,0} &= 0 \\ L_{BS}(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\rho}_X) P_{1,0} &= - \left[\bar{\sigma}_1 x_1 \partial_{x_1} \right] \left[V_3^1 (\bar{\sigma}_1 x_1)^2 \partial_{x_1 x_1} + V_4^1 \bar{\rho}_X \bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2 x_1 x_2 \partial_{x_1 x_2} \right] P_{0,0} \\ L_{BS}(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\rho}_X) P_{0,1} &= - \left[\bar{\sigma}_2 x_2 \partial_{x_2} \right] \left[V_3^2 (\bar{\sigma}_2 x_2)^2 \partial_{x_2 x_2} + V_4^2 \bar{\rho}_X \bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2 x_1 x_2 \partial_{x_1 x_2} \right] P_{0,0} \end{aligned}$$

Fouque의 방법론과 비교해서 V_4^1, V_4^2 라는 모수가 추가된 것에 주목하자. Fouque의 방법론은 V_4^1, V_4^2 이 $V_4^1 = 2V_3^1, V_4^2 = 2V_3^2$ 으로 한정된 것으로 볼 수 있다. 새로 추가된 모수 V_4^1, V_4^2 는 변동성 스쿠 반영 효과를 향상시키는데 영향을 주진 않지만, 두 자산 간의 상관계수 $\bar{\rho}_X$ 가 상품의 가격에 미치는 영향을 조절하는 데 영향을 미친다. 이는 Fouque의 방법론이 이 모델보다 상관성을 유연하게 반영하지 못한 것을 의미한다. 따라서 지금의 방법론이 Fouque 방법론과 변동성 스쿠를 반영하는 능력이 동일하더라도, 더 유연한 상관계수 반영으로 인해 multi-asset 옵션 평가 능력이 더 좋을 가능성이 높다.

(2) 빠르게 회귀하는 하나의 변동성 외에, 자산 별로 느리게 회귀하는 변동성이 추가된 경우 (Y_t, Z_t^1, Z_t^2)

Fouque(2003)는 바닐라 옵션을 평가할 때 빠르게 회귀하는 변동성 외에 느리게 회귀하는 변동성을 따로 고려함으로써 표현 가능한 변동성 스쿠의 종류를 크게 늘리는데 기여하였다. Multi-asset 옵션을 평가할 때도 이 아이디어는 여전히 유효하다. 다만 Fouque(2012)처럼 빠르게 회귀하는 변동성을 하나로만 잡아도 변동성 스쿠를 반영하는 데는 차이가 없다. 하지만 느리게 회귀하는 변동성을 하나로 두게 되면 자산이 다른 옵션끼리 공유하는 모수가 발생하는 문제가 생긴다. 아래는 느리게 회귀하는 변동성을 하나만 놓았을 때의 내재변동성 함수를 나타낸 것이다.

$$I_1(K, T) \approx b_1^* + \tau b_1^\delta + (a_1^\epsilon + \tau a_1^\delta) LMMR_1(K, T), \quad I_2(K, T) \approx b_2^* + \tau b_2^\delta + (a_2^\epsilon + \tau a_2^\delta) LMMR_2(K, T)$$

$$\text{여기서 } LMMR_1 = \frac{\log(K/x_1)}{T-t}, \quad b_1^* = \bar{\sigma}_1 + \frac{(\bar{\sigma}_1)^2 V_3^1}{2} \left(1 - \frac{2r}{(\bar{\sigma}_1)^2} \right), \quad a_1^\epsilon = V_3^1,$$

$$b_1^\delta = \bar{\sigma}_1 V_0 + \frac{(\bar{\sigma}_1)^2 V_1^1}{2} \left(1 - \frac{2r}{(\bar{\sigma}_1)^2}\right), \quad a_1^\delta = V_1^1$$

$$LMMR_2 = \frac{\log(K/x_2)}{T-t}, \quad b_2^* = \bar{\sigma}_2 + \frac{(\bar{\sigma}_2)^2 V_3^2}{2} \left(1 - \frac{2r}{(\bar{\sigma}_2)^2}\right), \quad a_2^\epsilon = V_3^2,$$

$$b_2^\delta = \bar{\sigma}_2 V_0 + \frac{(\bar{\sigma}_2)^2 V_1^2}{2} \left(1 - \frac{2r}{(\bar{\sigma}_2)^2}\right), \quad a_2^\delta = V_1^2$$

I_1 과 I_2 가 모수 V_0 를 공유하고 있는 것을 눈여겨 봐야한다. 모수 V_0 는 시간 축을 따라 변동성 스큐를 기울이는 역할을 담당한다. 공통의 모수 V_0 를 가지고서는 두 자산의 변동성 스큐를 시간 축에 대해 각각 알맞게 기울이기 힘들다. 이는 기대했던 변동성 스큐 반영 효과를 감소시키는 결과로 이어지고, 따라서 변동성 스큐 반영 효과를 극대화하기 위해서는 느리게 회귀하는 변동성을 자산마다 두어야 한다. 또한 지금 모델에서 빠르게 회귀하는 변동성이 하나이기 때문에 Fouque(2012)가 모수를 감소시키기 위해 사용했던 기법을 사용하는 것이 가능하다, 이를 위해서는 빠르게 회귀하는 변동성을 나타내는 $f(Y_t)$ 와 느리게 회귀하는 변동성을 나타내는 $h(Z_t)$ 의 곱으로 모델의 변동성을 두어야 한다. 이러한 생각이 적용된 모델은,

$$dX_t^1 = \mu_1 X_t^1 dt + f_1(Y_t) h_1(Z_t^1) X_t^1 dW_t^{X,1}, \quad dX_t^2 = \mu_2 X_t^2 dt + f_2(Y_t) h_2(Z_t^2) X_t^2 dW_t^{X,2}$$

$$dY_t = \kappa_1^Y \alpha(Y_t) dt + \sigma_1^Y \beta(Y_t) dW_t^Y$$

$$dZ_t^1 = \kappa_1^Z c_1(Z_t^1) dt + \sigma_1^Z g_1(Z_t^1) dW_t^{Z,1}, \quad dZ_t^2 = \kappa_2^Z c_2(Z_t^2) dt + \sigma_2^Z g_2(Z_t^2) dW_t^{Z,2}$$

$$dW_t^{X,1} dW_t^{X,2} = \rho_X dt, \quad dW_t^{Z,1} dW_t^{Z,2} = \rho_Z dt$$

$$dW_t^{X,1} dW_t^Y = \rho_{XY}^1 dt, \quad dW_t^{X,2} dW_t^Y = \rho_{XY}^2 dt, \quad dW_t^{X,1} dW_t^{Z,1} = \rho_{XZ}^1 dt, \quad dW_t^{X,2} dW_t^{Z,2} = \rho_{XZ}^2 dt,$$

$$dW_t^Y dW_t^{Z,1} = \rho_{YZ}^1 dt, \quad dW_t^Y dW_t^{Z,2} = \rho_{YZ}^2 dt$$

이 모델에서 κ^Y 가 크고 κ_1^Z, κ_2^Z 가 작다는 가정을 하고, Feynman-Kac 정리로 얻어진 PDE에 asymptotic method를 적용한다. 그러면 모델의 모수를 9개 $(\bar{\sigma}_1(z_1), V_0^1(z_1), V_1^1(z_1), V_3^1, \bar{\sigma}_2(z_2), V_0^2(z_2), V_1^2(z_2), V_3^2, \rho_X)$ 로 정리하고, 상품의 가격 P 를 $P_{0,0,0} + P_{1,0,0} + P_{0,1,0} + P_{0,0,1}$ 으로 근사할 수 있다. 여기서 $P_{0,0,0}, P_{1,0,0}, P_{0,1,0}, P_{0,0,1}$ 는 아래와 같은 4개의 1D PDE를 만족하는 해이다.

$$L_{BS}(\bar{\sigma}_1(z_1), \bar{\sigma}_2(z_2), \rho_X) P_{0,0,0} = 0$$

$$L_{BS}(\bar{\sigma}_1(z_1), \bar{\sigma}_2(z_2), \rho_X) P_{0,0,1}$$

$$= - \left[V_3^1 \bar{\sigma}_1(z_1) x_1 \partial_{x_1} + V_3^2 \bar{\sigma}_2(z_2) x_2 \partial_{x_2} \right] \left[(\bar{\sigma}_1(z_1) x_1)^2 \partial_{x_1 x_1} + 2\rho_X \bar{\sigma}_1(z_1) \bar{\sigma}_2(z_2) x_1 x_2 \partial_{x_1 x_2} + (\bar{\sigma}_2(z_2) x_2)^2 \partial_{x_2 x_2} \right] P_{0,0,0}$$

$$L_{BS}(\bar{\sigma}_1(z_1), \bar{\sigma}_2(z_2), \rho_X) P_{1,0,0}$$

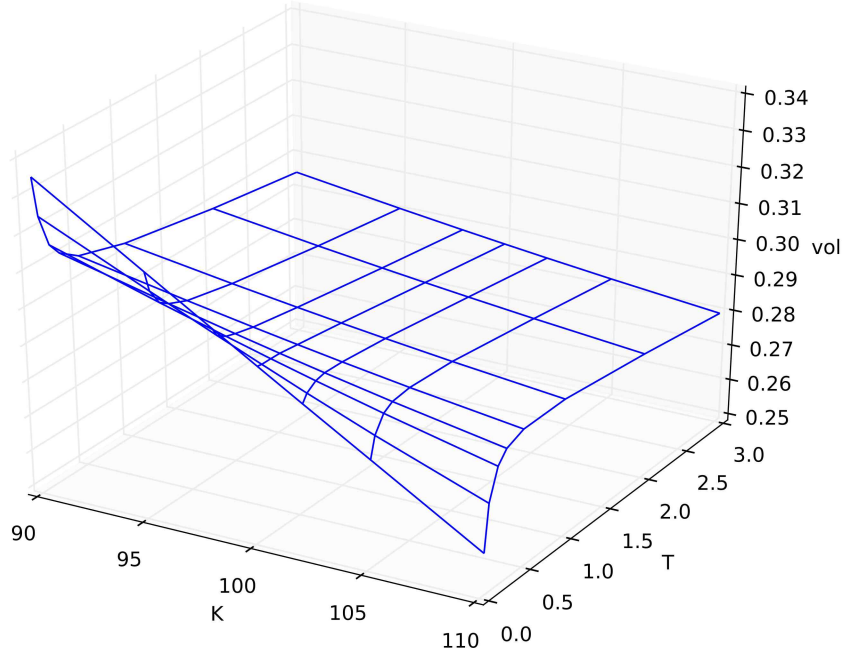
$$= - 2\tau \left[V_0^1(z_1) + V_1^1(z_1) \bar{\sigma}_1(z_1) x_1 \partial_{x_1} \right] \left[(\bar{\sigma}_1(z_1) x_1)^2 \partial_{x_1 x_1} + \rho_X \bar{\sigma}_1(z_1) \bar{\sigma}_2(z_2) x_1 x_2 \partial_{x_1 x_2} \right] P_{0,0,0}$$

$$L_{BS}(\bar{\sigma}_1(z_1), \bar{\sigma}_2(z_2), \rho_X) P_{0,1,0}$$

$$= - 2\tau \left[V_0^2(z_2) + V_1^2(z_2) \bar{\sigma}_2(z_2) x_2 \partial_{x_2} \right] \left[(\bar{\sigma}_2(z_2) x_2)^2 \partial_{x_2 x_2} + \rho_X \bar{\sigma}_1(z_1) \bar{\sigma}_2(z_2) x_1 x_2 \partial_{x_1 x_2} \right] P_{0,0,0}$$

이 결과로부터 유도되는 내재변동성 I 를 행사가 K 와 만기 T 에 대한 함수로 적으면,

$$I_1(K, T) \approx b_1^* + \tau b_1^\delta + (a_1^\epsilon + \tau a_1^\delta) LMMR_1(K, T), \quad I_2(K, T) \approx b_2^* + \tau b_2^\delta + (a_2^\epsilon + \tau a_2^\delta) LMMR_2(K, T)$$



그림[2] 만기가 짧을 때 강하게 나타나면서, 만기가 길어져도 사라지지 않는 변동성 스쿼

여기서 $LMMR_1 = \frac{\log(K/x_1)}{T-t}$, $b_1^* = \bar{\sigma}_1 + \frac{(\bar{\sigma}_1)^2 V_3^1}{2} \left(1 - \frac{2r}{(\bar{\sigma}_1)^2}\right)$, $a_1^\epsilon = V_3^1$,

$$b_1^\delta = \bar{\sigma}_1 V_0^1 + \frac{(\bar{\sigma}_1)^2 V_1^1}{2} \left(1 - \frac{2r}{(\bar{\sigma}_1)^2}\right), \quad a_1^\delta = V_1^1$$

$$LMMR_2 = \frac{\log(K/x_2)}{T-t}, \quad b_2^* = \bar{\sigma}_2 + \frac{(\bar{\sigma}_2)^2 V_3^2}{2} \left(1 - \frac{2r}{(\bar{\sigma}_2)^2}\right), \quad a_2^\epsilon = V_3^2,$$

$$b_2^\delta = \bar{\sigma}_2 V_0^2 + \frac{(\bar{\sigma}_2)^2 V_1^2}{2} \left(1 - \frac{2r}{(\bar{\sigma}_2)^2}\right), \quad a_2^\delta = V_1^2$$

느리게 회귀하는 변동성을 추가한 결과, 그림[2]와 같은 만기가 짧을 때 강하게 나타나면서 만기가 길어져도 어느 정도 사라지지 않고 남아있는 변동성 스쿼를 표현 가능하게 되었다.

(3) 자산 별로 빠르게 회귀하는 변동성과 느리게 회귀하는 변동성을 모두 갖는 경우 ($Y_t^1, Y_t^2, Z_t^1, Z_t^2$)

이제 이전의 2가지 방식이 모두 고려된 가장 일반적인 모델을 제시하도록 하겠다. 다시 말해, 자산 별로 빠르게 회귀하는 확률변동성 과정과 느리게 회귀하는 확률변동성 과정이 모두 따로 잡혀있는 경우이다. 모수가 급증하는 현상을 막으려면, 이 모델에서도 $f(Y_t)$ 와 $h(Z_t)$ 의 곱으로 모델의 변동성을 설정해야 한다. 여기서는 Fouque의 기법을 한 번 더 이용하기 위해서 이런 방법을 쓰는 게 아니라, 이론 전개 과정 중 나오는 $\bar{\rho}_X$ 가 z_1, z_2 에 의존하지 않게 만들려고 하는 것이다. 자세한 과정이 궁금하다면 부록을 참고하길 바란다.

$$dX_t^1 = \mu_1 X_t^1 dt + f_1(Y_t^1) h_1(Z_t^1) X_t^1 dW_t^{X,1}, \quad dX_t^2 = \mu_2 X_t^2 dt + f_2(Y_t^2) h_2(Z_t^2) X_t^2 dW_t^{X,2}$$

$$\begin{aligned}
dY_t^1 &= \kappa_1^Y \alpha_1(Y_t^1) dt + \sigma_1^Y \beta_1(Y_t^1) dW_t^{Y,1}, \quad dY_t^2 = \frac{1}{\epsilon_2} \alpha_2(Y_t^2) dt + \frac{1}{\sqrt{\epsilon_2}} \beta_2(Y_t^2) dW_t^{Y,2} \\
dZ_t^1 &= \delta_1 c_1(Z_t^1) dt + \sqrt{\delta_1} g_1(Z_t^1) dW_t^{Z,1}, \quad dZ_t^2 = \delta_2 c_2(Z_t^2) dt + \sqrt{\delta_2} g_2(Z_t^2) dW_t^{Z,2} \\
dW_t^{X,1} dW_t^{X,2} &= \rho_X dt, \quad dW_t^{Y,1} dW_t^{Y,2} = \rho_Y dt, \quad dW_t^{Z,1} dW_t^{Z,2} = \rho_Z dt \\
dW_t^{X,1} dW_t^{Y,1} &= \rho_{XY}^1 dt, \quad dW_t^{X,2} dW_t^{Y,2} = \rho_{XY}^2 dt, \quad dW_t^{X,1} dW_t^{Z,1} = \rho_{XZ}^1 dt, \quad dW_t^{X,2} dW_t^{Z,2} = \rho_{XZ}^2 dt \\
dW_t^{Y,1} dW_t^{Z,1} &= \rho_{YZ}^1 dt, \quad dW_t^{Y,2} dW_t^{Z,2} = \rho_{YZ}^2 dt
\end{aligned}$$

이 모델에서 κ_1^Y , κ_2^Y 가 크고 κ_1^Z , κ_2^Z 가 작다는 가정을 하고, Feynman-Kac 정리로 얻어진 PDE에 asymptotic method를 적용한다. 그러면 모델의 모수를 11개 $(\bar{\sigma}_1(z_1), V_0^1(z_1), V_1^1(z_1), V_3^1, V_4^1, \bar{\sigma}_2(z_2), V_0^2(z_2), V_1^2(z_2), V_3^2, V_4^2, \bar{\rho}_X)$ 로 정리하고, 상품의 가격 P 를 $P_{0,0,0,0} + P_{1,0,0,0} + P_{0,1,0,0} + P_{0,0,1,0} + P_{0,0,0,1}$ 으로 근사할 수 있다. 여기서 $P_{0,0,0,0}$, $P_{1,0,0,0}$, $P_{0,1,0,0}$, $P_{0,0,1,0}$, $P_{0,0,0,1}$ 이 만족하는 PDE는 아래와 같은 5개의 1D PDE이다.

