

은퇴가 사치재일 때

생명보험, 은퇴 시점 선택과 최적 소비 투자

구형건¹·배세용¹·심규철¹

¹ 아주대학교 경영대학 금융공학과

<초 록>

본 연구에서는 수명의 불확실성 하에서 노동자인 경제주체의 최적 은퇴 시점, 생명보험 구입, 그리고 소비 및 투자에 관해 살펴본다. 경제주체가 은퇴 이전에는 노동임금을 받지만 노동으로 인한 효용감소를 감수해야 한다. 그리고 경제주체의 은퇴 전후로 소비 및 상속에 대한 상대위험회피계수가 변화한다. 우리는 본고에서, 경제 주체의 최적 은퇴 시점, 생명보험 구입, 그리고 소비 및 투자에 관한 최적해를 폐쇄형 형태(closed form solution)로 제시한다. 최적 해에서, 경제 주체의 부가 어떤 임계치에 이르자마자 은퇴하는 것이 최적임을 알 수 있다. 그리고, 최적 해에 대한 수치적 비교정태분석과 그 결과에 대한 재무경제학적 직감을 제공한다. 구체적으로 순간사망위험율(hazard rate), 상속에 대한 한계효용, 은퇴 후 소비 및 상속에 대한 위험회피도, 은퇴 이전 노동에 의한 효용감소 각각의 변화에 따른 최적 소비/투자/생명보험료와 은퇴 시점의 변화를 살펴보고 그것들에 대한 재무경제학적 직감을 제공한다.

1. 서론

경제주체의 최적 행동 양식을 분석하는 것은 금융 및 보험 시장, 나아가서는 경제 전체를 분석하는 데 있어서 유용하다. 본 연구에서는 수명의 불확실성 하에서 노동자인 경제주체의 최적 은퇴 시점, 생명보험 구입, 그리고 소비 및 투자에 관해 연구한다. 최적 은퇴는 노동임금과 노동에 의한 효용감소의 상충관계(trade-off)로 인해 발생한다. 경제주체의 은퇴 전후로 소비 및 상속에 대한 상대위험회피계수가 변화한다.

수명의 불확실성에 따른 생명보험의 존재 하에 최적 소비에 관한 연속 시간에서의 분석은 참고 문헌 [13]에 의해 처음 시도되었다. 참고 문헌 [5]는 이산 시간 하에서 이에 최적 투자의 문제도 고려하였다. 참고 문헌 [9]에서 최초로 연속 시간 하에서 최적 소비와 투자에 관한 연구가 이루어졌다. 참고 문헌 [9, 10]은 경제주체가 상수의 상대위험회피계수 또는 절대위험회피계수를 가지는 경우에 있어서 폐쇄형 해도 제시하였다. 참고 문헌 [12]는 경제주체의 자산으로 생명보험을 도입함으로써 참고 문헌 [9, 10]의 연구를 확장하였다. 참고 문헌 [11]에서 수명 불확실성 하에서 노동자인 경제 주체의 최적 생명보험 구입과 소비에 관해 연구하여 명시적(explicit) 해를 제시하였다. 그러나, 참고 문헌 [11]에서 은퇴 시점은 외생적으로 고정되어 있고 소비, 유산, 및 은퇴 시점의 효용함수가 모두 같은 상수인 상대위험회피계수를 갖는 모형을 고려하였다. 참고 문헌 [14, 15]은 최적 생명보험 구입과 소비 및 투자에 관한 문제를 해결하기 위해 각각 마팅게일 방법(martingale method)과 동적 프로그래밍 방법 (dynamic programming method)을 사용하였고 참고 문헌 [16]같은 문제를 해결하기 위해 수치적 방법인 마코프 체인 근사법(Markov chain approximation method)을 사용하였다. 참고 문헌 [3]에서는 상속이 사치재라는 가정 하에서 최적 생명보험 구입과 소비 및 투자에 관해 연구하였다. 참고 문헌 [1]에서는 조기사망위험이 없어 보험과 연금을 고려하지 않은 상황에서 상대위험회피계수의 변화를 감안한 최적 소비 및 투자와 최적 선호도 변화 시점에 관해 연구하였다. 위의 참고 문헌들은 노동 공급자로서의 경제주체의 최적 은퇴 문제를 고려하지는 않았다. 참고 문헌 [2, 4]에서는 노동자인 경제주체의 최적 은퇴와 소비 및 투자 전략에 관해 연구한다. 그러나 참고 문헌 [1, 2, 4]에서는 경제주체의 수명의 불확실성을 고려하지 않아 최적 생명보험 구입과 연금에 대해서는 고려하지 않는다. 참고 문헌 [6]에서는 비자발적 은퇴 시점의 불확실성 하에서 최적 자발적 은퇴와 보험/소비/투자에 관한 연구를 하였다. 그러나 참고 문헌 [6]에서의 보험은 실업 보험이라 은퇴 이후에는 보험이 고려되지 않으며 최적해의 분석 초점이 본고와 다르다. 또한 참고 문헌 [6]에서는 최적 은퇴가 발생하는 상충관계가 노동임금과 레저(leisure)에 의해 발생하며, 소비와 레저에 관한 효용이 수학적으로 볼 때 곱으로 분리되어 (multiplicatively separable) 은퇴 전후의 소비액에 점프(jump)가 발생하는데 비해, 본고에서는 은퇴 이전에 노동으로 인해 효용이 감해지는(additively separable) 형태라 은퇴 전후의 소비액이 연속이다. 경제주체의 은퇴 전후로 소비 및 상속에 대한 상대위험회피계수가 변화하고 그 변화 정도에 따른 비교정태분석을 한다는 것도 본고가 참고 문헌 [6]과 구별되는 점이다.

우리는 본고에서, 경제 주체의 최적 은퇴 시점, 생명보험 구입, 그리고 소비 및 투자에 관한 최적해를 폐쇄형 형태(closed form solution)로 제시한다. 이를 통해, 경제 주체의 부가 어떤 임계치에 이르자 마자 은퇴하는 것이 최적임을 알 수 있다. 그리고, 최적 해에 대한 수치적 비교정태분석과 그 결과에 대한 재무경제학적

직감(intuition)을 제공한다. 구체적으로 순간사망위험율 (hazard rate), 상속에 대한 한계효용, 은퇴 후 소비 및 상속에 대한 위험회피도, 은퇴 이전 노동에 의한 효용감소 각각의 변화에 따른 최적 소비/ 투자/ 생명보험료와 은퇴 시점의 변화를 살펴보고 그것들에 대한 재무경제학적 직감을 제공한다.

본고의 나머지 부분은 다음과 같이 진행된다. 2 장에서 경제주체의 최적화 모형을 제시하고, 3 장에서 최적화 문제의 폐쇄형 해를 제공하며, 4 장에서 그 해에 대한 수치적 비교정태분석과 그에 대한 재무경제학적 직감을 제시한다. 5 장은 결론에 해당한다.

2. 모형

무한 연속시간에서 조기사망 위험에 직면해 있는 노동자인 경제주체의 은퇴 시점, 생명보험 구매, 소비 및 투자에 관한 최적의 동적 전략을 연구한다.

금융시장에 두 가지 종류의 자산이 있다고 가정한다. 그 중 하나는 무위험자산이고 다른 하나는 위험자산이다. 무위험이자율은 상수 $r > 0$ 이고 위험자산의 시점 t 에서의 가격 $S(t)$ 는 기하 브라우니안 운동(geometric Brownian motion)에 따라 결정된다.