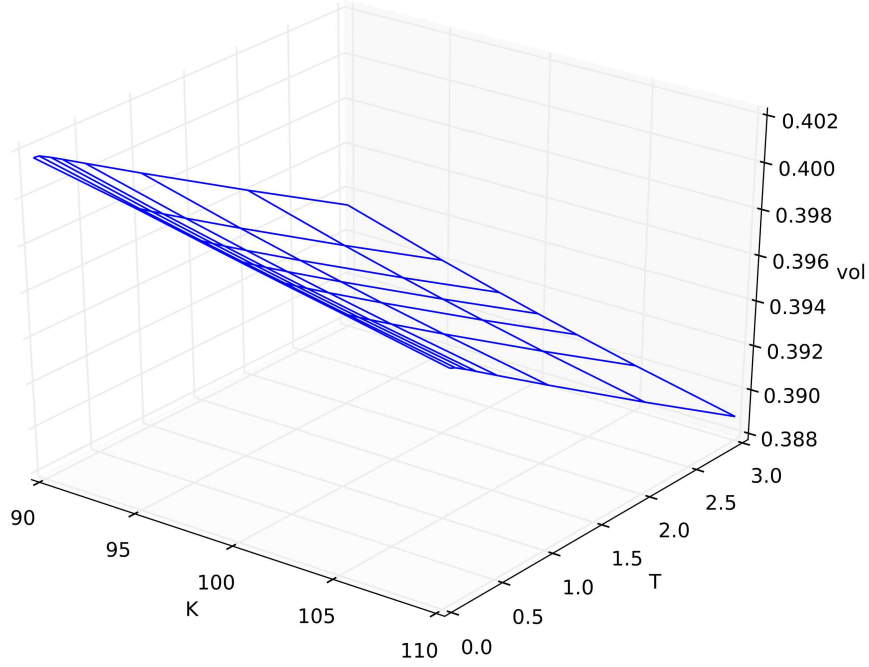
$$\begin{aligned}
L_{BS}(\bar{\sigma}_1(z_1), \bar{\sigma}_2(z_2), \bar{\rho}_X) P_{0,0,0,0} &= 0 \\
L_{BS}(\bar{\sigma}_1(z_1), \bar{\sigma}_2(z_2), \bar{\rho}_X) P_{1,0,0,0} \\
&= - \left[\bar{\sigma}_1(z_1) x_1 \partial_{x_1} \right] \left[V_3^1 (\bar{\sigma}_1(z_1) x_1)^2 \partial_{x_1} + V_4^1 \bar{\rho}_X \bar{\sigma}_1(z_1) \bar{\sigma}_2(z_2) x_1 x_2 \partial_{x_1 x_2} \right] P_{0,0,0,0} \\
L_{BS}(\bar{\sigma}_1(z_1), \bar{\sigma}_2(z_2), \bar{\rho}_X) P_{0,1,0,0} \\
&= - \left[\bar{\sigma}_2(z_2) x_2 \partial_{x_2} \right] \left[V_3^2 (\bar{\sigma}_2(z_2) x_2)^2 \partial_{x_2} + V_4^2 \bar{\rho}_X \bar{\sigma}_1(z_1) \bar{\sigma}_2(z_2) x_1 x_2 \partial_{x_1 x_2} \right] P_{0,0,0,0} \\
L_{BS}(\bar{\sigma}_1(z_1), \bar{\sigma}_2(z_2), \bar{\rho}_X) P_{1,0,0,0} \\
&= -2\tau \left[V_0^1(z_1) + V_1^1(z_1) \bar{\sigma}_1(z_1) x_1 \partial_{x_1} \right] \left[(\bar{\sigma}_1(z_1) x_1)^2 \partial_{x_1} + \rho_X \bar{\sigma}_1(z_1) \bar{\sigma}_2(z_2) x_1 x_2 \partial_{x_1 x_2} \right] P_{0,0,0,0} \\
L_{BS}(\bar{\sigma}_1(z_1), \bar{\sigma}_2(z_2), \bar{\rho}_X) P_{0,1,0,0} \\
&= -2\tau \left[V_0^2(z_2) + V_1^2(z_2) \bar{\sigma}_2(z_2) x_2 \partial_{x_2} \right] \left[(\bar{\sigma}_2(z_2) x_2)^2 \partial_{x_2} + \rho_X \bar{\sigma}_1(z_1) \bar{\sigma}_2(z_2) x_1 x_2 \partial_{x_1 x_2} \right] P_{0,0,0,0}
\end{aligned}$$

이 모델이 반영할 수 있는 변동성 스큐는 두 번째 확장 (Y_t, Z_t^1, Z_t^2) 때와 완벽히 동일하다. 하지만 빠르게 회귀하는 변동성을 자산마다 두었기 때문에, 첫 번째 확장 (Y_t^1, Y_t^2) 처럼 두 자산 간의 상관관계를 유연하게 반영할 수 있다. 따라서 두 번째 확장보다 multi-asset 옵션 평가 능력이 개선된다.

(4) 자산 별로 느리게 회귀하는 변동성을 가지는 경우 (Z_t^1, Z_t^2)

특수한 경우로 빠르게 회귀하는 변동성이 제거된 경우를 고려할 수 있다. 이렇게 하면 (3)의 경우보다 유연성이 떨어지지만 모수의 개수를 줄일 수 있게 된다. 변동성 스큐의 모양을 볼 때 굳이 빠르게 회귀하는 변동성을 고려할 필요가 없다고 생각된다면, 이 모델이 모수의 추정 오차를 줄일 수 있는 좋은 선택지가 될 수 있다.

$$\begin{aligned}
dX_t^1 &= \mu_1 X_t^1 dt + h_1(Z_t^1) X_t^1 dW_t^{X,1}, \quad dX_t^2 = \mu_2 X_t^2 dt + h_2(Z_t^2) X_t^2 dW_t^{X,2} \\
dZ_t^1 &= \left[\kappa_1^Z c_1(Z_t^1) - \sigma_1^Z g_1(Z_t^1) \Lambda_Z^1(Y_t, Z_t^1) \right] dt + \sigma_1^Z g_1(Z_t^1) dW_t^{Z,1} \\
dZ_t^2 &= \left[\kappa_2^Z c_2(Z_t^2) - \sigma_2^Z g_2(Z_t^2) \Lambda_Z^2(Y_t, Z_t^2) \right] dt + \sigma_2^Z g_2(Z_t^2) dW_t^{Z,2}
\end{aligned}$$



그림[3] 만기 전체에 걸쳐 일정하게 나타나는 변동성 스쿠

$$dW_t^{X,1}dW_t^{X,2} = \rho_X dt, \quad dW_t^{Z,1}dW_t^{Z,2} = \rho_Z dt$$

$$dW_t^{X,1}dW_t^{Z,1} = \rho_{XZ}^1 dt, \quad dW_t^{X,2}dW_t^{Z,2} = \rho_{XZ}^2 dt$$

이 모델에서 κ_1^Z, κ_2^Z 가 작다는 가정을 하고, Feynman-Kac 정리로 얻어진 PDE에 asymptotic method를 적용한다. 그러면 모델의 모수를 7개($\bar{\sigma}_1(z_1), V_0^1(z_1), V_1^1(z_1), \bar{\sigma}_2(z_2), V_0^2(z_2), V_1^2(z_2), \rho_X$)로 정리하고, 상품의 가격 P 를 $P_{0,0} + P_{1,0} + P_{0,1}$ 으로 근사할 수 있다. 여기서 $P_{0,0}, P_{1,0}, P_{0,1}$ 이 만족하는 PDE는 아래와 같은 3개의 1D PDE이다.

$$L_{BS}(\bar{\sigma}_1(z_1), \bar{\sigma}_2(z_2), \rho_X)P_{0,0} = 0$$

$$L_{BS}(\bar{\sigma}_1(z_1), \bar{\sigma}_2(z_2), \rho_X)P_{1,0}$$

$$= -2\tau \left[V_0^1(z_1) + V_1^1(z_1)\bar{\sigma}_1(z_1)x_1\partial_{x_1} \right] \left[(\bar{\sigma}_1(z_1)x_1)^2 \partial_{x_1 x_1} + \rho_X \bar{\sigma}_1(z_1)\bar{\sigma}_2(z_2)x_1x_2\partial_{x_1 x_2} \right] P_{0,0}$$

$$L_{BS}(\bar{\sigma}_1(z_1), \bar{\sigma}_2(z_2), \rho_X)P_{0,1,0}$$

$$= -2\tau \left[V_0^2(z_2) + V_1^2(z_2)\bar{\sigma}_2(z_2)x_2\partial_{x_2} \right] \left[(\bar{\sigma}_2(z_2)x_2)^2 \partial_{x_2 x_2} + \rho_X \bar{\sigma}_1(z_1)\bar{\sigma}_2(z_2)x_1x_2\partial_{x_1 x_2} \right] P_{0,0}$$

이 결과로부터 유도되는 내재변동성 I 를 행사가 K 와 만기 T 에 대한 함수로 적으면,

$$I_1(K, T) \approx \bar{\sigma}_1 + \pi b_1^\delta + \tau a_1^\delta LMMR_1(K, T), \quad I_2(K, T) \approx \bar{\sigma}_2 + \pi b_2^\delta + \tau a_2^\delta LMMR_2(K, T)$$

$$\text{여기서 } LMMR_1 = \frac{\log(K/x_1)}{T-t}, \quad b_1^\delta = \bar{\sigma}_1 V_0^1 + \frac{(\bar{\sigma}_1)^2 V_1^1}{2} \left(1 - \frac{2r}{(\bar{\sigma}_1)^2} \right), \quad a_1^\delta = V_1^1$$

$$LMMR_2 = \frac{\log(K/x_2)}{T-t}, \quad b_2^\delta = \bar{\sigma}_2 V_0^2 + \frac{(\bar{\sigma}_2)^2 V_1^2}{2} \left(1 - \frac{2r}{(\bar{\sigma}_2)^2} \right), \quad a_2^\delta = V_1^2$$

느리게 회귀하는 변동성만 고려하면, 그림[3]과 같이 만기 전체에 걸쳐 일정하게 기울어진 변동성 스큐를 표현 가능하다. 만약 시장에서 이러한 모양의 변동성 스큐가 관측이 될 때 빠르게 회귀하는 변동성까지 고려했다면, 관련 있는 모수들은 거의 0의 값을 가지게 되었을 것이다. 이러한 모수들은 모델의 피팅 능력을 거의 개선시키지 못한 채 모수의 추정 오차만 늘리게 된다.

물론 모든 자산의 변동성이 빠르게 회귀한다거나, 느리게 회귀한다거나하는 한 가지 경향성만을 보일 필요는 없다. 첫 번째 자산의 변동성은 빠르게 회귀하면서 두 번째 자산의 변동성은 느리게 회귀할 수도 있는 것이고, 첫 번째 자산의 변동성은 빠르게 회귀하는 변동성만 고려하지만 두 번째 자산은 빠르게 회귀하는 변동성과 느리게 회귀하는 변동성만 넣어도 상관없을 것이다. 이러한 경우는 이 논문의 논지와 기법만 이해한다면 누구나 할 수 있는 작업이라 생각되므로 생략하도록 한다.

4. 수치 실험

Multi-asset 옵션은 장외파생상품으로 분류되기 때문에 시장 데이터를 구하기가 힘들다. 따라서 여기서는 여러 모델을 이용하여 앞서 설명한 3가지 분류의 변동성 스큐가 나타나는 바닐라 옵션 가격 데이터를 만든 후, 동등한 상황에서 추가적으로 multi-asset 옵션 가격 데이터를 만들어 실험을 이어나갈 것이다. 우리가 만들려고 하는 변동성 스큐를 다시 한 번 정리하면 다음과 같다.

- 1) 그림[1]과 같은 만기가 짧을 때 강하게 나타나는 변동성 스큐
- 2) 그림[3]과 같은 만기 전체에 걸쳐 일정하게 나타나는 변동성 스큐
- 3) 그림[2]와 같은 만기가 짧을 때 강하게 나타나면서, 만기가 길어져도 사라지지 않는 변동성 스큐

첫 번째, 두 번째 변동성 스큐는 아래와 같은 Heston 모델을 이용하여 만들 수 있다.

$$\begin{aligned} dX_t &= \mu X_t dt + \sqrt{Y_t} X_t dW_t^X \\ dY_t &= \kappa(\theta - Y_t)dt + \sigma \sqrt{Y_t} dW_t^Y \\ dW_t^X dW_t^Y &= \rho dt \end{aligned}$$

여기서 κ 를 크게 두면 첫 번째 변동성 스큐가, κ 를 작게 두면 두 번째 변동성 스큐가 만들어진다. 세 번째 변동성 스큐는 아래와 같은 double Heston 모델을 이용해 만들 수 있다.

$$\begin{aligned} dX_t &= \mu X_t dt + \sqrt{Y_t} X_t dW_t^X \\ dY_t &= \kappa^Y(Z_t - Y_t)dt + \sigma^Y \sqrt{Y_t} dW_t^Y, \quad dZ_t = \kappa^Z(\theta - Z_t)dt + \sigma^Z \sqrt{Z_t} dW_t^Z \\ dW_t^X dW_t^Y &= \rho^{XY} dt, \quad dW_t^X dW_t^Z = \rho^{XZ} dt, \quad dW_t^Y dW_t^Z = \rho^{YZ} dt \end{aligned}$$

이 모델은 Heston 모델을 확장한 경우로 이 모델에 대한 구체적인 정보는 Gatheral(2008)을 참고하라. 여기서 κ^Y 를 크게 두고 κ^Z 를 작게 잡으면 세 번째 변동성 스큐가 만들어진다.

| | 첫 번째 기초자산 | 두 번째 기초자산 |
|----------------------------------|---|--|
| 첫 번째 skew | $y = 0.09, \kappa = 100, \theta = 0.09$ $\sigma = 1, \rho = -0.6$ | $y = 0.16, \kappa = 50, \theta = 0.16$ $\sigma = 0.8, \rho = -0.8$ |
| 두 번째 skew | $y = 0.09, \kappa = 0.01, \theta = 0.09$ $\sigma = 0.1, \rho = -0.3$ | $y = 0.16, \kappa = 0.02, \theta = 0.16$ $\sigma = 0.15, \rho = -0.2$ |
| 세 번째 skew ($\rho^{YZ} = 0$) | $y = 0.09, z = 0.09, \kappa^Y = 50,$ $\kappa^Z = 0.01, \sigma^Y = 1, \sigma^Z = 0.2,$ $\rho^{XY} = -0.8, \rho^{XZ} = -0.3, \theta = 0.09$ | $y = 0.25, z = 0.25, \kappa^Y = 100,$ $\kappa^Z = 0.02, \sigma^Y = 1.5, \sigma^Z = 0.1,$ $\rho^{XY} = -0.6, \rho^{XZ} = -0.2, \theta = 0.25$ |

위는 변동성 스쿠를 만드는데 이용된 모델들의 구체적인 모수들이다. 자산 간의 상관계수 ρ_X 는 모든 상황에서 0.5로 두었다.

시장 데이터를 만들었으면 데이터로부터 우리가 만든 모델의 모수를 추정해야 한다. 여기서 우리가 비교 분석할 모델은 다음과 같은 6개의 모델들이다.