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dB(t), \quad t \geq 0, \quad S(0) > 0.$$

여기서, $\mu > r$ 와 $\sigma > 0$ 는 상수이고 $\{B(t), t \geq 0\}$ 는 확률 공간 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 위에서의 브라우니안 운동(Brownian motion)이다. 브라우니안 운동에 의해 생성되는 필터레이션(filtration)의 확률측도 \mathbb{P} 하에서의 증강 필터레이션(augmented filtration)을 $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ 로 나타낸다. 위험 시장가격(market price of risk)을 θ 로 표기한다. 즉,

$$\theta = \frac{\mu - r}{\sigma}.$$

시점 t 에서 경제주체의 위험자산 투자 포지션액을 π_t 로 표기하고 소비액을 $c_t \geq 0$ 로 표기한다. 위험자산 투자포지션액 외의 부는 무위험자산에 투자된다.

경제주체는 은퇴 이전에 상수 $\epsilon > 0$ 의 시간율로 노동임금을 받는다고 가정한다. 은퇴는 비가역적이어서 은퇴 이후에는 노동에 대한 임금이 없다고 가정한다. 경제주체의 은퇴시점을 τ 로 표기한다.

경제주체의 잔여수명 T 는 순간사망위험율 (hazard rate)이 $\eta > 0$ 인 지수분포(exponential distribution)를 따르고 이는 위의 증강 필터레이션 $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ 과 독립이라고 가정한다. 생명보험 계약이 참고문헌 [11, 13-16]에서와 같이 연속시간으로 제의된다. 경제주체가 시점 t 에서의 보험료를 $p_t \geq 0$ 로 표기한다. 보험료-보험금 비율 (insurance premium-payout ratio)은 일반적으로 순간사망위험율 이상인데 본 논문에서는 순간사망위험율 η 와 같다고 가정한다. 즉, 시점 t 에서의 사망시 보험금은 p_t/η 이다. 경제주체는 또한 장수위험(longevity risk)에 대비한 연금에 가입하여 생존기간 동안 그의 부가 양인 경우 그 부에 대한 η 의 비율로 연금을 받고 사망 시 그의 부가 양일 경우 이를 연금기관이 모두 가져간다고 가정한다. 사망 시 부가 음일 경우 이는 그 자손에게 상속되지 않는다. 이 가정으로 인하여 투자자가 시점 t 에 사망할 시에 $\bar{X}_t := p_t/\eta$ 만큼의 유산을

남리게 된다. 이 경제주체의 생존 기간 부가 음인 경우에는 그 절대치만큼 무위험자산과 위험자산에의 총 순 매도포지션(net short position)이 이루어진다고 볼 수 있는데 여기에 대해서 가산금리 또는 공매도 비용이 부가되는데 그 비율도 η 라고 가정한다.

이상을 종합하여, 경제주체가 생존해 있는 동안 시점 t 에서의 부를 X_t 로 표기하면 다음과 같은 식이 성립한다.

$$dX_t = \{(r + \eta)X_t - c_t - p_t + \epsilon \mathbf{1}_{\{t < \tau\}} + (\mu - r)\pi_t\}dt + \sigma\pi_t dB(t), \quad X_0 = x. \quad (2.1)$$

위의 π_t , c_t , 그리고 p_t 는 점진적 \mathcal{F}_t -가측 (measurable)이고 $t \geq 0$ 에 대해 다음의 조건들을 만족한다:

$$\int_0^t \pi_s^2 ds < \infty, \quad \int_0^t c_s ds < \infty, \quad \int_0^t p_s ds < \infty.$$

경제주체가 생존해 있는 동안 은퇴 이전에는 미래 노동임금의 가산금리를 고려한 현가인 $\epsilon/(r + \eta)$ 보다 많은 부채가 허용되지는 않고 은퇴 이후에는 노동임금이 없으므로 재산이 0 이상이어야 한다. 즉, 경제주체가 생존해 있는 동안 다음과 같은 부의 제약을 받는다.

$$X_t \geq -\frac{\epsilon}{r + \eta} \mathbf{1}_{\{t < \tau\}}, \quad t \geq 0. \quad (2.2)$$

제약조건 (2.2)를 만족하는 소비/투자/보험료/은퇴시점 전략 $(c, \pi, p, \tau) := ((c_t, \pi_t, p_t)_{t \geq 0}, \tau)$ 을 허용전략 (admissible strategy)이라 한다. 초기 부 $X_0 = x \geq -\frac{\epsilon}{r + \eta}$ 를 가진 경제주체의 모든 허용전략들의 집합을 $\mathcal{A}(x)$ 로 표기한다.

경제주체의 소비효용함수 u_i , $i = 1, 2$ 와 상속효용함수 w_i , $i = 1, 2$ 를 은퇴 이전의 경우를 $i = 1$, 은퇴 이후의 경우를 $i = 2$ 로 다음과 같이 상대위험회피계수가 상수($0 < R_i \neq 1, i = 1, 2$)인 함수로 가정한다.

$$u_1(c) \triangleq \frac{c^{1-R_1}}{1-R_1} - l \quad (2.3)$$

$$w_1(\bar{X}) \triangleq A \frac{\bar{X}^{1-R_1}}{1-R_1} \quad (2.4)$$

$$u_2(c) \triangleq \frac{c^{1-R_2}}{1-R_2} \quad (2.5)$$

$$w_2(\bar{X}) \triangleq A \frac{\bar{X}^{1-R_2}}{1-R_2} \quad (2.6)$$

식 (2.3)의 은퇴 이전 소비효용함수 u_1 은 엄밀히 말하면 소비에 의한 효용에서 노동에 의한 효용감소분(비효용) $l > 0$ 을 뺀 것이다. 본고에서는 편의상 상대위험회피계수($R_i, i = 1, 2$)들이 모두 1보다 큰 경우를 고려한다.¹ 서론에서 기술하였듯이 [1]에서는 조기사망위험이 없어 보험과 연금을 고려하지 않은 상황에서 상대위험회피계수의 변화를 감안한 최적 소비 및 투자에 관해 연구하였다. 본고에서는 은퇴 이후의 상대위험회피계수가 은퇴 이전보다 작아지는 경우를 고려한다. 즉, 상대위험회피계수가 다음과 같은 경우를 고려한다.

$$R_1 > R_2 > 1.$$

경제주체의 주관적 할인율(subjective discount rate)을 $\delta > 0$ 로 표기하고 아래의 최적화 문제가 잘 정의되고 가치함수가 유한하게 하기 위해 다음을 가정한다.

가정 2.1. $M_i = r + \eta + \frac{\delta - r}{R_i} + \frac{R_i - 1}{R_i^2} \frac{\theta^2}{2} > 0, \quad i = 1, 2.$

초기 부 $X_0 = x > \epsilon/(r + \eta)$ 를 가진² 경제주체는 허용전략 (c, π, p, τ) 을 최적으로 선택함으로써 다음의 목적함수를 최대화하려 한다.

$$\mathbb{E} \left[\int_0^{\tau \wedge T} e^{-\delta t} u_1(c_t) dt + \mathbf{1}_{\{T < \tau\}} e^{-\delta T} w_1(\bar{X}_T) + \mathbf{1}_{\{T \geq \tau\}} e^{-\delta \tau} \left\{ \int_\tau^T e^{-\delta(t-\tau)} u_2(c_t) dt + e^{-\delta(T-\tau)} w_2(\bar{X}_T) \right\} \right] \quad (2.7)$$

참고문헌 [11, 14, 15] 등에서와 같이 경제주체의 잔여수명 T 에 대한 조건부 평균을 평균함으로써 목적함수 (2.7)는 아래와 같이 다시 쓰여질 수 있다.

$$\mathbb{E} \left[\int_0^\tau \{ e^{-(\eta+\delta)t} u_1(c_t) + \eta e^{-(\eta+\delta)t} w_1(\bar{X}_t) \} dt + e^{-(\eta+\delta)\tau} \int_\tau^\infty \{ e^{-(\eta+\delta)(t-\tau)} u_2(c_t) + \eta e^{-(\eta+\delta)(t-\tau)} w_2(\bar{X}_t) \} dt \right] \quad (2.8)$$

경제주체가 시점 0에 이미 은퇴자인 경우 노동임금이 없어 아래와 같은 부의 제약을 받을 것이다.