- 1) BS 모델 (블랙-숄즈 모델)
- 2) Y1 모델 (Y_t) = Fouque 모델
- 3) Y2 모델 (Y_t^1, Y_t^2)
- 4) Z2 모델 (Z_t^1, Z_t^2)
- 5) Y1Z2 모델 (Y_t, Z_t^1, Z_t^2)
- 6) Y2Z2 모델 ($Y_t^1, Y_t^2, Z_t^1, Z_t^2$)

각 모델의 모수는 estimation과 calibration을 혼합한 방식으로 얻어진다. 먼저 Fouque(2003)가 제시한 방법을 이용해 바닐라 옵션 데이터에서 얻을 수 있는 모수들($\bar{\sigma}, V_0, V_1, V_3$)을 estimation하고, 이후 multi-asset 옵션 데이터로부터 나머지 모수들(ρ_X, V_4)을 calibration한다. 이와 같은 방식을 선택한 이유는 바닐라 옵션의 유동성이 풍부하기 때문에 가능한 한 많은 모수를 이 데이터를 이용해서 추론하길 원해서이다. 또한 이 때 사용되는 multi-asset 옵션은 rainbow 옵션의 일종인 max-put 옵션인데, 이 옵션은 블랙-숄즈 모델에서의 평가 공식이 알려져 있기 때문에 수치 실험에 자주 이용된다. 앞에서 언급하지는 않았지만, 유러피안 옵션의 평가 공식이 블랙-숄즈 모델에서 알려져 있다면, 우리가 제시한 모델들의 평가 공식도 쉽게 유도될 수 있다. 그 결과 우리가 제시한 모든 모델에서 max-put 옵션의 평가 공식이 존재하게 되어 용이하게 실험을 진행할 수 있게 된다. 이에 대한 자세한 설명은 부록을 참고하길 바란다. 다음은 max-put 옵션의 payoff, P_T 를 나타낸 것이다.

$$W_t = \max(X_t^1, X_t^2) \text{ 일 때, } P_T = \max(K - W_T, 0)$$

실제 시장에서는 multi-asset 옵션의 유동성이 때때로 떨어질 수도 있기 때문에 자산들 간의 상관관계와 관련한 모수를 알아내기가 곤란한 경우가 생길 수 있다. 이는 지금 단계에서는 해결하기 힘든 문제로 이를 해결하기 위한 후속 연구가 필요하다.

(1) 만기가 짧을 때 변동성 스쿠가 강하게 나타나는 경우

이와 같은 상황은 시장에 단기 충격이 발생할 때 종종 일어난다. 이 경우는 시장 참여자들이 어떤 충격으로 인해 단기간의 하락 국면이 발생할 수는 있지만 장기간에 걸친 영향은 미미하다고 생각할 때 나타난다. 따라서 만기가 짧은 옵션에 내재된 확률 분포는 정규분포보다 왼쪽으로 치우친 모양이 되지만, 만기가 긴 옵션에 내재된 확률분포는 정규분포와 크게 다르지 않게 된다. 이러한 변동성 스쿠가 나타났을 때는 빠르게 회귀하는 변동성만을 고려하는 것이 가장 알맞을 것이다. 느리게 회귀하는 변동성도 함께 고려하는 방안이 있지만 이는 불필요하게 추정 오차만 키우는 일이 될 수 있다.

우선 바닐라 옵션 데이터에 피팅 된 결과를 보도록 하자. 그림[4]는 행사가와 만기에 따른 상대 오차를 모델 별로 분류하여 그린 것이다. 자산이 다르더라도 결과는 비슷하기 때문에, 한 눈에 보기에 좋도록 자산 별로 나오는 에러를 평균하여 하나로 정리하였다. y2(y1) 모델이나 y2z2(y1z1) 모델과는 달리 BS 모델과 z2 모델은 만기가 짧을 때 나오는 skew를 반영하는데 어려움을 겪고 있다.

아래 그림[5]는 multi-asset 옵션 데이터에 피팅 했을 때 나타나는 에러를 같은 방식으로 그린 것이다. 어떤 모델이 single-asset 옵션 데이터에 피팅 했을 때 좋은 결과가 나타난다면, 그 모델이 두 자산으로 이루어진 확률변수 쌍 (X_t^1, X_t^2) 의 marginal density를 잘 반영한다는 걸 의미한다. 이에 반해 어떤 모델

이 multi-asset 옵션 데이터에 피팅했을 때 좋은 결과가 나타난다면, 그 모델은 joint density 자체를 잘 반영한다는 것을 뜻한다. 이 논문의 목적이 multi-asset 옵션 평가라는 것을 생각한다면 multi-asset 옵션 데이터 피팅 능력이 더 중요하다고 볼 수 있지만, 바닐라 옵션 가격과 일관되게 multi-asset 옵션을 평가 하려면 single-asset 옵션 데이터 피팅 능력 또한 무시할 수는 없다. 아래 그림은 두 개의 결론으로 요약할 수 있다. 첫 번째로, single-asset 옵션 데이터에 피팅이 잘 되는 모델이 대체적으로 multi-asset 옵션 데이터에도 피팅이 잘 된다. 즉, marginal density를 잘 반영하는 모델이 대체로 joint density 또한 잘 반영한다. 두 번째로, Y_t (빠르게 회귀하는 변동성)를 하나만 둔 모형은 single-asset 옵션 데이터 피팅 능력에 비해 multi-asset 옵션 데이터 피팅 능력이 떨어진다. 이는 앞서 예상한대로 Y_t 가 하나만 있는 모형은 두 자산 간의 상관성을 잘 반영하지 못 한다는 것을 의미한다.

(2) 만기 전체에 걸쳐 일정하게 변동성 스큐가 나타나는 경우

이와 같은 상황은 시장에 장기 충격이 발생할 때 종종 일어난다. 이런 경우 시장참여자들은 발생한 충격이 한동안 지속되어 하락국면이 좀처럼 해소되지 않을 것으로 생각한다. 이러한 변동성 스큐가 나타났을 때는 느리게 회귀하는 변동성만을 고려하는 것이 가장 적합할 것이다. 그림[6]과 그림[7]은 실험 결과를 나타낸 것으로 예상에 부합하는 방향으로 얻어진다. 결과에 대한 해석은 이전과 동일하기 때문에 생략한다.

(3) 만기가 짧을 때 강하게 나타나면서, 만기가 길어져도 사라지지 않는 변동성 스큐가 나타나는 경우

이전에 언급한 상황들이 섞여있는 경우로, 시장에 단기 충격과 장기 충격이 동시에 발생하는 경우에 나타난다. 이런 경우 빠르게 회귀하는 변동성과 느리게 회귀하는 변동성을 고려하는 것이 가장 적합할 것이다. 그림[8]과 그림[9]는 실험 결과를 나타낸 것으로, 이 또한 예측했던 것과 일치하는 방향으로 얻어진다. 이전과 마찬가지로 결과에 대한 해석은 생략하도록 한다.

언어진 결과들로 볼 때, Fouque 모델(y1)은 두 번째와 세 번째 변동성 스큐를 표현하는데 좋지 않은 성과를 보이고 있다. 이는 당연한 것으로, 앞서 말했듯이 Fouque 모델은 전반적으로 기울어진 변동성 스큐를 잡아내지 못 한다. 우리 논문에서는 빠르게 회귀하는 변동성 외에도 느리게 회귀하는 변동성을 추가적으로 고려함으로써 두 번째, 세 번째 모양의 변동성 스큐까지도 적절히 반영하고 있다. 아래는 지금까지 실험한 결과를 정리한 표이다. 여기서 각 에러는 다음처럼 정의된 일종의 상대 L2 error이다.

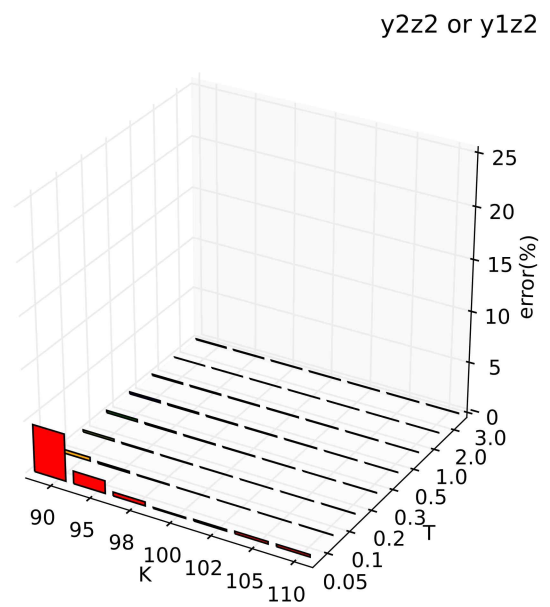
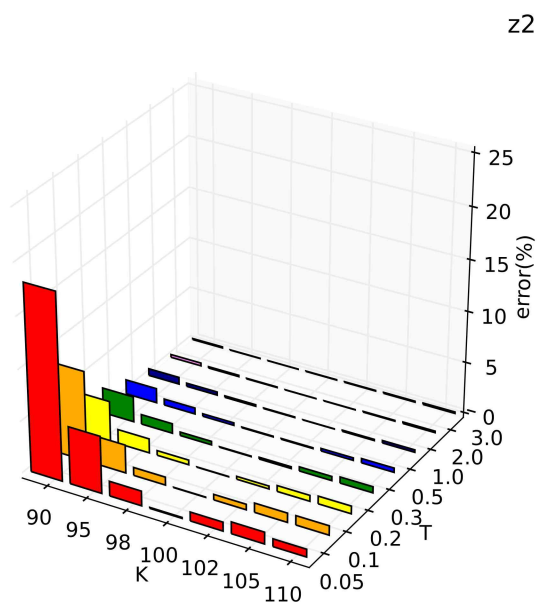
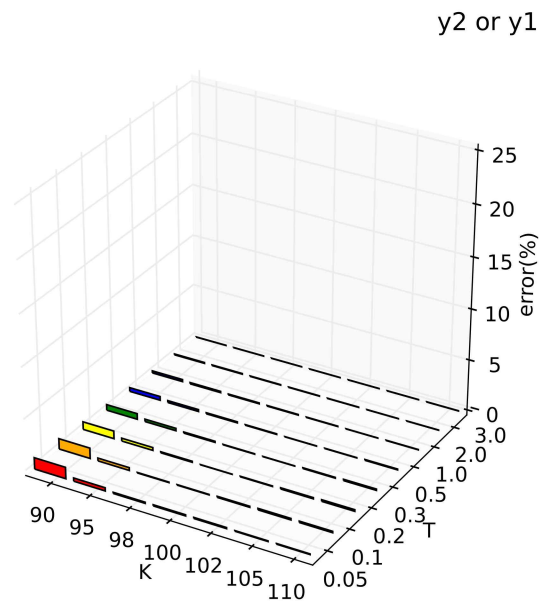
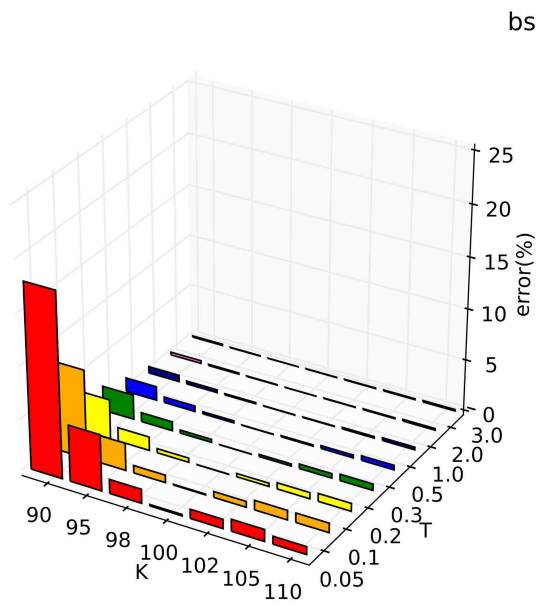
$$E = \frac{1}{\sqrt{mn}} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n e(T_i, K_j) \text{ 여기서 } e(T_i, K_j): \text{ 만기 } T_i, \text{ 행사가 } K_j \text{ 시점의 피팅 에러}$$

| | 스큐 유형 1 | 스큐 유형 2 | 스큐 유형 3 |
|------------------|---------|---------|---------|
| BS | 2.92% | 1.21% | 5.88% |
| Y1(Fouque) or Y2 | 0.27% | 0.94% | 1.86% |
| Z2 | 2.95% | 0.21% | 4.13% |
| Y1Z2 or Y2Z2 | 0.66% | 0.25% | 0.39% |

표[1] 각 변동성 스큐 하에서 single-asset 옵션 피팅 에러

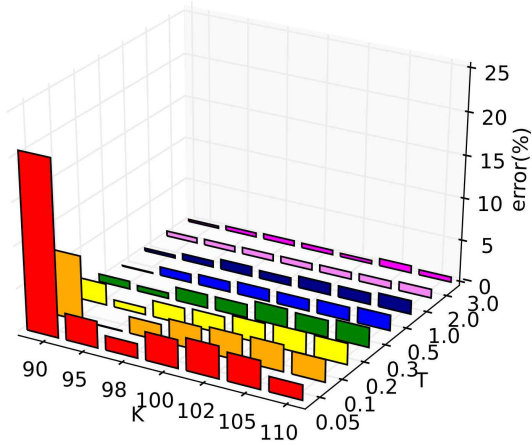
| | 스큐 유형 1 | 스큐 유형 2 | 스큐 유형 3 |
|------------|---------|---------|---------|
| BS | 3.45% | 2.85% | 7.64% |
| Y1(Fouque) | 1.73% | 2.39% | 3.31% |
| Y2 | 0.32% | 2.14% | 3.26% |
| Z2 | 3.46% | 0.61% | 4.60% |
| Y1Z2 | 2.55% | 0.79% | 1.90% |
| Y2Z2 | 0.33% | 0.62% | 0.60% |