¹ 상대위험회피계수들이 모두 1보다 작은 경우도 비슷한 방식으로 해결할 수 있다.

² $X_0 = \epsilon/(r + \eta)$ 인 경우는 아주 간단한 경우(trivial case)라 분석에서 제외한다.

$$X_t \geq 0, \quad t \geq 0. \quad (2.9)$$

초기 부 $X_0 = x \geq 0$ 에 대하여 위의 (2.9)을 만족하는 전략 (c, π, p) 들의 집합을 $\mathcal{A}_a(x)$ 라 하자. 이 경우의 가치함수(value function) $V_a(x)$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$V_a(x) = \sup_{(c, \pi, p) \in \mathcal{A}_a(x)} \mathbb{E} \left[\int_0^\infty e^{-(\eta+\delta)s} u_2(c_s) + \eta e^{-(\eta+\delta)s} w_2(\bar{X}) ds \right]$$

그러면, 초기 부 $X_0 = x > \epsilon/(r + \eta)$ 를 가진 경제주체의 가치함수 $V(x)$ 는 목적함수 (2.8)를 마코비안 성질(Markovian property)에 의해 다시 씌으로써 아래와 같이 된다.

$$V(x) = \sup_{(c, \pi, p, \tau) \in \mathcal{A}(x)} \mathbb{E} \left[\int_0^\tau e^{-(\eta+\delta)s} u_1(c_s) + \eta e^{-(\eta+\delta)s} w_1(\bar{X}) ds + e^{-(\eta+\delta)\tau} V_a(X_\tau) \right] \quad (2.10)$$

3. 최적화 문제의 해

본고에서는 최적화 문제를 해결하기 위하여 마팅게일 쌍대방법(martingale duality method)을 이용한다. 위험시장가격(market price of risk)을 θ 에 해당하는 지수 마팅게일(exponential martingale)과 상태 가격 밀도(state price density)의 시점 t 에서의 값을 각각 Z_t 와 H_t 로 표현한다. 즉,

$$Z(t) = e^{-\frac{1}{2}\theta^2 t - \theta B(t)}, \quad H(t) = e^{-rt} Z(t).$$

효용함수들 (2.3), (2.5), (2.4), (2.6)의 르장드르-펜첸 변환(Legendre-Fenchel transform)은 다음과 같다.

정의 3.1.

$$\begin{aligned} \tilde{u}_i(y) &= \max_{c \geq 0} [u_i(c) - yc] \\ &= u_i(I_{u_i}(y)) - y I_{u_i}(y), \quad 0 < y < \infty, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{w}_i(y) &= \max_{\bar{X} \geq 0} [w_i(\bar{X}) - y\bar{X}] \\ &= w_i(I_{w_i}(y)) - y I_{w_i}(y), \quad 0 < y < \infty. \end{aligned}$$

여기서, $i = 1, 2$ 이고 $I_{u_i}(y) \triangleq u_i'^{-1}(y) = y^{-1/R_i}$, $I_{w_i}(y) \triangleq w_i'^{-1}(y) = (y/A)^{-1/R_i}$ 이다.

경제주체의 최적화 문제를 풀기 위하여 우선 $x > 0$ 에 대하여 $V_a(x)$ 를 구한다.³ 참고문헌 [6, 14]에서와 같이 $(c, \pi, p) \in \mathcal{A}_a(x)$ 이면 다음의 정적 예산제약식을 만족한다.

³ 결과적으로 최적 해가 $X_\tau > 0$ 를 만족하므로 $x = 0$ 인 경우는 고려하지 않아도 됨.

$$\mathbb{E} \left[\int_0^\infty \{ e^{-\eta s} H_s c_s + \eta e^{-\eta s} H_s \bar{X}_s \} ds \right] \leq x. \quad (3.1)$$

보조정리 3.1. 노동임금이 없는 경우의 가치함수 $V_a(x)$, $x > 0$ 는 다음과 같다.

$$V_a(x) = K \frac{x^{1-R_2}}{1-R_2}, \quad (3.2)$$

$$\text{여기서 } K = \left(\frac{1 + \eta A^{\frac{1}{R_2}}}{M_2} \right)^{R_2} > 0.$$

Proof. 부록 A 에 있음.

위 V_a 의 르장드르-펜첸 변환(Legendre-Fenchel transform)을 \tilde{V}_a 로 표기하자. 즉,

$$\begin{aligned} \tilde{V}_a &= \max_{x \geq 0} [V_a(x) - yx] \\ &= V_a\left(\left(\frac{y}{K}\right)^{-\frac{1}{R_2}}\right) - y\left(\frac{y}{K}\right)^{-\frac{1}{R_2}} \\ &= K^{\frac{1}{R_2}} \frac{R_2}{1-R_2} y^{\frac{R_2-1}{R_2}}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

참고문헌 [6, 14]에서와 같이 예산제약식 (2.2)을 만족하는 허용전략 (c, π, p, τ) 은 다음의 정적 예산 제약식을 만족한다.

$$\mathbb{E} \left[\int_0^\tau \{ e^{-\eta t} H_t (c_t - \epsilon) + \eta e^{-\eta t} H_t \bar{X}_t \} dt + e^{-\eta \tau} H_\tau X_\tau \right] \leq x. \quad (3.4)$$

정리 3.1. 경제주체의 가치함수 V 와 최적 은퇴전략 τ^* 및 은퇴 이전 최적 소비/투자/생명보험 전략 (c^*, π^*, p^*) 은 다음과 같다.

$$V(x) = \tilde{J}(y(x)) + xy(x), \quad x > -\frac{\epsilon}{r + \eta}, \quad (3.5)$$

$$\tau^* = \inf\{t: X_t \geq \bar{x}\}, \quad (3.6)$$

$$\begin{cases} c_t^* = (y(X_t))^{-\frac{1}{R_1}} \\ \pi_t^* = \frac{\theta}{\sigma} \left[c_2 m_- (m_- - 1) y(X_t)^{m_- - 1} + \frac{1 + \eta A^{\frac{1}{R_1}}}{M_1 R_1} y(X_t)^{-\frac{1}{R_1}} \right] \\ p_t^* = \eta \left(\frac{y(X_t)}{A} \right)^{-\frac{1}{R_1}} \end{cases} \quad (3.7)$$

여기서 $t < \tau$

여기서, c_2 와 $\underline{y} > 0$ 는 부록 A에 있는 연립방정식 (6.19)를 만족하는 상수이고, 함수 \tilde{y} 는 부록 A에 있는 식 (6.20)와 같이 주어지고, 함수 y 는 부록 A에서 식 (6.22)로 주어진 $(0, \infty)$ 에서 $(-\frac{\epsilon}{\eta+r}, \infty)$ 로의 단조감소함수이자 전단사함수인 x 의 역함수이고, $\bar{x} = x(\underline{y})$ 이고, $m_- < 0$ 는 2차 방정식 $m^2 + \left(\frac{2(\delta-r)}{\theta^2} - 1\right)m - \frac{2(\eta+\delta)}{\theta^2} = 0$ 의 음근이다.

Proof. 부록 A에 있음.