표[2] 각 변동성 스큐 하에서 multi-asset 옵션 피팅 에러

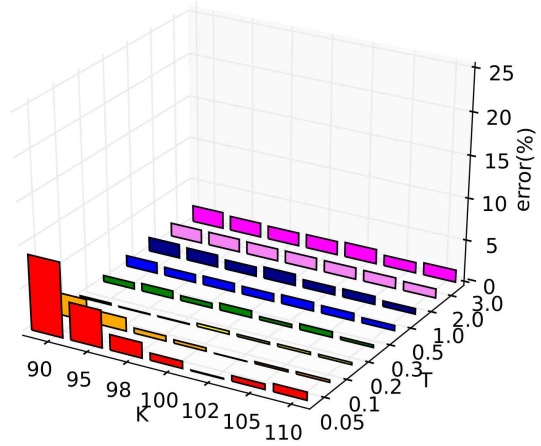


그림[4] 첫 번째 변동성 스쿠 하에서, 두 single-asset 옵션(바닐라 옵션) 평균 피팅 에러

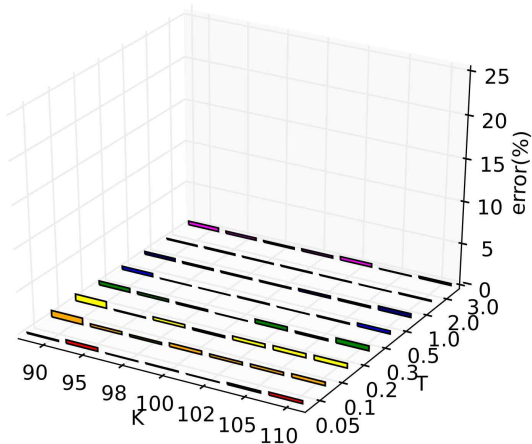
bs



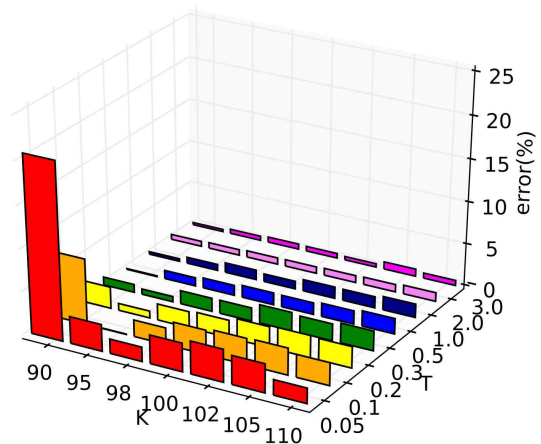
y1



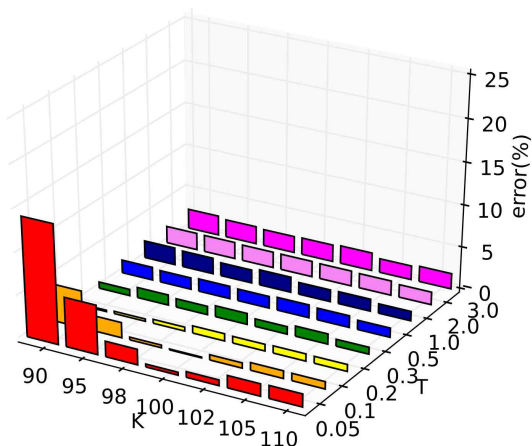
y2



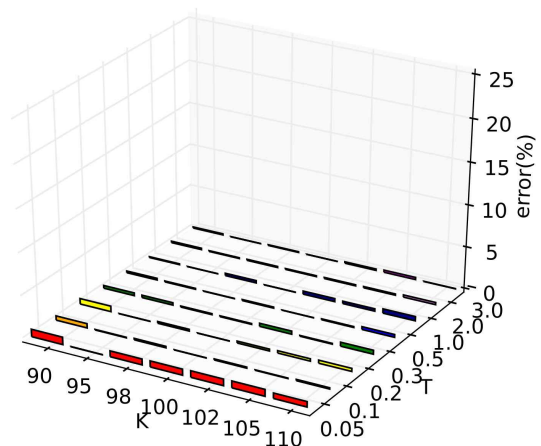
z2



y1z2

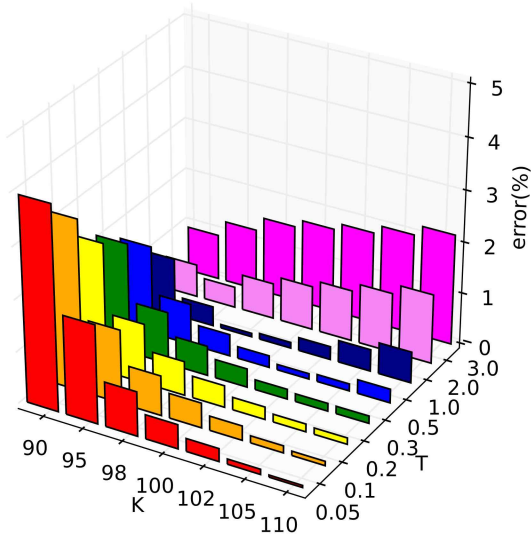


y2z2

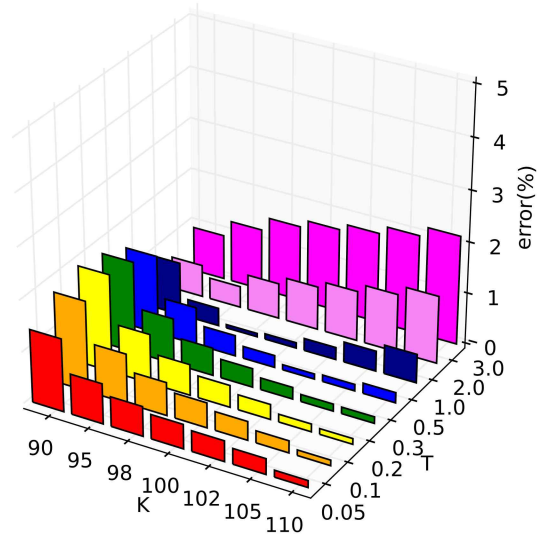


그림[5] 첫 번째 변동성 스쿠 하에서, multi-asset 옵션(max-put 옵션) 피팅 에러

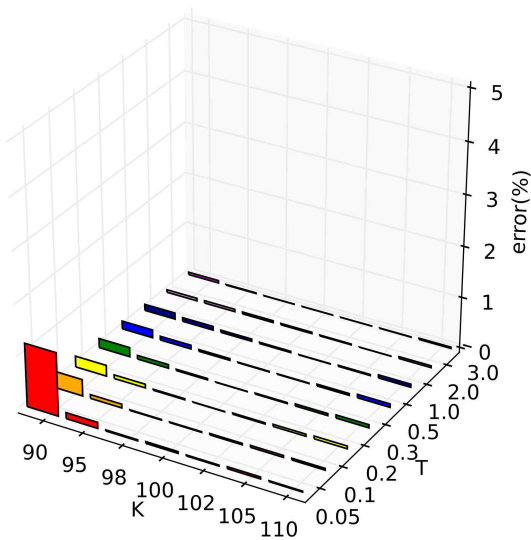
bs



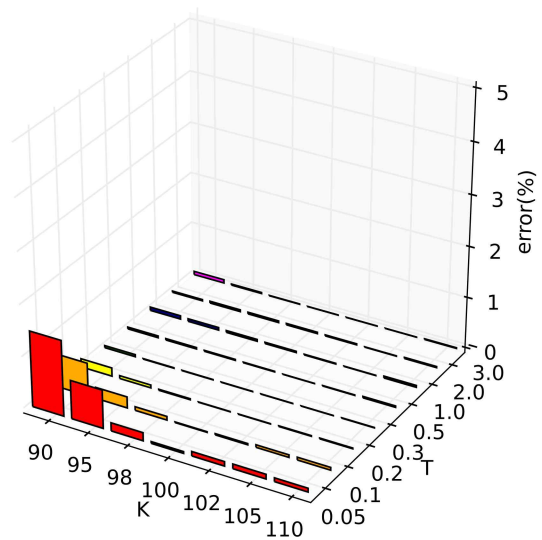
y2 or y1



z2

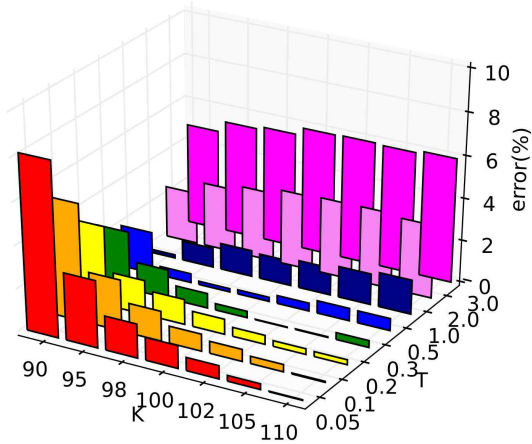


y2z2 or y1z2

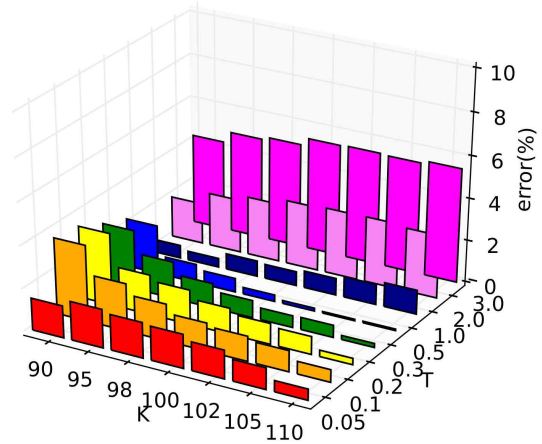


그림[6] 두 번째 변동성 스쿠 하에서, 두 single-asset 옵션(바닐라 옵션) 평균 피팅 에러

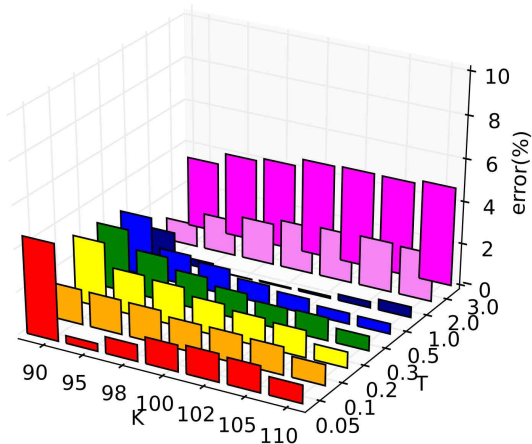
bs



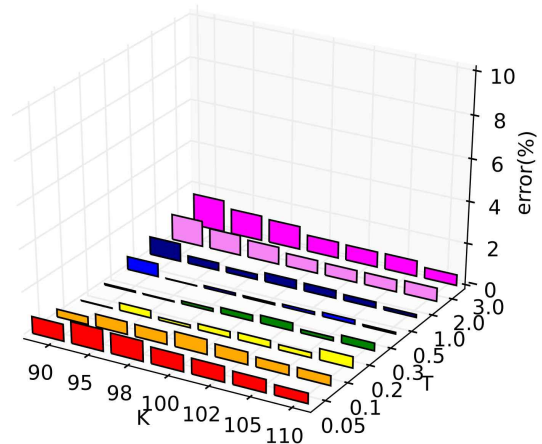
y1



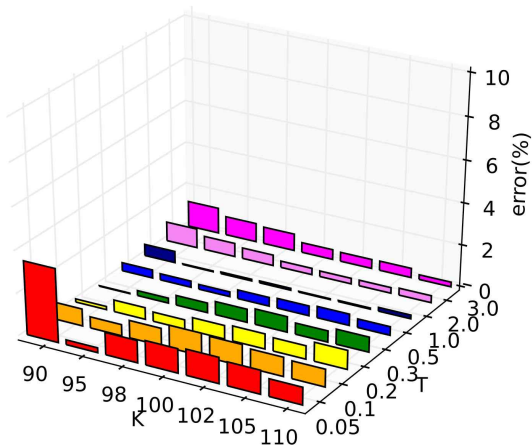
y2



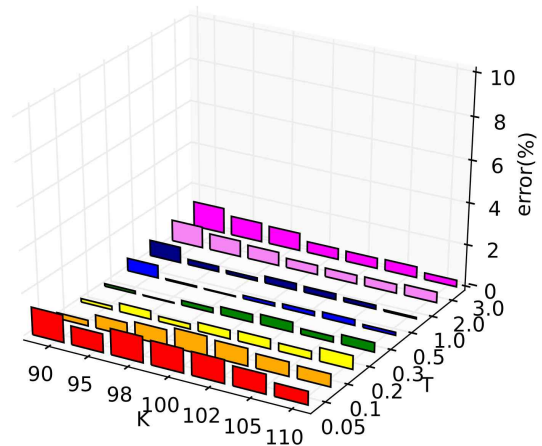
z2



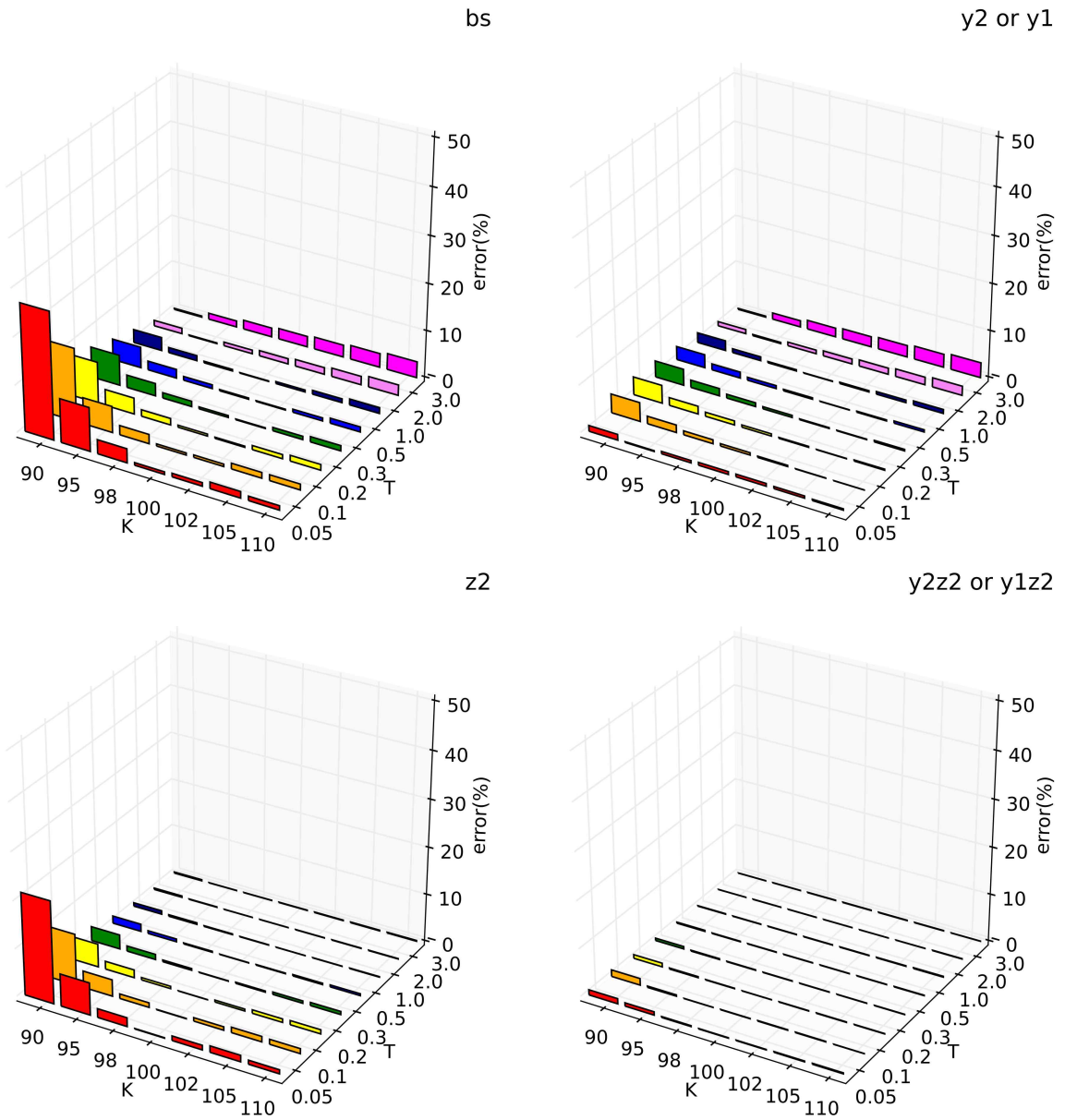
y1z2



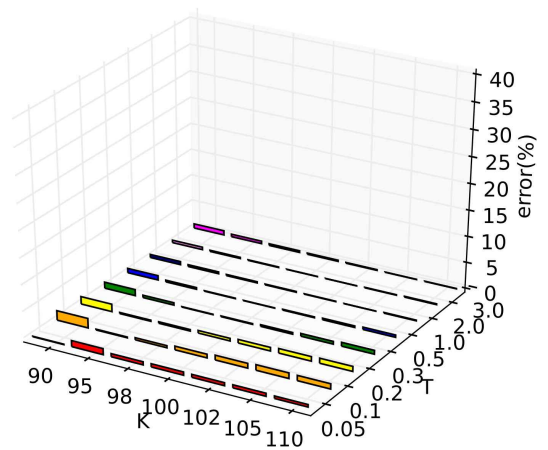
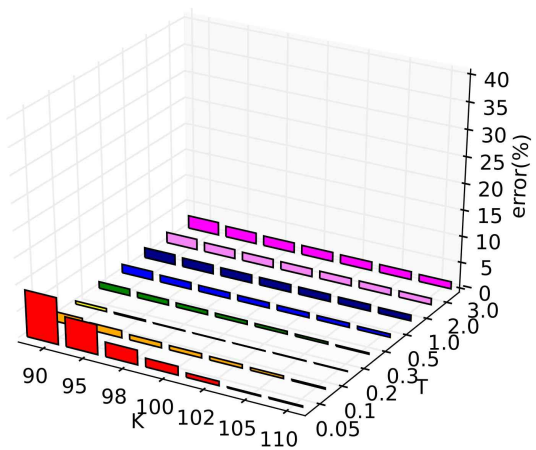
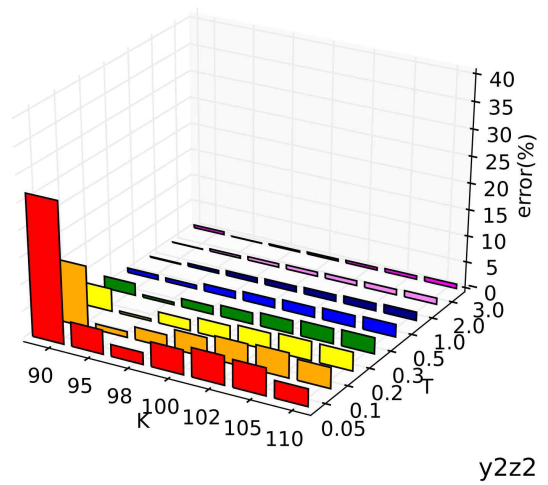
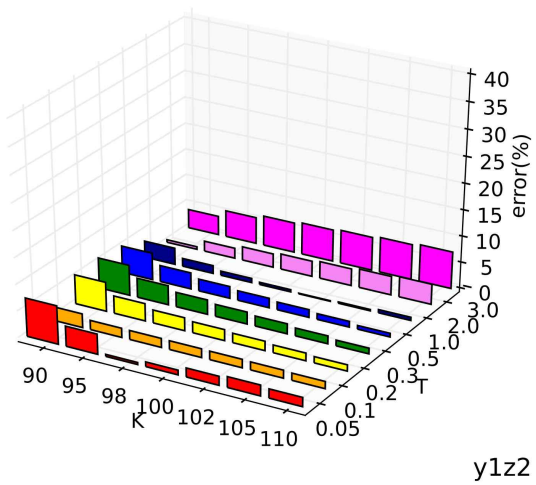
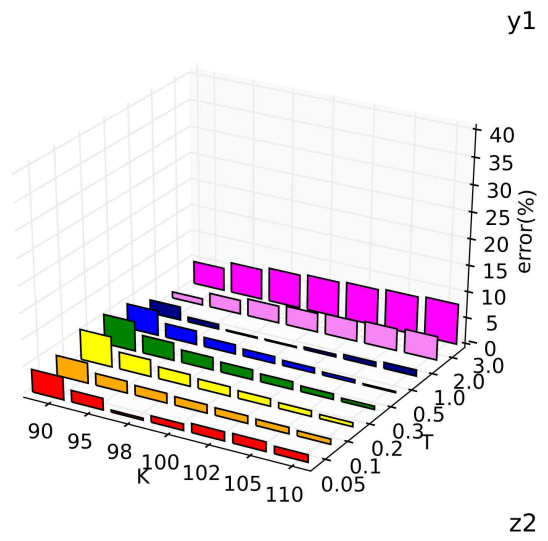
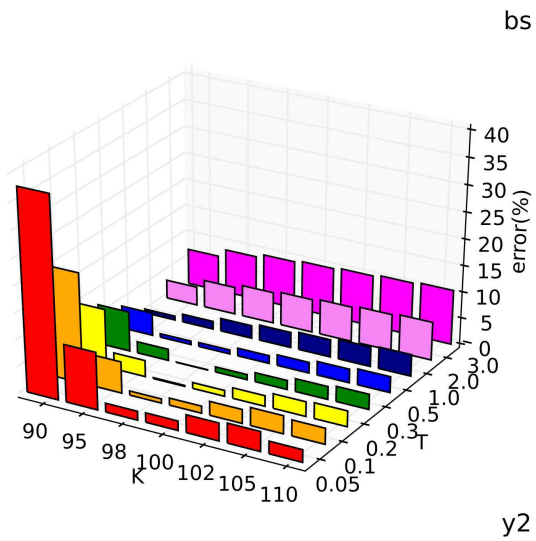
y2z2



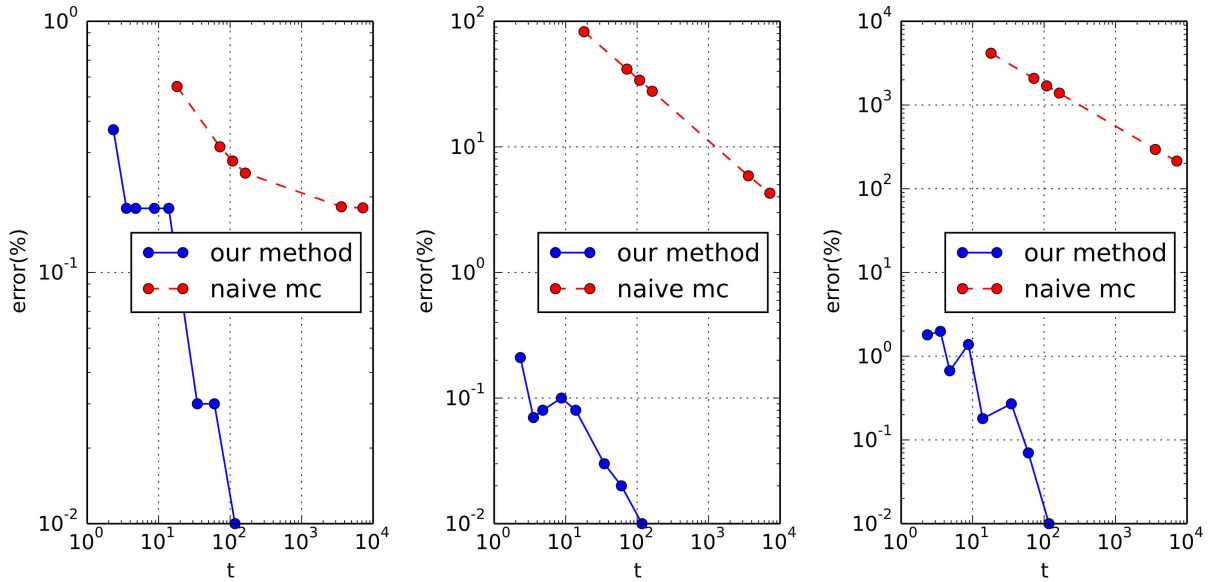
그림[7] 두 번째 변동성 스쿼 하에서, multi-asset 옵션(max-put 옵션) 데이터 피팅 에러



그림[8] 세 번째 변동성 스쿼 하에서, 두 single-asset 옵션(바닐라 옵션) 평균 피팅 에러



그림[9] 세 번째 변동성 스쿼 하에서, multi-asset 옵션(max-put 옵션) 데이터 피팅 에러



그림[10] 우리 논문의 방법론과 몬테카를로 시뮬레이션의 (왼쪽부터) 가격, 델타, 감마의 수렴 속도

단순하게 확장된 확률변동성 모델로 multi-asset 옵션을 평가할 때는 몬테카를로 시뮬레이션이 많이 사용된다. 하지만 잘 알려진 것처럼 몬테카를로 시뮬레이션으로 그릭스를 구하는 것은 매우 힘들다. 지금부터는 우리가 제안한 방법론과 기존 몬테카를로 시뮬레이션의 효율성을 비교 분석할 것이다. 그림[10]은 몬테카를로 시뮬레이션과 우리 논문의 방법론을 이용하여 max-put 옵션($K=100$, $T=0.5$)의 가격과 그릭스를 각각 구한 후 비교한 것이다. 여기서 몬테카를로 시뮬레이션은 double Heston 모델에서의 값들을, 우리의 방법론은 Y2Z2 모델에서의 값들을 나타낸다. 우리는 PDE를 풀기 위해 금융 분야에서 널리 사용되는 FDM 대신 자연과학 분야에서 널리 이용되는 FEM를 적용하였다. 이는 FDM보다 FEM이 그릭스의 수렴성에 대한 이론적 기반이 더 잘 갖춰져 있다는 장점이 있기 때문이다. 그리고 시장을 double Heston 모델로 만들고 Y2Z2 모델을 이에 맞춰 피팅한 것이기 때문에, double Heston 모델의 값은 참값으로 수렴하지만 Y2Z2 모델에서의 값은 추정값으로 수렴하게 된다. 하지만 이 실험이 수렴 속도를 테스트하는 데 목적을 두기 때문에, 각 모델의 값이 어디로 수렴하는가는 그리 중요한 문제가 아니다. 또한 코딩을 하는 사람의 능력이나 사용된 알고리즘에 따라 결과 값이 다소 달라질 수 있다. 하지만 어디까지나 다소 차이가 난다는 것뿐이지 실험 자체가 전달하는 메시지 자체가 바뀔 정도는 아니다.

계산 속도가 빠르다는 말은 ‘같은 시간을 들였을 때 더 적은 에러가 보장된다’는 것으로 받아들일 수 있다. 이를 표현하기 위해 그래프의 x축은 시간, y축은 (상대)에러로 잡았다. 방법에 상관없이 감마 데이터의 수렴 속도가 제일 느리다는 것을 자세히 보길 바란다. hedging을 위해 가격, 델타, 감마를 한꺼번에 알아야 하는 상황이라면, 옵션을 평가할 때 계산 속도를 좌우하는 것은 결국 감마의 수렴 속도이다. 하지만 몬테카를로 시뮬레이션에서 감마가 수렴하는 속도는 매우 느리다. 코딩 능력과 하드웨어의 연산 능력에 따라 달라지겠지만, 본 논문의 테스트에서는 한 시간이 지나도 감마의 에러가 100% 미만으로 떨어지지 않았다. 이에 반해 우리 방법론을 사용한 경우, 가격, 델타, 감마의 에러가 15초 안에 모두 1% 미만으로 떨어지고, 1분 정도가 지나면 0.1% 이하로 감소한다. 여기서 사용된 FEM은 단순한 FEM이 아니라 adaptive method가 적용된 adaptive FEM이다. 매우 간단하게 이야기하면, adaptive method란 에러가 큰 부분을 파악한 후 그 부분을 더 잘게 잘라 집중적으로 계산하는 방법론이다. 이에 대해 더 알고 싶다면 Yves(2005)를 참고하라.

PDE는 자연과학 및 공학에서 활발히 연구되는 분야이다. 이는 PDE를 효율적으로 풀기 위한 다양한 방법들이 이미 개발되어 활용하기 편리하다는 것을 의미한다. 만약 더욱 강력한 계산 능력이 필요하다면,

sparse grid 등 더 복잡한 방법들을 적용할 수도 있다. 이런 접근들이 가능해진 이유는 우리 모델이 PDE의 차원을 줄일 수 있게끔 만들어졌기 때문이다. 거듭 강조하지만, PDE의 차원이 크다면 큰 노력을 지불하지 않는 이상 PDE에 기반을 둔 방법들을 쓰기 힘들다. 아래는 그래프의 결과를 표로 정리한 것이다.

| 소요된 시간(s) | price error | delta error | gamma error |
|-----------|-------------|-------------|-------------|
| 18.072 | 0.55% | 82.61% | 4154.56% |
| 71.972 | 0.32% | 41.59% | 2083.57% |
| 108.388 | 0.28% | 33.93% | 1694.45% |
| 163.14 | 0.25% | 27.72% | 1386.84% |
| 3600 | 0.18% | 5.88% | 294.40% |
| 7200 | 0.18% | 4.28% | 214.16% |

표[3] 몬테카를로 시뮬레이션을 사용한 경우의 가격과 그릭스의 수렴 속도

| 소요된 시간(s) | price error | delta error | gamma error |
|-----------|-------------|-------------|-------------|
| 2.326 | 0.37% | 0.21% | 1.80% |
| 3.542 | 0.18% | 0.07% | 1.98% |
| 4.781 | 0.18% | 0.08% | 0.67% |
| 8.731 | 0.18% | 0.10% | 1.38% |
| 13.847 | 0.18% | 0.08% | 0.18% |
| 34.765 | 0.03% | 0.03% | 0.27% |
| 60.207 | 0.03% | 0.02% | 0.07% |
| 111.006 | 0.01% | 0.01% | 0.01% |

표[4] 우리 방법론을 사용한 경우의 가격과 그릭스의 수렴 속도

5. 결론

기초 자산의 개수가 늘어나고 상품 구조가 복잡해지면서 수치적인 알고리즘으로 상품을 평가하는 것이 일반화되어가고 있다. 몬테카를로 시뮬레이션은 기초 자산의 개수가 증가하더라도 계산 비용이 합리적인 수준으로 늘어나는 특성을 가지고 있다. 그래서 기초 자산이 많은 상황에서는 대개 몬테카를로가 PDE를 푸는 방법보다 선호되지만, 매우 불안정하게 그릭스를 구한다는 단점을 가지고 있다. 따라서 헷징을 위해 그릭스까지 알아야하는 상황이라면, PDE를 더 빠르게 풀 수 있는 알고리즘을 개발하는 편이 나을 수도 있다. 실제로 금융공학의 많은 연구에서 수치해석 기법을 이용하여 PDE를 풀 때 계산 비용을 감소하려는 노력들이 있었다. 하지만 단순히 확장된 확률변동성 모델에서 나오는 PDE의 차원은 기초자산 개수의 2배에 이른다. 이렇게 차원이 높은 PDE는 앞선 여러 연구들을 적용하더라도 풀기가 매우 힘들다. 이런 상황에서 Fouque(2012)의 연구가 해결책이 될 수 있다. Fouque는 asymptotic method를 multi-asset 옵션 평가에 적용하는 방식으로, 차원이 높은 PDE를 차원이 낮은 여러 개의 PDE로 나누는 데 성공하였다. 이렇게 되면 확률변동성을 고려하면서도 multi-asset 옵션 평가에 PDE를 사용하는 것이 가능해진다.

하지만 Fouque의 연구는 몇 가지 아쉬운 점을 가지고 있다. 우선 자산의 개수와 상관없이 확률변동성 과정을 하나만 두었기 때문에, 자산의 변동성끼리 완벽히 상관되어 있는 문제가 발생한다. 또한 확률변동성이 매우 빠르게 수렴한다는 가정을 두었기 때문에, 표현할 수 있는 변동성 스큐의 종류가 제한된다는 단점을 가지고 있다. 우리는 자산마다 확률변동성을 두고, 느리게 수렴하는 확률변동성을 추가적으로 고려하는 방식으로 Fouque의 연구가 가지고 있는 한계점을 해결하였다. 그리고 다양한 모양의 변동성 스큐가 나타나는 시장을 만든 후, 우리가 이끌어낸 모형을 기존의 Fouque 모형과 비교하였다. 그 결과 기대했던 대로, Fouque 모델에 비해 더욱 다양한 변동성 스큐를 반영할 수 있고, 자산의 변동성끼리 correlation을 유연하게 모델링할 수 있다는 결과를 얻었다. 그리고 이 방법론을 multi-asset 옵션 평가에 적용한 결과, 이 방법론이 몬테카를로보다 매우 빠른 속도로 그릭스를 구해내는 것 또한 확인할 수 있었다.

참고문헌

- [1] Lötstedt, Per, et al. "Space-time adaptive finite difference method for European multi-asset options." *Computers & Mathematics with Applications* 53.8 (2007): 1159-1180.
- [2] Persson, Jonas, and Lina von Persson. "Pricing European multi-asset options using a space-time adaptive FD-method." *Computing and Visualization in Science* 10.4 (2007): 173-183.
- [3] Heinecke, Alexander, Stefanie Schraufstetter, and Hans-Joachim Bungartz. "A highly parallel Black-Scholes solver based on adaptive sparse grids." *International Journal of Computer Mathematics* 89.9 (2012): 1212-1238.
- [4] Gaikwad, Abhijeet, and Ioane Muni Toke. "GPU based sparse grid technique for solving multidimensional options pricing PDEs." *Proceedings of the 2nd Workshop on High Performance Computational Finance*. ACM, 2009.
- [5] Dimitroff, Georgi, Stefan Lorenz, and Alexander Szimayer. "A parsimonious multi-asset Heston model: Calibration and derivative pricing." *International Journal of Theoretical and Applied Finance* 14.08 (2011): 1299-1333.
- [6] Muhle-Karbe, Johannes, Oliver Pfaffel, and Robert Stelzer. "Option pricing in multivariate stochastic volatility models of OU type." *SIAM Journal on Financial Mathematics* 3.1 (2012): 66-94.
- [7] Papanicolaou, George, et al. "Singular perturbations in option pricing." *SIAM Journal on Applied Mathematics* 63.5 (2003): 1648-1665.
- [8] Elices, Alberto, and Jean-Pierre Fouque. "Perturbed Gaussian copula: introducing the skew effect in co-dependence." *Risk* 25.1 (2012): 94.
- [9] Achdou, Yves, and Olivier Pironneau. *Computational methods for option pricing*. Vol. 30. Siam, 2005.
- [10] Fouque, Jean-Pierre, George Papanicolaou, and K. Ronnie Sircar. *Derivatives in financial markets with stochastic volatility*. Cambridge University Press, 2000.