정리 3.1에서 경제 주체의 부가 임계치(\bar{x})에 이르자 마자 은퇴하는 것이 최적임을 알 수 있는데, 이는 경제주체의 부가 충분한 경우 노동임금이 총 부에서 차지하는 비중이 낮으므로 노동임금을 받는 것보다는 효용감소를 없애는 것이 더 최적이라는 점에서 직감적으로 합당한 결과라 할 수 있다.

4. 비교정태분석

이 장에서는 정리 3.1에 있는 은퇴 이전 최적 전략에 대한 비교정태분석을 하고 그것에 대한 재무경제학적 직감을 제시한다. 정리 3.1의 최적해가 폐쇄형(closed form)이긴 하지만 명시적(explicit)이진 않으므로 수치적 방법을 사용한다.

그림 <1, 2>는 순간사망위험율(η)에 변화에 따른 소비액과 위험자산 투자액의 변화를 나타낸 것이다. 그림에서 경제주체의 부가 0인 경우, 소비액과 위험자산 투자액 모두 순간사망위험율이 증가할수록 단조감소하는 경향을 보인다. 하지만 경제주체의 부가 높은 경우, 순간사망위험율이 낮을 때는 소비액과 위험자산 투자액이 감소하지만 순간사망위험율이 일정 수준 이상일 때에는 증가하는 것을 알 수 있다. 또한 그 일정 수준은 경제주체의 부가 높을수록 작은 값을 가진다는 것을 알 수 있다. 이러한 경향에 대한 재무경제학적 직감을 얻기 위해 순간위험사망율이 높아짐에 따라 소비액과 위험자산 투자액을 감소시키는 요인과 증가시키는 요인을 다음과 같이 분류할 수 있다.

- 감소 요인

- 순간사망위험율이 높아지면 노동임금의 현가 ($\epsilon/(r + \eta)$)가 낮아져 경제주체의 가용 총 부(total wealth)가 낮아지므로 소비액과 위험자산 투자액이 감소한다.

- 순간사망위험율이 높아지면 같은 보험료(p_t)에 대한 사망 시 유산(p_t/η)이 적어져 상속에 대한 한계효용(marginal utility)이 커지므로, 보험료를 많이 지불하여 사망 시 유산을 늘리게 되고 상대적으로 소비액과 위험자산 투자액을 줄이게 된다.

• 증가 요인

- 순간사망위험율이 높아지면 연금에 의한 부의 증가가 많아 잠재적 부가 커져서 소비액과 위험자산 투자액을 늘린다.

감소 요인의 한계 효과($-\epsilon/(r + \eta)^2$ 와 $-p_t/\eta^2$)는 순간사망위험율이 낮은 경우에는 크지만 순간사망위험율이 높은 경우에는 작아진다. 반면, 증가 요인의 한계 효과(x_t)는 주어진 부에 대해 일정하다. 그러므로, 그림에서와 같이 순간사망위험율이 낮은 구간에서는 소비액과 위험자산 투자액이 감소하고 높은 구간에서는 증가하는 경향을 보인다. 그런데, 경제주체의 부가 많을 때에는 노동임금의 현가가 총 부에서 차지하는 비중이 적고 또 보험료를 늘여도 가용 재산이 많아 소비액과 위험자산 투자액이 많이 줄지는 않아 감소요인의 효과는 약해지고, 증가 요인의 한계 효과(x_t)는 커지므로 그림에서와 같이 소비액과 위험자산 투자액이 감소에서 증가로 바뀌는 순간사망위험율 값이 부가 높을수록 작은 값을 가진다. 경제주체의 부가 0인 극단적인 경우, 소비액과 위험자산 투자액 모두 순간사망위험율이 증가할수록 단조감소만 하는 경향을 보인다.

그림 3은 순간사망위험율변화에 따른 보험료의 변화를 보여 준다. 순간사망위험율이 높아질수록 같은 보험료(p_t)에 대한 사망 시 유산(p_t/η)이 적어져 상속에 대한 한계효용(marginal utility)이 커지므로, 보험료를 많이 지불하게 된다는 위의 설명을 이 그림이 보여주고 있다. 이러한 경향은 경제주체의 부가 많을수록 더 강하게 나타난다. 즉, 부의 효과(wealth effect)가 나타난다. 왜냐하면, 가용할 수 있는 부가 많을수록 보험료는 많이 지불할 것이고 더구나 사망시 부는 연금기관이 가져가고 보험에 의한 유산만 남게 되기 때문이다. 그림에서 알 수 있듯이 경제주체의 부가 높을수록 순간사망위험율의 증가에 대한 보험료의 증가속도가 더 빠르다.

순간사망위험율이 높을수록 노동임금이 연금 수입에 비해 상대적으로 작다. 그러므로, 노동임금을 받는 것보다는 효용감소를 줄이는 것이 더 유익하다. 그러므로, 순간사망위험율이 높을수록 빨리 은퇴를 하고자 하는 경향이 있을 것이다. 즉, 순간사망위험율이 높을수록 은퇴를 하게 되는 부의 임계치(\bar{x})가 더 작아지게 된다. 그림 4가 이것을 보여주고 있다.

그림 <5, 6, 7, 8>는 상속효용함수의 계수 A 의 변화에 따른 은퇴 이전의 소비액, 위험자산 투자액, 보험료, 그리고 은퇴를 하게 되는 부의 임계치의 변화를 각각 보여준다. 상속효용함수의 계수 A 가 클수록 상속에 대한 한계효용($A\bar{X}^{-R_1}$)이 커진다. 그런데 상속에 대한 한계효용($A\bar{X}^{-R_1}$)이 커질수록 더 많은 유산을 남기고자 하므로 더 많은 보험료를 지불하게 될 것이므로 상대적으로 소비액과 위험자산 투자액은 줄게 될 것이다. 그리고, 많은 상속, 즉 많은 보험료 지불을 위해 효용감소보다는 부를 늘리는 것이 중요해지므로 경제주체는 늦게 은퇴하게 된다. 즉, 상속에 대한 한계효용($A\bar{X}^{-R_1}$)이 커질수록 은퇴를 하게 되는 부의 임계치가 더 높아진다. 이 그림들에서 이러한 것들을 확인할 수 있다.

그림<9, 10, 11, 12>는 은퇴 이후 위험회피계수의 변화에 따른 은퇴 이전의 소비액, 위험자산 투자액, 보험료, 그리고 은퇴를 하게 되는 부의 임계치의 변화를 각각 보여준다. 은퇴 이후의 위험에 대한 회피 경향이 클수록 그 위험을 빨리 없애기 위해 빨리 은퇴하려는 경향을 보일 것이다. 따라서 은퇴 이후의 위험에 대한 회피도가 클수록 은퇴를 하게 되는 부의 임계치가 낮아지고 이 임계치에 빨리 도달하기 위해 소비와 보험료는 줄이고 위험 자산에는 많은 투자를 함으로써 부를 빨리 축적하려 할 것이다. 이 그림들에서 이러한 경향을 볼 수 있다.

그림<13, 14, 15, 16>는 노동에 의한 효용 감소(l)의 변화에 대한 은퇴 이전의 소비액, 위험자산 투자액, 보험료, 그리고 은퇴를 하게 되는 부의 임계치의 변화를 각각 보여준다. 노동에 의한 효용 감소가 증가할수록 이를 빨리 없애기 위해 빨리 은퇴하려는 경향을 보일 것이다. 따라서 노동에 의한 효용 감소가 클수록 은퇴를 하게 되는 부의 임계치가 낮아지고 이 임계치에 빨리 도달하기 위해 소비와 보험료는 줄이고 위험 자산에는 많은 투자를 함으로써 부를 빨리 축적하려 할 것이다. 이 그림들에서 이러한 경향을 볼 수 있다. 그런데, 소비, 보험료, 위험 자산 투자에 대한 이러한 경향은 경제주체의 부가 낮을 때는 약하게 나타날 것이다. 왜냐 하면, 부가 낮을 때에는 노동 임금이 총 부에서 차지하는 비중이 높아 은퇴를 빨리 하려는 경향을 완화시키기 때문이다. 이 또한 그림들에서 확인할 수 있다.