부록. Y2Z2 모델에서의 asymptotic method 적용

본문에서는 real measure에서 자산별로 빠르게/느리게 수렴하는 변동성 요소 Y_t 와 Z_t 를 독립적으로 가지고 있는 확률미분방정식(SDE)를 소개하였다. 여기에 Girsanov 정리를 적용하면 각 브라운 운동 항이 다음과 같이 바뀌게 된다.

$$dW_t^{X,i} = dW_t^{*X,i} + \frac{\mu_i - r}{f_i(Y_t^i)h_i(Z_t^i)} dt, \quad dW_t^{Y,i} = dW_t^{*Y,i} + \gamma_t^{Y,i} dt, \quad dW_t^{Z,i} = dW_t^{*Z,i} + \gamma_t^{Z,i} dt$$

κ^Y 가 매우 크고 κ_Z 가 매우 작다는 것을 수학적으로 표현하기 위하여, small parameter ϵ , δ 를 이용해서 각각을 $1/\epsilon$ 과 δ 으로 놓자. 모든 small parameter ϵ , δ 는 모두 비슷한 order라고 가정하겠다. 그러면 risk-neutral measure 하에서 다음과 같은 SDE를 얻을 수 있다. 간단한 표기를 위해 정리 적용 후 Brownian motion W^* 를 W 로 고쳐 적었다.

$$\begin{aligned} dX_t^1 &= rX_t^1 dt + f_1(Y_t^1)h_1(Z_t^1)X_t^1 dW_t^{X,1}, \quad dX_t^2 = rX_t^2 dt + f_2(Y_t^2)h_2(Z_t^2)X_t^2 dW_t^{X,2} \\ dY_t^1 &= \left(\frac{1}{\epsilon_1} \alpha_1(Y_t^1) - \frac{1}{\sqrt{\epsilon_1}} \beta_1(Y_t^1) \Lambda_Y^1(Y_t^1, Z_t^1) \right) dt + \frac{1}{\sqrt{\epsilon_1}} \beta_1(Y_t^1) dW_t^{Y,1} \\ dY_t^2 &= \left(\frac{1}{\epsilon_2} \alpha_2(Y_t^2) - \frac{1}{\sqrt{\epsilon_2}} \beta_2(Y_t^2) \Lambda_Y^2(Y_t^2, Z_t^2) \right) dt + \frac{1}{\sqrt{\epsilon_2}} \beta_2(Y_t^2) dW_t^{Y,2} \\ dZ_t^1 &= \left[\delta_1 c_1(Z_t^1) - \sqrt{\delta_1} g_1(Z_t^1) \Lambda_Z^1(Y_t^1, Z_t^1) \right] dt + \sqrt{\delta_1} g_1(Z_t^1) dW_t^{Z,1} \\ dZ_t^2 &= \left[\delta_2 c_2(Z_t^2) - \sqrt{\delta_2} g_2(Z_t^2) \Lambda_Z^2(Y_t^2, Z_t^2) \right] dt + \sqrt{\delta_2} g_2(Z_t^2) dW_t^{Z,2} \\ dW_t^{X,1} dW_t^{X,2} &= \rho_X dt, \quad dW_t^{Y,1} dW_t^{Y,2} = \rho_Y dt, \quad dW_t^{Z,1} dW_t^{Z,2} = \rho_Z dt \\ dW_t^{X,1} dW_t^{Y,1} &= \rho_{XY}^1 dt, \quad dW_t^{X,2} dW_t^{Y,2} = \rho_{XY}^2 dt \\ dW_t^{X,1} dW_t^{Z,1} &= \rho_{XZ}^1 dt, \quad dW_t^{X,2} dW_t^{Z,2} = \rho_{XZ}^2 dt \\ dW_t^{Y,1} dW_t^{Z,1} &= \rho_{YZ}^1 dt, \quad dW_t^{Y,2} dW_t^{Z,2} = \rho_{YZ}^2 dt \end{aligned}$$

여기서 Λ 는 각 확률 과정에 대한 market price of volatility risk이다. 이 중 fast scale인 Y_t^i 의 market price of risk는 간단한 치환으로 제거가 가능하다. 변동성을 치환한 후에도 치환 전과 결과가 다르지 않으므로(자세한 내용은 Fouque의 책(ref)의 4장 참고) Y_t^i 의 market price of risk Λ_Y^i 를 0으로 두고 전개할 수 있다. 즉 위 SDE에서 Y_t^1 과 Y_t^2 는 다음처럼 바뀌게 된다.

$$dY_t^1 = \frac{1}{\epsilon_1} \alpha_1(Y_t^1) dt + \frac{1}{\sqrt{\epsilon_1}} \beta_1(Y_t^1) dW_t^{Y,1}, \quad dY_t^2 = \frac{1}{\epsilon_2} \alpha_2(Y_t^2) dt + \frac{1}{\sqrt{\epsilon_2}} \beta_2(Y_t^2) dW_t^{Y,2}$$

X_t^1 과 X_t^2 를 기초자산으로 하면서 만기 T 시점의 payoff가 $H(X_T^1, X_T^2)$ 인 파생상품의 가격 P 에 Feynman-Kac 정리를 적용시키면 다음의 PDE를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} P(t, x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2) &= E^Q \left[e^{-r(T-t)} H(x_1, x_2) \mid X_t^i = x_i, Y_t^i = y_i, Z_t^i = z_i \right] \text{ for } i = 1, 2 \text{ 이므로,} \\ P_t + rx_1 P_{x_1} + rx_2 P_{x_2} + \frac{1}{2} (f_1(y_1)h_1(z_1))^2 x_1^2 P_{x_1 x_1} + \rho_X f_1(y_1)h_1(z_1)f_2(y_2)h_2(z_2)x_1 x_2 P_{x_1 x_2} + \frac{1}{2} (f_2(y_2)h_2(z_2))^2 x_2^2 P_{x_2 x_2} \\ &+ \frac{1}{\epsilon_1} \alpha_1(y_1) P_{y_1} + \frac{1}{2\epsilon_1} (\beta_1(y_1))^2 P_{y_1 y_1} + \frac{1}{\sqrt{\epsilon_1 \epsilon_2}} \rho_Y \beta_1(y_1) \beta_2(y_2) P_{y_1 y_2} + \frac{1}{\epsilon_2} \alpha_2(y_2) P_{y_2} + \frac{1}{2\epsilon_2} (\beta_2(y_2))^2 P_{y_2 y_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\sqrt{\epsilon_1}} \rho_{XY}^1 \beta_1(y_1) f_1(y_1) h_1(z_1) x_1 P_{x_1 y_1} + \frac{1}{\sqrt{\epsilon_2}} \rho_{XY}^2 \beta_2(y_2) f_2(y_2) h_2(z_2) x_2 P_{x_2 y_2} \\
& + (\delta_1 c_1(z_1) - \sqrt{\delta_1} g_1(z_1) \Lambda_Z^1(y_1, z_1)) P_{z_1} + (\delta_2 c_2(z_2) - \sqrt{\delta_2} g_2(z_2) \Lambda_Z^2(y_2, z_2)) P_{z_2} \\
& + \frac{1}{2} \delta_1 (g_1(z_1))^2 P_{z_1 z_1} + \rho_Z \sqrt{\delta_1 \delta_2} g_1(z_1) g_2(z_2) P_{z_1 z_2} + \frac{1}{2} \delta_2 (g_2(z_2))^2 P_{z_2 z_2} \\
& + \sqrt{\delta_1} \rho_{XZ}^1 g_1(z_1) f_1(y_1) h_1(z_1) x_1 P_{x_1 z_1} + \sqrt{\delta_2} \rho_{XZ}^2 g_2(z_2) f_2(y_2) h_2(z_2) x_2 P_{x_2 z_2} \\
& + \sqrt{\frac{\delta_1}{\epsilon_1}} \rho_{YZ}^1 \beta_1(y_1) g_1(z_1) P_{y_1 z_1} + \sqrt{\frac{\delta_2}{\epsilon_2}} \rho_{YZ}^2 \beta_2(y_2) g_2(z_2) P_{y_2 z_2} - r P = 0
\end{aligned}$$

적당히 operator를 정의해서 이를 간단히 하면,

$$\begin{aligned}
L^{\delta_1, \delta_2, \epsilon_1, \epsilon_2} P^{\delta_1, \delta_2, \epsilon_1, \epsilon_2} &= 0 \\
P^{\delta_1, \delta_2, \epsilon_1, \epsilon_2}(T, x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2) &= H(x_1, x_2)
\end{aligned}$$

여기서,

$$\begin{aligned}
L^{\delta_1, \delta_2, \epsilon_1, \epsilon_2} &= \frac{1}{\epsilon_1} L_0^1 + \frac{1}{\epsilon_2} L_0^2 + \frac{1}{\sqrt{\epsilon_1}} L_1^1 + \frac{1}{\sqrt{\epsilon_2}} L_1^2 + L_2 + \frac{1}{\sqrt{\epsilon_1 \epsilon_2}} L_3 \\
& + \sqrt{\delta_1} M_{1,0} + \sqrt{\delta_2} M_{0,1} + \delta_1 M_{2,0} + \sqrt{\delta_1 \delta_2} M_{1,1} + \delta_2 M_{0,2} + \sqrt{\frac{\delta_1}{\epsilon_1}} N_1 + \sqrt{\frac{\delta_2}{\epsilon_2}} N_2 \\
L_0^1 &= \alpha_1(y_1) \partial_{y_1} + \frac{1}{2} (\beta_1(y_1))^2 \partial_{y_1 y_1} \\
L_0^2 &= \alpha_2(y_2) \partial_{y_2} + \frac{1}{2} (\beta_2(y_2))^2 \partial_{y_2 y_2} \\
L_1^1 &= \rho_{XY}^1 \beta_1(y_1) f_1(y_1) h_1(z_1) x_1 \partial_{x_1 y_1} \\
L_1^2 &= \rho_{XY}^2 \beta_2(y_2) f_2(y_2) h_2(z_2) x_2 \partial_{x_2 y_2} \\
L_2 &= \partial_t + r x_1 \partial_{x_1} + r x_2 \partial_{x_2} + \frac{1}{2} (f_1(y_1) h_1(z_1))^2 x_1^2 \partial_{x_1 x_1} \\
& + \rho_X f_1(y_1) f_2(y_2) h_1(z_1) h_2(z_2) x_1 x_2 \partial_{x_1 x_2} + \frac{1}{2} (f_2(y_2) h_2(z_2))^2 x_2^2 \partial_{x_2 x_2} - r \cdot \\
L_3 &= \rho_Y \beta_1(y_1) \beta_2(y_2) \partial_{y_1 y_2} \\
M_{1,0} &= -g_1(z_1) \Lambda_Z^1(y_1, z_1) \partial_{z_1} + \rho_{XZ}^1 g_1(z_1) f_1(y_1) h_1(z_1) x_1 \partial_{x_1 z_1} \\
M_{0,1} &= -g_2(z_2) \Lambda_Z^2(y_2, z_2) \partial_{z_2} + \rho_{XZ}^2 g_2(z_2) f_2(y_2) h_2(z_2) x_2 \partial_{x_2 z_2} \\
M_{2,0} &= c_1(z_1) \partial_{z_1} + \frac{1}{2} (g_1(z_1))^2 \partial_{z_1 z_1} \\
M_{1,1} &= \rho_Z g_1(z_1) g_2(z_2) \partial_{z_1 z_2} \\
M_{0,2} &= c_2(z_2) \partial_{z_2} + \frac{1}{2} (g_2(z_2))^2 \partial_{z_2 z_2} \\
N_1 &= \sqrt{\frac{\delta_1}{\epsilon_1}} \rho_{YZ}^1 \beta_1(y_1) g_1(z_1) \partial_{y_1 z_1} \\
N_2 &= \sqrt{\frac{\delta_2}{\epsilon_2}} \rho_{YZ}^2 \beta_2(y_2) g_2(z_2) \partial_{y_2 z_2}
\end{aligned}$$

이제 asymptotic method를 적용하기 위해 먼저 δ_i 에 대하여 P 를 다음과 같이 전개하자.

$$P = P^{\epsilon_1, \epsilon_2, \delta_1, \delta_2} = P_{0,0}^{\epsilon_1, \epsilon_2} + \sqrt{\delta_1} P_{1,0}^{\epsilon_1, \epsilon_2} + \sqrt{\delta_2} P_{0,1}^{\epsilon_1, \epsilon_2} + \delta_1 P_{2,0}^{\epsilon_1, \epsilon_2} + \sqrt{\delta_1 \delta_2} P_{1,1}^{\epsilon_1, \epsilon_2} + \delta_2 P_{0,2}^{\epsilon_1, \epsilon_2} + \dots$$

이를 $L^{\delta_1, \delta_2, \epsilon_1, \epsilon_2} P^{\delta_1, \delta_2, \epsilon_1, \epsilon_2} = 0$ 에 대입하여 δ_i 에 대해 정리하면,

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\epsilon_1} L_0^1 + \frac{1}{\epsilon_2} L_0^2 + \frac{1}{\sqrt{\epsilon_1}} L_1^1 + \frac{1}{\sqrt{\epsilon_2}} L_1^2 + L_2 + \frac{1}{\sqrt{\epsilon_1 \epsilon_2}} L_3 \right) P_{0,0}^{\epsilon_1, \epsilon_2} \\ & + \sqrt{\delta_1} \left\{ \left(\frac{1}{\epsilon_1} L_0^1 + \frac{1}{\epsilon_2} L_0^2 + \frac{1}{\sqrt{\epsilon_1}} L_1^1 + \frac{1}{\sqrt{\epsilon_2}} L_1^2 + L_2 + \frac{1}{\sqrt{\epsilon_1 \epsilon_2}} L_3 \right) P_{1,0}^{\epsilon_1, \epsilon_2} + \left(M_{1,0} + \frac{1}{\sqrt{\epsilon_1}} N_1 \right) P_{0,0}^{\epsilon_1, \epsilon_2} \right\} \\ & + \sqrt{\delta_2} \left\{ \left(\frac{1}{\epsilon_1} L_0^1 + \frac{1}{\epsilon_2} L_0^2 + \frac{1}{\sqrt{\epsilon_1}} L_1^1 + \frac{1}{\sqrt{\epsilon_2}} L_1^2 + L_2 + \frac{1}{\sqrt{\epsilon_1 \epsilon_2}} L_3 \right) P_{0,1}^{\epsilon_1, \epsilon_2} + \left(M_{0,1} + \frac{1}{\sqrt{\epsilon_2}} N_2 \right) P_{0,0}^{\epsilon_1, \epsilon_2} \right\} + \dots = 0 \end{aligned}$$

따라서 $P_{0,0}^{\epsilon_1, \epsilon_2}$, $P_{1,0}^{\epsilon_1, \epsilon_2}$, $P_{0,1}^{\epsilon_1, \epsilon_2}$ 은 다음 PDE의 해가 된다.

$$\left(\frac{1}{\epsilon_1} L_0^1 + \frac{1}{\epsilon_2} L_0^2 + \frac{1}{\sqrt{\epsilon_1}} L_1^1 + \frac{1}{\sqrt{\epsilon_2}} L_1^2 + L_2 + \frac{1}{\sqrt{\epsilon_1 \epsilon_2}} L_3 \right) P_{0,0}^{\epsilon_1, \epsilon_2} = 0 \quad \dots (1)$$

$$P_{0,0}^{\epsilon_1, \epsilon_2}(T, x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2) = H(x_1, x_2)$$

$$\left(\frac{1}{\epsilon_1} L_0^1 + \frac{1}{\epsilon_2} L_0^2 + \frac{1}{\sqrt{\epsilon_1}} L_1^1 + \frac{1}{\sqrt{\epsilon_2}} L_1^2 + L_2 + \frac{1}{\sqrt{\epsilon_1 \epsilon_2}} L_3 \right) P_{1,0}^{\epsilon_1, \epsilon_2} + \left(M_{1,0} + \frac{1}{\sqrt{\epsilon_1}} N_1 \right) P_{0,0}^{\epsilon_1, \epsilon_2} = 0 \quad \dots (2)$$

$$P_{1,0}^{\epsilon_1, \epsilon_2}(T, x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2) = 0$$

$$\left(\frac{1}{\epsilon_1} L_0^1 + \frac{1}{\epsilon_2} L_0^2 + \frac{1}{\sqrt{\epsilon_1}} L_1^1 + \frac{1}{\sqrt{\epsilon_2}} L_1^2 + L_2 + \frac{1}{\sqrt{\epsilon_1 \epsilon_2}} L_3 \right) P_{0,1}^{\epsilon_1, \epsilon_2} + \left(M_{0,1} + \frac{1}{\sqrt{\epsilon_2}} N_2 \right) P_{0,0}^{\epsilon_1, \epsilon_2} = 0 \quad \dots (3)$$

$$P_{0,1}^{\epsilon_1, \epsilon_2}(T, x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2) = 0$$

또한 각각의 $P_{i,j}^{\epsilon_1, \epsilon_2}$ 를 ϵ_i 에 대해 다음과 같이 전개하여 대입하면,

$$P_{i,j}^{\epsilon_1, \epsilon_2} = P_{i,j,0,0} + \sqrt{\epsilon_1} P_{i,j,1,0} + \sqrt{\epsilon_2} P_{i,j,0,1} + \epsilon_1 P_{i,j,2,0} + \sqrt{\epsilon_1 \epsilon_2} P_{i,j,1,1} + \epsilon_2 P_{i,j,0,2} + \dots$$

(1)에서 다음의 식 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\epsilon_1} L_0^1 P_{0,0,0,0} + \frac{1}{\epsilon_2} L_0^2 P_{0,0,0,0} + \frac{1}{\sqrt{\epsilon_1}} (L_1^1 P_{0,0,0,0} + L_0^1 P_{0,0,1,0} + L_3 P_{0,0,0,1}) \\ & + \frac{1}{\sqrt{\epsilon_2}} (L_1^2 P_{0,0,0,0} + L_0^2 P_{0,0,0,1} + L_3 P_{0,0,1,0}) \\ & + (L_2 P_{0,0,0,0} + L_1^1 P_{0,0,1,0} + L_1^2 P_{0,0,0,1} + L_0^1 P_{0,0,2,0} + L_0^2 P_{0,0,0,2} + L_3 P_{0,0,1,1}) + \dots = 0 \end{aligned}$$

임의의 ϵ_1 과 ϵ_2 에 대해 위 미분방정식이 성립하려면 각 항이 모두 0이 되어야 한다. 이렇게 얻은 미분방정식들을 차례대로 풀어보자.

$\frac{1}{\epsilon_1}$ order term의 미분방정식 $L_0^1 P_{0,0,0,0} = 0$ 을 풀면 y_1 에 대해 지수함수 꼴로 증가하는 해를 얻기 때

문에 $P_{0,0,0,0}$ 는 y_1 에 대해 독립적이라고 가정하겠다. $\frac{1}{\epsilon_2}$ order term에서도 같은 방법을 적용하면

$P_{0,0,0,0}$ 는 y_2 에 대해서도 독립이라고 설정할 수 있다. 지수가 $-\frac{1}{2}$ 인 $\frac{1}{\sqrt{\epsilon_1}}$, $\frac{1}{\sqrt{\epsilon_2}}$, $\frac{\sqrt{\epsilon_2}}{\epsilon_1}$, $\frac{\sqrt{\epsilon_1}}{\epsilon_2}$ order 항에서는 각각 다음의 방정식들이 얻어진다.

$$\begin{aligned} L_1^1 P_{0,0,0,0} + L_0^1 P_{0,0,1,0} + L_3 P_{0,0,0,1} &= 0 \\ L_1^2 P_{0,0,0,0} + L_0^2 P_{0,0,0,1} + L_3 P_{0,0,1,0} &= 0 \\ L_0^1 P_{0,0,0,1} &= 0 \\ L_0^2 P_{0,0,1,0} &= 0 \end{aligned}$$

위 방법을 그대로 적용하면, $P_{0,0,0,1}$ 과 $P_{0,0,1,0}$ 역시 y_i 들에 대해 독립이라는 것을 알 수 있다. 다음 order 인, 지수가 0인 항들을 정리하면 아래의 미분방정식을 얻을 수 있다.

$$L_0^1 P_{0,0,2,0} + L_0^2 P_{0,0,0,2} + L_2 P_{0,0,0,0} = 0 \cdots (4)$$

이 미분방정식은 반복된 Poisson equation으로 볼 수 있고, 해를 갖기 위해 필요한 centering condition 을 두 번 적용해주면,

$$\langle\langle L_2 \rangle\rangle P_{0,0,0,0} = \iint_{\mathbf{R}^2} L_2 P_{0,0,0,0} \Phi_1(y_1) \Phi_2(y_2) dy_1 dy_2 = 0$$

여기서 Φ_1, Φ_2 는 Y_t^1, Y_t^2 의 invariant distribution이다. 피적분 함수인 $L_2 P_{0,0,0,0}$ 를 각각 y_1 과 y_2 에 대해 적분해주면 $P_{0,0,0,0}(t, x_1, x_2)$ 가 만족하는 PDE를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} L_{BS}(\bar{\sigma}_1(z_1), \bar{\sigma}_2(z_2), \bar{\rho}_X) P_{0,0,0,0} &= 0 \\ P_{0,0,0,0}(T, x_1, x_2) &= H(x_1, x_2) \end{aligned}$$

여기서 $L_{BS}(=\langle\langle L_2 \rangle\rangle)$ 는 2D 블랙-숄즈 PDE operator이고, $\bar{\sigma}_1(z_1)$ 과 $\bar{\sigma}_2(z_2)$ 는 각각 Y_t^1, Y_t^2 의 invariant distribution에 대한 $f_1(y_1)h(z_1), f_2(y_2)h(z_2)$ 의 기댓값을 나타낸다. 이를 간단히 하기 위해 각 f_i 의 Y_t^i 의 invariant distribution에 대한 기댓값을 $\langle f_i(y) \rangle$ 으로 표현한다면, 각 parameter를 아래와 같이 정리할 수 있다.

$$(\bar{\sigma}_1(z_1))^2 = (\tilde{\sigma}_1 h_1(z_1))^2, \quad (\bar{\sigma}_2(z_2))^2 = (\tilde{\sigma}_2 h_2(z_2))^2,$$

$$\text{여기서 } (\tilde{\sigma}_1)^2 = \langle (f_1(y_1))^2 \rangle = \int_{\mathbf{R}} f_1(y_1)^2 \Phi_1(y_1) dy_1, \quad (\tilde{\sigma}_2)^2 = \langle (f_2(y_2))^2 \rangle = \int_{\mathbf{R}} f_2(y_2)^2 \Phi_2(y_2) dy_2$$

$$\bar{\rho}_X = \frac{\rho_X \langle f_1(y_1) \rangle \langle f_2(y_2) \rangle}{\tilde{\sigma}_1 \tilde{\sigma}_2} \left(= \frac{\rho_X \langle f_1(y_1) \rangle \langle f_2(y_2) \rangle h_1(z_1) h_2(z_2)}{\bar{\sigma}_1(z_1) \bar{\sigma}_2(z_2)} \right).$$

기호 $\langle \rangle$ 는 안의 변수가 $y_1(y_2)$ 일 때 $Y_t^1(Y_t^2)$ 의 invariant distribution에 대한 기댓값을 나타낸다.

변동성을 f_i 와 h_i 의 곱으로 두었기 때문에 $\bar{\rho}_X$ 가 z_i 에 의존하지 않게 설정할 수 있다. 여기서 느리게 회귀하는 변동성의 회귀속도를 나타내는 δ_i 들이 매우 작기 때문에 Z_t^i 들의 값은 시작점인 z_i 와 크게 달라지지 않는다. 그러므로 위의 $\bar{\sigma}_i(z_i)$ 를 상수처럼 생각 할 수 있다.

이제 fast-scale correction term인 $P_{0,0,1,0}$ 와 $P_{0,0,0,1}$ 를 구해보자. 조금 복잡하지만 앞서 보였던 방법을 그대로 다음 order 항들에 적용하면 $\frac{1}{2}$ 지수 항의 $\sqrt{\epsilon_1}$ order의 항에서 다음을 얻을 수 있다.

$$L_0^1 P_{0,0,3,0} + L_0^2 P_{0,0,1,2} + L_1^1 P_{0,0,2,0} + L_2 P_{0,0,1,0} = 0$$

solvability condition에 의해

$$\langle \langle L_1^1 P_{0,0,2,0} + L_2 P_{0,0,1,0} \rangle \rangle_{y_1, y_2} = \langle \langle L_1^1 P_{0,0,2,0} \rangle \rangle_{y_1, y_2} + L_{BS}(\bar{\sigma}_1(z_1), \bar{\sigma}_2(z_2), \bar{\rho}_X) P_{0,0,1,0} = 0 \quad \dots (6)$$

(4)번 식 $L_0^1 P_{0,0,2,0} + L_0^2 P_{0,0,0,2} + L_2 P_{0,0,0,0} = 0$ 에서 y_1 에 관한 solvability condition만 적용하면 $\langle L_0^2 P_{0,0,0,2} + L_2 P_{0,0,0,0} \rangle = 0$ 이므로,

$$\begin{aligned} L_0^2 P_{0,0,0,2} + L_2 P_{0,0,0,0} &= L_0^2 P_{0,0,0,2} + L_2 P_{0,0,0,0} - \langle L_0^2 P_{0,0,0,2} + L_2 P_{0,0,0,0} \rangle_{y_1} = L_2 P_{0,0,0,0} - \langle L_2 \rangle_{y_1} P_{0,0,0,0} \\ &= \left[\frac{1}{2} \{f_1(y_1)^2 - \tilde{\sigma}_1^2\} h_1(z_1)^2 x_1^2 \partial_{x_1 x_1} + \rho_X \{f_1(y_1) - \tilde{\sigma}_1\} f_2(y_2) h_1(z_1) h_2(z_2) x_1 x_2 \partial_{x_1 x_2} \right] P_{0,0,0,0} \end{aligned}$$

다시 (4)식을 이용하면,

$$\begin{aligned} P_{0,0,2,0} &= - (L_0^1)^{-1} (L_2 - \langle L_2 \rangle_{y_1}) P_{0,0,0,0} \\ &= - \left[\frac{1}{2} \phi_{11}(y_1) (h_1(z_1))^2 x_1^2 \partial_{x_1 x_1} + \bar{\rho}_X \phi_{12}(y_1) f_2(y_2) h_1(z_1) h_2(z_2) x_1 x_2 \partial_{x_1 x_2} \right] P_{0,0,0,0} \end{aligned}$$

여기서,

$$L_0^1 \phi_{11} = (f_1(y_1))^2 - \tilde{\sigma}_1^2, \quad L_0^1 \phi_{12} = f_1(y_1) - \tilde{\sigma}_1$$

따라서 (6)식을 통해 $P_{0,0,1,0}$ 이 만족하는 아래의 PDE를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} L_{BS}(\bar{\sigma}_1(z_1), \bar{\sigma}_2(z_2), \bar{\rho}_X) P_{0,0,1,0} &= - \langle \langle L_1^1 P_{0,0,2,0} \rangle \rangle \\ &= \langle \langle \left[\rho_{XY}^1 \beta_1(y_1) f_1(y_1) h_1(z_1) x_1 \partial_{x_1} \right] \\ &\quad \left[\frac{1}{2} (\partial_{y_1} \phi_{11}(y_1)) (h_1(z_1))^2 (x_1)^2 \partial_{x_1 x_1} + \bar{\rho}_X (\partial_{y_1} \phi_{12}(y_1)) f_2(y_2) h_1(z_1) h_2(z_2) x_1 x_2 \partial_{x_1 x_2} \right] \rangle \rangle P_{0,0,0,0} \\ &= \langle \left[\rho_{XY}^1 \beta_1(y_1) f_1(y_1) h_1(z_1) x_1 \partial_{x_1} \right] \\ &\quad \left[\frac{1}{2} (\partial_{y_1} \phi_{11}(y_1)) (h_1(z_1))^2 (x_1)^2 \partial_{x_1 x_1} + \bar{\rho}_X (\partial_{y_1} \phi_{12}(y_1)) \langle f_2(y_2) \rangle_{y_2} h_1(z_1) h_2(z_2) x_1 x_2 \partial_{x_1 x_2} \right] \rangle P_{0,0,0,0} \\ &P_{0,0,1,0}(T, x_1, x_2) = 0 \end{aligned}$$

마찬가지로 $\sqrt{\epsilon_2}$ order 항에서 얻을 수 있는 $L_0^1 P_{0,0,2,1} + L_0^2 P_{0,0,0,3} + L_1^2 P_{0,0,0,2} + L_2 P_{0,0,0,1} = 0$ 에서, 아래의 $P_{0,0,1,0}$ 에 관한 식을 얻게 된다.

$$\begin{aligned} L_{BS}(\bar{\sigma}_1(z_1), \bar{\sigma}_2(z_2), \bar{\rho}_X) P_{0,0,0,1} &= \langle \left[\rho_{XY}^2 \beta_2(y_2) f_2(y_2) h_2(z_2) x_2 \partial_{x_2} \right] \\ &\quad \left[\frac{1}{2} (\partial_{y_2} \phi_{22}(y_2)) (h_2(z_2))^2 (x_2)^2 \partial_{x_2 x_2} + \bar{\rho}_X (\partial_{y_2} \phi_{21}(y_2)) \langle f_1(y_1) \rangle_{y_1} h_1(z_1) h_2(z_2) x_1 x_2 \partial_{x_1 x_2} \right] \rangle P_{0,0,0,0} \\ &P_{0,0,0,1}(T, x_1, x_2) = 0 \end{aligned}$$

여기서,

$$L_0^2 \phi_{22} = (f_2(y_2))^2 - \tilde{\sigma}_2^2, \quad L_0^2 \phi_{21} = f_2(y_2) - \tilde{\sigma}_2$$

$P_{0,0}^{\epsilon_1, \epsilon_2} = P_{0,0,0,0} + \sqrt{\epsilon_1} P_{0,0,1,0} + \sqrt{\epsilon_2} P_{0,0,0,1} + \epsilon_1 P_{0,0,2,0} + \sqrt{\epsilon_1 \epsilon_2} P_{0,0,1,1} + \epsilon_2 P_{0,0,0,2} + \dots$ 에서 $P_{0,0,1,0}$ 와 $\sqrt{\epsilon_i}$ 에 대한 first order approximation $P_{0,0,1,0}$, $P_{0,0,1,0}$ 을 얻었으니 $\sqrt{\delta_i}$ 에 대한 approximation을 구해보자.

이제 $P_{1,0}^{\epsilon_1, \epsilon_2} = P_{1,0,0,0} + \sqrt{\epsilon_1} P_{1,0,1,0} + \sqrt{\epsilon_2} P_{1,0,0,1} + \epsilon_1 P_{1,0,2,0} + \sqrt{\epsilon_1 \epsilon_2} P_{1,0,1,1} + \epsilon_2 P_{1,0,0,2} + \dots$ 을 (2)식에 대입해 볼 것이다.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\epsilon_1} L_0^1 P_{1,0,0,0} + \frac{1}{\epsilon_2} L_0^2 P_{1,0,0,0} + \frac{1}{\sqrt{\epsilon_1}} (L_1^1 P_{1,0,0,0} + L_0^1 P_{1,0,1,0} + L_3 P_{1,0,0,1} + N_1 P_{0,0,0,0}) \\ & + \frac{1}{\sqrt{\epsilon_2}} (L_1^2 P_{1,0,0,0} + L_0^2 P_{1,0,0,1} + L_3 P_{1,0,1,0}) \\ & + (L_2 P_{1,0,0,0} + L_1^1 P_{1,0,1,0} + L_1^2 P_{1,0,0,1} + L_0^1 P_{1,0,2,0} + L_0^2 P_{1,0,0,2} + L_3 P_{1,0,1,1}) + M_{1,0} P_{0,0,0,1} + N_1 P_{0,0,1,0} \dots = 0 \\ & \frac{1}{\epsilon_1}, \frac{1}{\epsilon_2} \text{ order 항에서 } P_{1,0,0,0} \text{이, 지수가 } -\frac{1}{2} \text{인 항에서 } P_{1,0,0,1}, P_{1,0,1,0} \text{이 } y_i \text{들에 의존하지 않음을 알} \\ & \text{수 있고, zero-order 항에서 다음의 Poisson equation을 얻게 된다.} \end{aligned}$$

$$L_0^1 P_{1,0,2,0} + L_0^2 P_{1,0,0,2} + L_2 P_{1,0,0,0} + M_{1,0} P_{0,0,0,1} = 0$$

solvability condition을 이용하면 $P_{1,0,0,0}$ 이 만족하는 다음의 PDE를 얻는다.

$$\begin{aligned} L_{BS}(\bar{\sigma}_1(z_1), \bar{\sigma}_2(z_2), \bar{\rho}_X) P_{1,0,0,0} &= -\langle \langle M_{1,0} \rangle \rangle P_{0,0,0,0} \\ &= \left[g_1(z_1) \langle \Lambda_Z^1(y_1, z_1) \rangle_{y_1} \partial_{z_1} - \rho_{XZ}^1 g_1(z_1) \langle f_1(y_1) \rangle_{y_1} h_1(z_1) x_1 \partial_{x_1} \right] P_{0,0,0,1} \end{aligned}$$

chain rule을 이용하면

$$= g_1(z_1) \left[\langle \Lambda_Z^1(y_1, z_1) \rangle - \rho_{XZ}^1 \langle f_1(y_1) \rangle h_1(z_1) x_1 \partial_{x_1} \right] \left[\left(\partial_{z_1} \bar{\sigma}_1(z_1) \right) \partial_{\sigma_1} \right] P_{0,0,0,0}$$

2D 블랙-숄즈 모델의 greeks간의 관계, $\partial_\rho = \sigma_1 \sigma_2 \tau x_1 x_2 \partial_{x_1 x_2}$, $\rho \partial_\rho - \sigma_1 \partial_{\sigma_1} + \tau (\sigma_1 x_1)^2 \partial_{x_1 x_1} = 0$ 를 이용하면 아래와 같이 정리가 가능하다.

$$\begin{aligned} &= \tau g_1(z_1) \left[\langle \Lambda_Z^1(y_1, z_1) \rangle - \rho_{XZ}^1 \langle f_1(y_1) \rangle h_1(z_1) x_1 \partial_{x_1} \right] \\ & \quad \left[\bar{\sigma}_1(z_1) \left(\partial_{z_1} \bar{\sigma}_1(z_1) \right) (x_1)^2 \partial_{x_1 x_1} + \bar{\rho}_X \left(\partial_{z_1} \bar{\sigma}_1(z_1) \right) \bar{\sigma}_2(z_2) x_1 x_2 \partial_{x_1 x_2} \right] P_{0,0,0,0} \end{aligned}$$

$P_{1,0}^{\epsilon_1, \epsilon_2}$ 의 전개식을 (3)에 대입하여 같은 방법을 적용하면 $P_{0,1,0,0}$ 의 PDE 역시 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} L_{BS}(\bar{\sigma}_1(z_1), \bar{\sigma}_2(z_2), \bar{\rho}_X(z_1, z_2)) P_{0,1,0,0} \\ &= \tau g_2(z_2) \left[\langle \Lambda_Z^2(y_2, z_2) \rangle - \rho_{XZ}^2 \langle f_2(y_2) \rangle h_2(z_2) x_2 \partial_{x_2} \right] \\ & \quad \left[\bar{\sigma}_2(z_2) \left(\partial_{z_2} \bar{\sigma}_2(z_2) \right) (x_2)^2 \partial_{x_2 x_2} + \bar{\rho}_X \bar{\sigma}_1(z_1) \left(\partial_{z_2} \bar{\sigma}_2(z_2) \right) x_1 x_2 \partial_{x_1 x_2} \right] P_{0,0,0,0} \end{aligned}$$

지금까지 얻은 식들을 정리해보자. 먼저 $P \approx P_{0,0,0,0} + \sqrt{\delta_1} P_{1,0,0,0} + \sqrt{\delta_2} P_{0,1,0,0} + \sqrt{\epsilon_1} P_{0,0,1,0} + \sqrt{\epsilon_2} P_{0,0,0,1}$ 와 같이 근사할 수 있는데, 간단한 표기를 위해 $\sqrt{\epsilon_1} P_{0,0,1,0}$, $\sqrt{\epsilon_2} P_{0,0,0,1}$, $\sqrt{\delta_1} P_{1,0,0,0}$, $\sqrt{\delta_2} P_{0,1,0,0}$ 를 $P_{0,0,1,0}$, $P_{0,0,0,1}$, $P_{1,0,0,0}$, $P_{0,1,0,0}$ 로 대체하겠다. 그러면 P 에 대한 근사식과 각 항들이 만족하는 PDE를 아래와 같이 정리할 수 있다.