5. 결론

본 연구에서는 수명의 불확실성 하에서 노동자인 경제주체의 최적 은퇴 시점, 생명보험 구입, 그리고 소비 및 투자에 관해 살펴보았다. 경제주체가 은퇴 이전에는 노동임금을 받지만 노동으로 인한 효용감소를 감수해야 하는 상충관계로 인해 최적은퇴 시점이 존재한다. 경제주체의 은퇴 전후로 소비 및 상속에 대한 상대위험회피계수도 변화하는 모형을 고려하였다. 경제 주체의 최적 은퇴 시점, 생명보험 구입, 그리고 소비 및 투자에 관한 최적해를 폐쇄형 형태(closed form solution)로 제시하였다. 최적 해에서, 경제 주체의 부가 어떤 임계치에 이르자마자 은퇴하는 것이 최적임을 알 수 있는데, 이는 경제주체의 부가 충분한 경우 노동임금이 총 부에서 차지하는 비중이 낮으므로 노동임금을 받는 것보다는 효용감소를 없애는 것이 더 최적이라는 점에서 직감적으로 합당한 결과라 할 수 있다. 최적 해에 대한 수치적 비교정태분석과 그 결과에 대한 재무경제학적 직감(intuition)을 제공하였다. 구체적으로 순간사망위험률(hazard rate), 상속에 대한 한계효용, 은퇴 후 소비 및 상속에 대한 위험회피도, 은퇴 이전 노동에 의한 효용감소 각각의 변화에 따른 최적 소비/투자/생명보험료와 은퇴 시점의 변화를 살펴보고 그것들에 대한 재무경제학적 직감을 제공하였다.

6. 부록 A

보조정리 3.1의 증명 상수 $y > 0$ 에 대해 $y_s \triangleq ye^{\delta s H_s}, s \geq 0$ 로 정의하자. 그러면, 정의 3.1 과 예산제약식 (3.1)에 의해, 모든 $(c, \pi, p) \in \mathcal{A}_a(x)$ 와 모든 $y > 0$ 에 대해서 다음 두 부등식이 성립한다.

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left[\int_0^\infty e^{-(\eta+\delta)s} u_2(c_s) + \eta e^{-(\eta+\delta)s} w_2(\bar{X}_s) ds \right] \\
& \leq \mathbb{E} \left[\int_0^\infty e^{-(\eta+\delta)s} \tilde{u}_2(y_s) + \eta e^{-(\eta+\delta)s} \tilde{w}_2(y_s) ds \right] \\
& \quad + \mathbb{E} \left[\int_0^\infty e^{-(\eta+\delta)s} y_s c_s + \eta e^{-(\eta+\delta)s} y_s \bar{X}_s ds \right] \\
& = \mathbb{E} \left[\int_0^\infty e^{-(\eta+\delta)s} \tilde{u}_2(y_s) + \eta e^{-(\eta+\delta)s} \tilde{w}_2(y_s) ds \right] \\
& \quad + y \mathbb{E} \left[\int_0^\infty e^{-\eta s} H_s c_s + \eta e^{-\eta s} H_s \bar{X}_s ds \right]
\end{aligned} \tag{6.1}$$

$$\leq J_a(y) + yx \tag{6.2}$$

여기서, J_a 는 노동임금이 없는 경우의 쌍대 가치 함수(dual value function)이다. 즉,

$$J_a(y) \triangleq \mathbb{E} \left[\int_0^\infty e^{-(\eta+\delta)s} \{\tilde{u}_2(y_s) + \eta \tilde{w}_2(y_s)\} ds \right] \tag{6.3}$$

부등식 (6.1)이 등식으로 성립할 필요충분조건은 정의 3.1 에 의해 다음과 같다.

$$c_s = I_{u_2}(y_s) = y_s^{-\frac{1}{R_2}} \quad \text{and} \quad \bar{X}_s = I_{w_2}(y_s) = \left(\frac{y_s}{A} \right)^{-\frac{1}{R_2}}.$$

부등식 (6.2)가 등식으로 성립할 필요충분조건은 정적 예산제약식 (3.1)이 등호로서 성립하는 것이다. 참고문헌 [7, 8, 14]에서와 같은 방법으로 다음과 같은 식이 성립함을 보일 수 있다.

$$V_a(x) = \inf_{y>0} [J_a(y) + yx] \tag{6.4}$$

또한, 쌍대 변수 y 가 식 (6.4)의 최소화 조건을 만족하는 경우 정적 예산제약식 (3.1)이 등호로서 성립하여 부등식 (6.2)가 등식으로 성립함도 보일 수 있다.

$\tilde{u}_2(y) = \frac{R_2}{1-R_2} y^{\frac{R_2-1}{R_2}}$ 이고 $\tilde{w}_2(y) = A^{\frac{1}{R_2}} \frac{R_2}{1-R_2} y^{\frac{R_2-1}{R_2}}$ 이라는 사실과 푸비니 정리(Fubini Theorem)를 이용하여 다음과 같이 쌍대가치함수를 계산할 수 있다.

$$J_a(y) = \left[\left(1 + \eta A^{\frac{1}{R_2}} \right) / M_2 \right] [R_2 / (1 - R_2)] y^{(R_2-1)/R_2} \tag{6.5}$$

따라서, 식 (6.4)의 최소화 조건(일계조건)을 만족하는 쌍대 변수 y^* 는 다음과 같다.

$$y^* = \left[\frac{M_2 x}{\left(1 + \eta A^{\frac{1}{R_2}} \right)} \right]^{-R_2} \tag{6.6}$$

식 (6.4)에 이를 반영함으로써 식 (3.2)가 성립함을 알 수 있다.

정리 3.1의 증명) 보조정리 3.1의 증명에서와 같이 상수 $y > 0$ 에 대해 $y_s \triangleq ye^{\delta s}H_s, s \geq 0$ 로 정의하자. 그러면, 정의 3.1, 식 (3.3), 그리고 예산제약식 (3.4)에 의해, 모든 $(c, \pi, p, \tau) \in \mathcal{A}(x)$ 와 모든 $y > 0$ 에 대해서 다음 두 부등식이 성립한다.

$$\mathbb{E} \left[\int_0^\tau \{ e^{-(\eta+\delta)t} u_1(c_t) + \eta e^{-(\eta+\delta)t} w_1(\bar{X}_t) \} dt + e^{-(\eta+\delta)\tau} V_a(X_\tau) \right] \quad (6.7)$$

$$\begin{aligned} &\leq \mathbb{E} \left[\int_0^\tau e^{-(\eta+\delta)t} \{ \tilde{u}_1(y_t) + \eta \tilde{w}_1(y_t) + \epsilon y_t \} dt + e^{-(\eta+\delta)\tau} \tilde{V}_a(y_\tau) \right] \\ &\quad + \mathbb{E} \left[\int_0^\tau e^{-(\eta+\delta)t} \{ y_t(c_t - \epsilon) + y_t \bar{X}_t \} dt + e^{-(\eta+\delta)\tau} y_\tau X_\tau \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\int_0^\tau e^{-(\eta+\delta)t} \{ \tilde{u}_1(y_t) + \eta \tilde{w}_1(y_t) + \epsilon y_t \} dt + e^{-(\eta+\delta)\tau} \tilde{V}_a(y_\tau) \right] \\ &\quad + y \mathbb{E} \left[\int_0^\tau e^{-\eta t} \{ H_t(c_t - \epsilon) + \eta H_t \bar{X}_t \} dt + e^{-\eta \tau} H_\tau X_\tau \right] \\ &\leq J(y) + yx. \end{aligned} \quad (6.8)$$