① P 에 대한 근사식

$$P \approx P_{0,0,0,0} + P_{1,0,0,0} + P_{0,1,0,0} + P_{0,0,1,0} + P_{0,0,0,1}$$

② leading term $P_{0,0,0,0}$

$$\begin{aligned} L_{BS}(\bar{\sigma}_1(z_1), \bar{\sigma}_2(z_2), \bar{\rho}_X) P_{0,0,0,0} &= 0 \\ P_{0,0,0,0}(T, x_1, x_2) &= H(x_1, x_2) \end{aligned}$$

③ fast factor Y_t^1 에 대한 correction term $P_{0,0,1,0}$

$$\begin{aligned} L_{BS}(\bar{\sigma}_1(z_1), \bar{\sigma}_2(z_2), \bar{\rho}_X) P_{0,0,1,0} \\ = - [\bar{\sigma}_1(z_1) x_1 \partial_{x_1}] \left[V_3^1(\bar{\sigma}_1(z_1) x_1)^2 \partial_{x_1 x_1} + V_4^1 \bar{\rho}_X \bar{\sigma}_1(z_1) \bar{\sigma}_2(z_2) x_1 x_2 \partial_{x_1 x_2} \right] P_{0,0,0,0} \\ P_{0,0,1,0}(T, x_1, x_2) = 0 \end{aligned}$$

여기서,

$$V_3^1 = - \frac{\rho_{XY}^1 \sqrt{\epsilon_1}}{2(\tilde{\sigma}_1)^3} \langle \beta_1(y_1) f_1(y_1) (\partial_{y_1} \phi_{11}(y_1)) \rangle, \quad V_4^1 = - \frac{\rho_{XY}^1 \sqrt{\epsilon_1}}{(\tilde{\sigma}_1)^2 \tilde{\sigma}_2} \langle \beta_1(y_1) f_1(y_1) (\partial_{y_1} \phi_{12}(y_1)) \rangle \langle f_2(y_2) \rangle$$

④ fast factor Y_t^2 에 대한 correction term $P_{0,0,0,1}$

$$\begin{aligned} L_{BS}(\bar{\sigma}_1(z_1), \bar{\sigma}_2(z_2), \bar{\rho}_X) P_{0,0,0,1} \\ = - [\bar{\sigma}_2(z_2) x_2 \partial_{x_2}] \left[V_3^2(\bar{\sigma}_2(z_2) x_2)^2 \partial_{x_2 x_2} + V_4^2 \bar{\rho}_X \bar{\sigma}_1(z_1) \bar{\sigma}_2(z_2) x_1 x_2 \partial_{x_1 x_2} \right] P_{0,0,0,0} \\ P_{0,0,0,1}(T, x_1, x_2) = 0 \end{aligned}$$

여기서,

$$V_3^2 = - \frac{\rho_{XY}^2 \sqrt{\epsilon_2}}{2(\tilde{\sigma}_2)^3} \langle \beta_2(y_2) f_2(y_2) (\partial_{y_2} \phi_{22}(y_2)) \rangle, \quad V_4^2 = - \frac{\rho_{XY}^2 \sqrt{\epsilon_2}}{\tilde{\sigma}_1(\tilde{\sigma}_2)^2} \langle f_1(y_1) \rangle \langle \beta_2(y_2) f_2(y_2) (\partial_{y_2} \phi_{21}(y_2)) \rangle$$

⑤ slow factor Z_t^1 에 대한 correction term $P_{1,0,0,0}$

$$\begin{aligned} L_{BS}(\bar{\sigma}_1(z_1), \bar{\sigma}_2(z_2), \bar{\rho}_X) P_{1,0,0,0} \\ = - 2\tau \left[V_0^1(z_1) + V_1^1(z_1) \bar{\sigma}_1(z_1) x_1 \partial_{x_1} \right] \left[(\bar{\sigma}_1(z_1) x_1)^2 \partial_{x_1 x_1} + \rho_X \bar{\sigma}_1(z_1) \bar{\sigma}_2(z_2) x_1 x_2 \partial_{x_1 x_2} \right] P_{0,0,0,0} \\ P_{1,0,0,0}(T, x_1, x_2) = 0 \end{aligned}$$

여기서,

$$V_0^1(z_1) = - \frac{g_1(z_1) (\partial_{z_1} \bar{\sigma}_1(z_1)) \sqrt{\delta_1}}{2\bar{\sigma}_1(z_1)} \langle A_Z^1(y_1, z_1) \rangle, \quad V_1^1(z_1) = \frac{g_1(z_1) (\partial_{z_1} \bar{\sigma}_1(z_1)) \sqrt{\delta_1}}{2\bar{\sigma}_1(z_1)} \rho_{XZ}^1$$

⑥ slow factor Z_t^2 에 대한 correction term $P_{0,1,0,0}$

$$\begin{aligned} L_{BS}(\bar{\sigma}_1(z_1), \bar{\sigma}_2(z_2), \bar{\rho}_X) P_{0,1,0,0} \\ = - 2\tau \left[V_0^2(z_2) + V_1^2(z_2) \bar{\sigma}_2(z_2) x_2 \partial_{x_2} \right] \left[(\bar{\sigma}_2(z_2) x_2)^2 \partial_{x_2 x_2} + \rho_X \bar{\sigma}_1(z_1) \bar{\sigma}_2(z_2) x_1 x_2 \partial_{x_1 x_2} \right] P_{0,0,0,0} \\ P_{0,1,0,0}(T, x_1, x_2) = 0 \end{aligned}$$

여기서,

$$V_0^2(z_2) = - \frac{g_2(z_2) (\partial_{z_2} \bar{\sigma}_2(z_2)) \sqrt{\delta_2}}{2\bar{\sigma}_2(z_2)} \langle A_Z^2(y_2, z_2) \rangle, \quad V_1^2(z_2) = \frac{g_2(z_2) (\partial_{z_2} \bar{\sigma}_2(z_2)) \sqrt{\delta_2}}{2\bar{\sigma}_2(z_2)} \rho_{XZ}^2$$

만약 $P_{0,0,0,0}$ 가 블랙-숄즈 모델에서 평가 공식이 존재하는 유틸리티 옵션이라면 네 개의 correction term $P_{0,0,1,0}$, $P_{0,0,0,1}$, $P_{1,0,0,0}$, $P_{0,1,0,0}$ 의 평가 공식 역시 쉽게 유도할 수 있다. 대입 후 간단한 연산을 통해 다음 네 식이 성립함을 확인할 수 있다.

$$\textcircled{1} P_{0,0,1,0} = \tau A^{\epsilon_1} P_{0,0,0,0}$$

$$\text{여기서 } A^{\epsilon_1} = V_3^1(\bar{\sigma}_1 x_1)^3 \partial_{x_1 x_1 x_1} + V_4^1 \bar{\rho}_X (\bar{\sigma}_1 x_1)^2 (\bar{\sigma}_2 x_2) \partial_{x_1 x_1 x_2} + 2\bar{\sigma}_1 V_3^1 (\bar{\sigma}_1 x_1)^2 \partial_{x_1 x_1} + \bar{\sigma}_1 V_4^1 \bar{\rho}_X (\bar{\sigma}_1 x_1) (\bar{\sigma}_2 x_2) \partial_{x_1 x_2}$$

$$\textcircled{2} P_{0,0,0,1} = \tau A^{\epsilon_2} P_{0,0,0,0}$$

$$\text{여기서 } A^{\epsilon_2} = V_3^2(\bar{\sigma}_2 x_2)^3 \partial_{x_2 x_2 x_2} + V_4^2 \bar{\rho}_X (\bar{\sigma}_1 x_1) (\bar{\sigma}_2 x_2)^2 \partial_{x_1 x_2 x_2} + 2\bar{\sigma}_2 V_3^2 (\bar{\sigma}_2 x_2)^2 \partial_{x_2 x_2} + \bar{\sigma}_2 V_4^2 \bar{\rho}_X (\bar{\sigma}_1 x_1) (\bar{\sigma}_2 x_2) \partial_{x_1 x_2}$$

$$\textcircled{3} P_{1,0,0,0} = \tau^2 A^{\delta_1} P_{0,0,0,0}$$

$$\text{여기서 } A^{\delta_1} = V_1^1(z_1) (\bar{\sigma}_1(z_1) x_1)^3 \partial_{x_1 x_1 x_1} + \rho_X V_1^1(z_1) (\bar{\sigma}_1(z_1) x_1)^2 (\bar{\sigma}_2(z_2) x_2) \partial_{x_1 x_1 x_2} \\ + [V_0^1(z_1) + 2\sigma_1(z_1) V_1^1(z_1)] (\bar{\sigma}_1(z_1) x_1)^2 \partial_{x_1 x_1} + \rho_X [V_0^1(z_1) + \sigma_1(z_1) V_1^1(z_1)] (\bar{\sigma}_1(z_1) x_1) (\bar{\sigma}_2(z_2) x_2) \partial_{x_1 x_2}$$

$$\textcircled{4} P_{0,1,0,0} = \tau^2 A^{\delta_2} P_{0,0,0,0}$$

$$\text{여기서 } A^{\delta_2} = V_1^2(z_2) (\bar{\sigma}_2(z_2) x_2)^3 \partial_{x_2 x_2 x_2} + \rho_X V_1^2(z_2) (\bar{\sigma}_1(z_1) x_1) (\bar{\sigma}_2(z_2) x_2)^2 \partial_{x_1 x_2 x_2} \\ + [V_0^2(z_2) + 2\sigma_2(z_2) V_1^2(z_2)] (\bar{\sigma}_2(z_2) x_2)^2 \partial_{x_2 x_2} + \rho_X [V_0^2(z_2) + \sigma_2(z_2) V_1^2(z_2)] (\bar{\sigma}_1(z_1) x_1) (\bar{\sigma}_2(z_2) x_2) \partial_{x_1 x_2}$$

이제 이 모델이 어떤 변동성 스쿠를 갖게 되는지 알아보자. 내재변동성은 개별자산에 대한 바닐라 옵션을 통해 얻어진다. 첫 번째 자산에 의존하는 바닐라 옵션은 x_1 에만 의존할 뿐 x_2 에는 의존하지 않는다. 따라서 이전에 소개한 모든 연산자에서 x_2 로 미분한 부분은 사라지게 된다. 만약 첫 번째 자산에 대한 바닐라 옵션의 시장가가 P 라면 콜옵션에 내재변동성 I 를 대입했을 때 다음 식이 성립한다.

$$C_{BS}(I) = P \dots (7)$$

그 다음 내재변동성 I 와 우리가 leading term을 계산할 때 이용한 averaged volatility $\bar{\sigma}_1(z)$ 의 차이를 각 자산의 small parameter $\sqrt{\epsilon_1}$ 와 $\sqrt{\delta_1}$ 로 전개하면,

$$I - \bar{\sigma}_1(z) = \sqrt{\epsilon_1} I_{1,0} + \sqrt{\delta_1} I_{0,1} + \dots$$

이제 (7)식의 양변을 전개해보자. 이전과 비슷하게 전개하면, 우변을 아래와 같이 적을 수 있다.

$$C_{BS}(\bar{\sigma}_1) + (\sqrt{\epsilon_1} I_{1,0} + \sqrt{\delta_1} I_{0,1}) \frac{\partial C_{BS}(\bar{\sigma}_1)}{\partial \sigma_1} + \dots = P_{0,0,0,0} + \tau A^{\epsilon_1} P_{0,0,0,0} + \tau^2 A^{\delta_1} P_{0,0,0,0} + \dots$$

위에서 언급한 바와 같이 첫 번째 자산에 대한 바닐라 옵션의 가격은 변수 x_2 에 의존하지 않으므로,

$$A^{\epsilon_1} = V_3^1(z_1) (\bar{\sigma}_1(z_1) x_1)^3 \partial_{x_1 x_1 x_1} + 2\bar{\sigma}_1(z_1) V_3^1(z_1) (\bar{\sigma}_1(z_1) x_1)^2 \partial_{x_1 x_1} = [\bar{\sigma}_1(z_1) x_1 \partial_{x_1}] V_3^1(\bar{\sigma}_1(z_1) x_1)^2 \partial_{x_1 x_1}$$

$$A^{\delta_1} = V_1^1(z_1) (\bar{\sigma}_1(z_1) x_1)^3 \partial_{x_1 x_1 x_1} + [V_0^1(z_1) + 2\sigma_1(z_1) V_1^1(z_1)] (\bar{\sigma}_1(z_1) x_1)^2 \partial_{x_1 x_1} \\ = [V_0^1(z_1) + V_1^1(z_1) \bar{\sigma}_1(z_1) x_1 \partial_{x_1}] (\bar{\sigma}_1(z_1) x_1)^2 \partial_{x_1 x_1}$$

블랙-숄즈 모델에서 얻을 수 있는 관계식

$$\frac{\partial P_{BS}}{\partial \sigma_1} = \tau \bar{\sigma}_1 x_1^2 \partial^2 x_1 P_{BS}, \quad \frac{\partial C_{BS}}{\partial \sigma_1} = \frac{x_1 \sqrt{\tau} e^{-d_1^2/2}}{\sqrt{2\pi}}, \quad x_1 \partial_x \left(\frac{\partial C_{BS}}{\partial \sigma_1} \right) = \left(1 - \frac{d_1}{\bar{\sigma}_1 \sqrt{\tau}} \right) \frac{\partial C_{BS}}{\partial \sigma_1}$$

을 이용하면 $\sqrt{\epsilon_1}$, $\sqrt{\delta_1}$ 에 대한 내재변동성의 first-order approximation을 구할 수 있다. 두 번째 자산에 대해서도 같은 방법으로 구할 수 있으므로 아래 첨자를 생략해서 표기하였다.

$$I \approx b^* + \tau b^\delta + (a^\epsilon + \tau a^\delta) LMMR$$

여기서,

$$LMMR = \frac{\log(K/x)}{T-t}, \quad b^* = \bar{\sigma} + \frac{\bar{\sigma}^{-2} V_3}{2} \left(1 - \frac{2r}{\bar{\sigma}^2} \right), \quad a^\epsilon = V_3, \quad b^\delta = \bar{\sigma} V_0 + \frac{\bar{\sigma}^{-2} V_1}{2} \left(1 - \frac{2r}{\bar{\sigma}^2} \right), \quad a^\delta = V_1$$