여기서, J 는 다음과 같이 정의된다.

$$J(y) \triangleq \mathbb{E} \left[\int_0^\tau e^{-(\eta+\delta)t} \{ \tilde{u}_1(y_t) + \eta \tilde{w}_1(y_t) + \epsilon y_t \} dt + e^{-(\eta+\delta)\tau} \tilde{V}_a(y_\tau) \right] \quad (6.9)$$

부등식 (6.7)이 등식으로 성립할 필요충분조건은 정의 3.1 과 식 (3.3)에 의해 다음과 같다.

$$\begin{aligned} c_t &= I_{u_1}(y_t) = y_t^{-\frac{1}{R_1}}, \quad \bar{X}_t = I_{w_1}(y_t) = \left(\frac{y_t}{A} \right)^{-\frac{1}{R_1}}, \\ X_\tau &= \left(\frac{y_\tau}{K} \right)^{-\frac{1}{R_2}}. \end{aligned} \quad (6.10)$$

부등식 (6.8)가 등식으로 성립할 필요충분조건은 정적 예산제약식 (3.4)이 등호로서 성립하는 것이다. 참고문헌 [8]에서와 같은 방법으로, 쌍대 변수 y 가 $J(y) + yx$ 를 최소화시키는 경우 정적 예산제약식 (3.1)이 등호로서 성립하여 부등식 (6.8)가 등식으로 성립함도 보일 수 있다. 또한, 다음과 같은 식이 성립함을 보일 수 있다.

$$V(x) = \inf_{y>0} [J(y) + yx] \quad (6.11)$$

여기서, J 는 가치함수 V 에 상응하는 쌍대가치함수이다. 즉,

$$\tilde{J}(y) \triangleq \sup_{\tau} J(y) \quad (6.12)$$

참고문헌 [8]에서와 같이 어떤 임계치 $\underline{y} > 0$ 가 존재하여 $y_t \leq \underline{y}$ 가 되자마자 은퇴하는 것이 최적이라 예상하고(아래 식 (6.16)) 다음의 경계조건을 가진 변동부등식을 고려하자.

$$-(\eta + \delta)J + y(\delta - r) \frac{\partial J}{\partial y} + \frac{1}{2}y^2\theta^2 \frac{\partial^2 J}{\partial y^2} + \tilde{u}_1(y) + \eta\tilde{w}_1(y) + y\epsilon = 0, \quad \underline{y} < y < \infty \quad (6.13)$$

$$-(\eta + \delta)J + y(\delta - r) \frac{\partial J}{\partial y} + \frac{1}{2}y^2\theta^2 \frac{\partial^2 J}{\partial y^2} + \tilde{u}_1(y) + \eta\tilde{w}_1(y) + y\epsilon \leq 0, \quad 0 < y < \underline{y} \quad (6.14)$$

$$J(y) \geq \tilde{V}_a(y), \quad \underline{y} < y < \infty \quad (6.15)$$

$$J(y) = \tilde{V}_a(y), \quad 0 < y < \underline{y} \quad (6.16)$$

$$J \in C^1(0, \infty) \cap C^2\left(\left(0, \underline{y}\right) \cup \left(\underline{y}, \infty\right)\right) \quad (6.17)$$

식 (6.13)의 일반해는 다음과 같다.

$$C_1 y^{m_+} + C_2 y^{m_-} + \frac{1 + \eta A^{1/R_1}}{M_1} \frac{R_1}{1 - R_1} y^{\frac{R_1-1}{R_1}} + \frac{\epsilon}{\eta + r} y - \frac{l}{\eta + \delta} \quad (6.18)$$

$m_+ > 1$ 와 $m_- < 0$ 는 방정식 $m^2 + \left(\frac{2(\delta-r)}{\theta^2} - 1\right)m - \frac{2(\eta+\delta)}{\theta^2} = 0$ 의 두 근이다. $m_+ > 1$ 이므로 y^{m_+} 이 y 보다 더 급격하게 증가한다. 따라서 $C_1 = 0$ 로 둔다. 참고문헌 [8]에서와 같은 방법으로, \tilde{J} 는 식 (6.18)의 $C_1 = 0$ 인 형태를 가지며 조건 (6.14), (6.15), (6.16), (6.17)을 만족시키는 함수임을 보일 수 있다.

조건 (6.17)에 의해 다음과 같은 두 식을 얻는다.

$$\begin{cases} C_2 \underline{y}^{m_-} + \frac{1 + \eta A^{\frac{1}{R_1}}}{M_1} \frac{R_1}{1 - R_1} \underline{y}^{\frac{R_1-1}{R_1}} + \frac{\epsilon}{\eta + r} \underline{y} - \frac{l}{\eta + \delta} = K^{\frac{1}{R_2}} \frac{R_2}{1 - R_2} \underline{y}^{\frac{R_2-1}{R_2}} \\ C_2 m_- \underline{y}^{m_-} - \frac{1 + \eta A^{\frac{1}{R_1}}}{M_1} \frac{R_1-1}{R_1} \underline{y}^{\frac{R_1-1}{R_1}} + \frac{\epsilon}{\eta + r} \underline{y} = -K^{\frac{1}{R_2}} \underline{y}^{\frac{R_2-1}{R_2}} \end{cases} \quad (6.19)$$

위 두 식을 통해 구해진 상수 C_2 와 경계조건 \underline{y} 로서

$$\tilde{J}(y) = \begin{cases} C_2 y^{m_-} + \frac{1 + \eta A^{\frac{1}{R_1}}}{M_1} \frac{R_1}{1 - R_1} y^{\frac{R_1 - 1}{R_1}} + \frac{\epsilon}{\eta + r} y - \frac{l}{\eta + \delta}, & \underline{y} < y < \infty \\ \tilde{V}_a(y), & 0 < y \leq \underline{y} \end{cases} \quad (6.20)$$

이고 \tilde{J} 식 (6.16)를 만족한다는 사실과 마코비안 성질에 의해 최적의 은퇴 시점 τ^* 는 다음과 같다.

$$\tau^* = \inf\{t: y_t \leq \underline{y}\} \quad (6.21)$$

식 (6.11)의 최소화 조건으로부터 쌍대변수 y 와 경제주체의 초기 부 x 사이에는 $x(y) \triangleq -\tilde{J}'(y) = x$ 의 관계식이 성립한다. 그런데,

$$x(y) = \begin{cases} -C_2 m_- y^{m_- - 1} + \frac{1 + \eta A^{\frac{1}{R_1}}}{M_1} y^{-\frac{1}{R_1}} - \frac{\epsilon}{\eta + r}, & \underline{y} < y < \infty \\ K^{\frac{1}{R_2}} y^{-\frac{1}{R_2}}, & 0 < y \leq \underline{y} \end{cases} \quad (6.22)$$

는 $(0, \infty)$ 에서 $(-\frac{\epsilon}{\eta + r}, \infty)$ 로 가는 단조감소함수이자 전단사함수이다. 그러므로 그 역함수 $y: (-\frac{\epsilon}{\eta + r}, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ 가 존재하며 이 역함수도 단조증가함수이자 전단사함수이다. $\bar{x} \triangleq x(y)$ 라 하자. 즉, $y(\bar{x}) = y$. 계산에 의해 $\bar{x} > 0$ 임을 확인할 수 있다. 식 (6.11)의 최소화 조건은 아래와 같이 다시 쓰여질 수 있다.

$$y = \mathcal{Y}(x). \quad (6.23)$$

마코비안 성질에 의해 은퇴 이전 최적 전략 하에서 시점 $t \leq \tau$ 에서의 쌍대변수 y_t 와 경제주체의 부 X_t 사이에는 다음 관계식이 성립한다.

$$y_t = \mathcal{Y}(X_t). \quad (6.24)$$

$y_t \leq y \Leftrightarrow X_t \geq \bar{x}$ 이므로 식 (6.21)의 최적은퇴 시점은 (3.6)과 같이 다시 쓰여질 수 있다.

식 (6.23)를 식 (6.11)에 대입하면 식 (3.5)을 얻는다. 식 (6.10)와 (6.24)에 의해 은퇴 이전 최적 소비 및 생명보험 보험전략은 식 (3.7)에서와 같다. 식 (6.24)과 동치인 $X_t = x(y_t)$ 에 $dy_t = (\delta - r)y_t dt - \theta y_t dB_t$ 를 사용하여 이토 공식(Itô's rule)을 적용하면 dX_t 를 계산할 수 있는데 이것의 dB_t 의 계수는 식 (2.1)에서의 dB_t 의 계수인 $\sigma\pi_t$ 와 같아야 한다. 이 등식 조건을 이용하면 은퇴 이전 최적 위험자산 투자는 식 (3.7)에서와 같다는 것을 알 수 있다.

7. 부록 B

이 장에서는 4 장의 비교정태분석에 해당하는 그림들을 보여준다. 그림들에서 사용된 고정상수들의 값은 다음과 같다.

<표 1> η 를 변화시키는 경우

| δ | r | μ | σ | θ | ϵ | R_1 | R_2 | A | l |
|----------|------|-------|----------|----------|------------|-------|--------|--------|--------|
| 0.07 | 0.03 | 0.1 | 0.2 | 0.35 | 1 | 3 | 2.7368 | 0.9474 | 0.0526 |

<표 2> A 를 변화시키는 경우

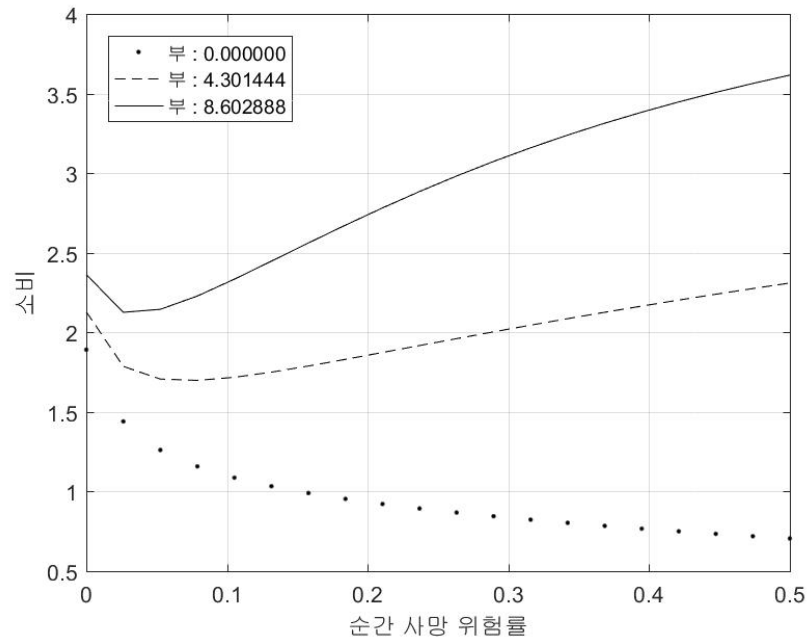
| δ | r | μ | σ | θ | ϵ | R_1 | R_2 | η | l |
|----------|------|-------|----------|----------|------------|-------|--------|--------|--------|
| 0.07 | 0.03 | 0.1 | 0.2 | 0.35 | 1 | 3 | 2.7368 | 0.2368 | 0.0526 |

<표 3> R_2 를 변화시키는 경우

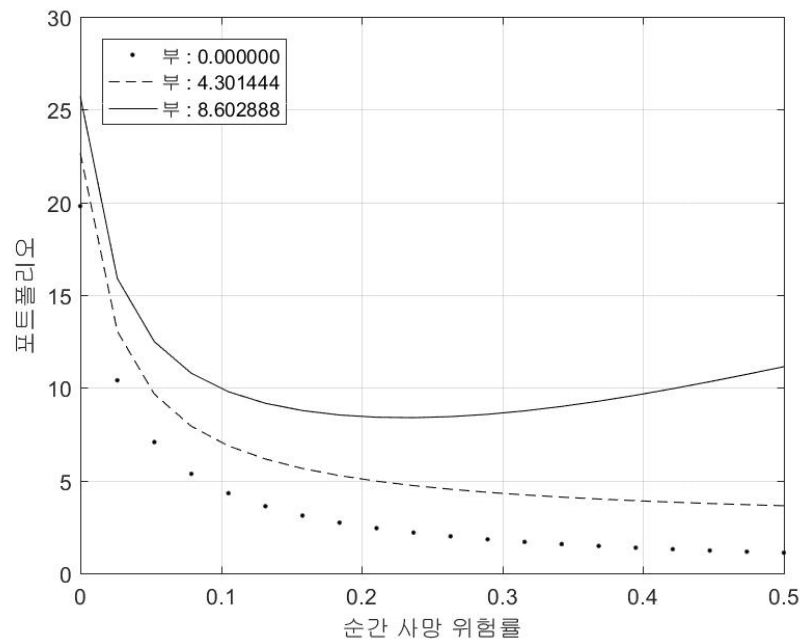
| δ | r | μ | σ | θ | ϵ | R_1 | η | A | l |
|----------|------|-------|----------|----------|------------|-------|--------|--------|--------|
| 0.07 | 0.03 | 0.1 | 0.2 | 0.35 | 1 | 3 | 0.2368 | 0.9474 | 0.0526 |

<표 3> l 을 변화시키는 경우

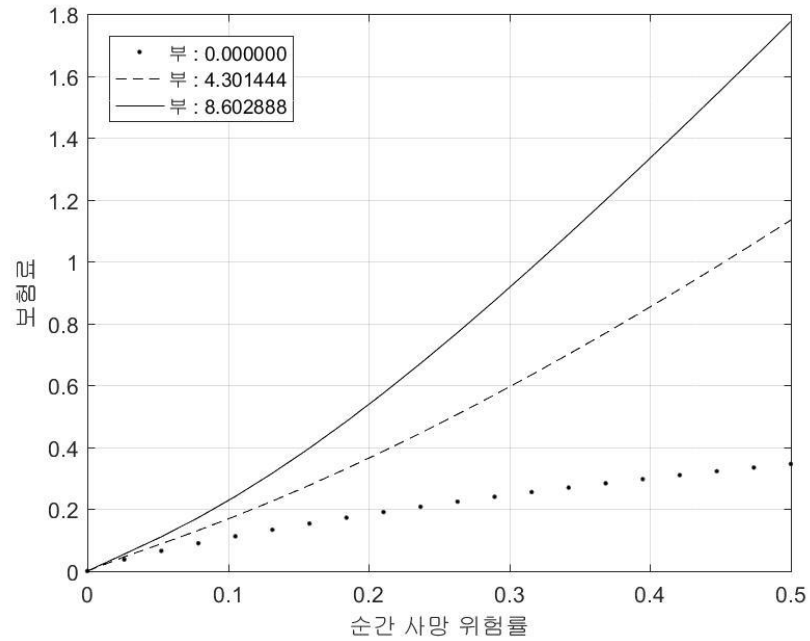
| δ | r | μ | σ | θ | ϵ | R_1 | R_2 | A | η |
|----------|------|-------|----------|----------|------------|-------|--------|--------|--------|
| 0.07 | 0.03 | 0.1 | 0.2 | 0.35 | 1 | 3 | 2.7368 | 0.9474 | 0.2368 |



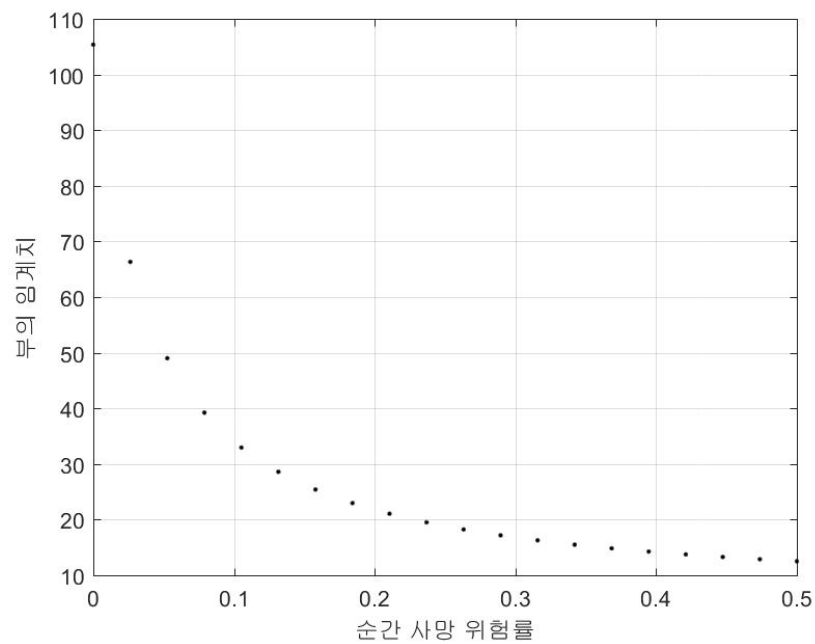
<그림 1> 순간사망 위험률 η 의 변화에 대한 소비의 변화



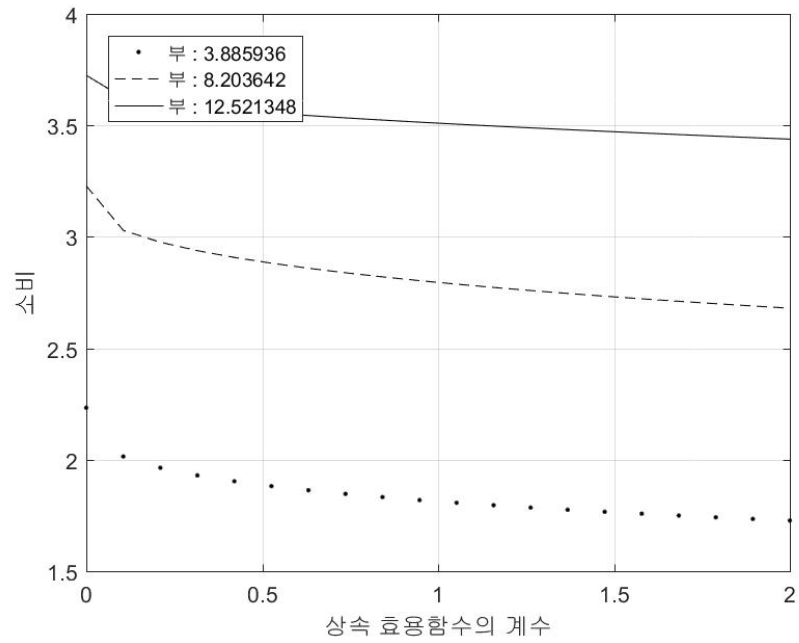
<그림 2> 순간사망 위험률 η 의 변화에 대한 위험자산 포지션의 변화



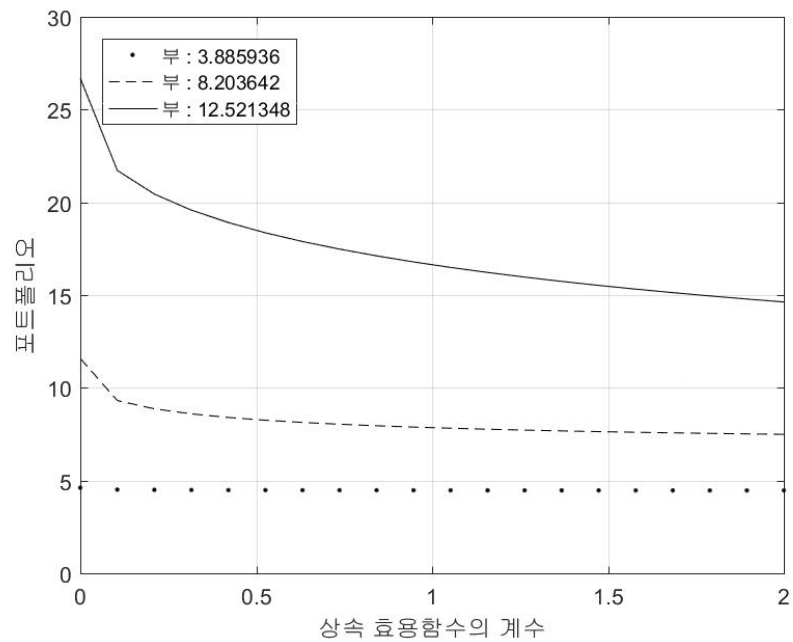
<그림 3> 순간사망 위험율 η 의 변화에 대한 보험료의 변화



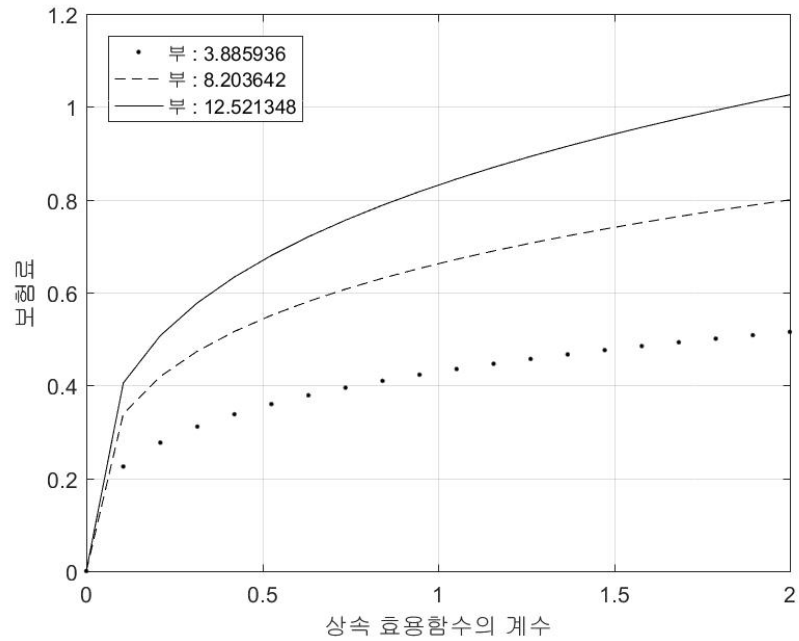
<그림 4> 순간사망 위험율 η 의 변화에 대한 부의 은퇴 임계치 변화



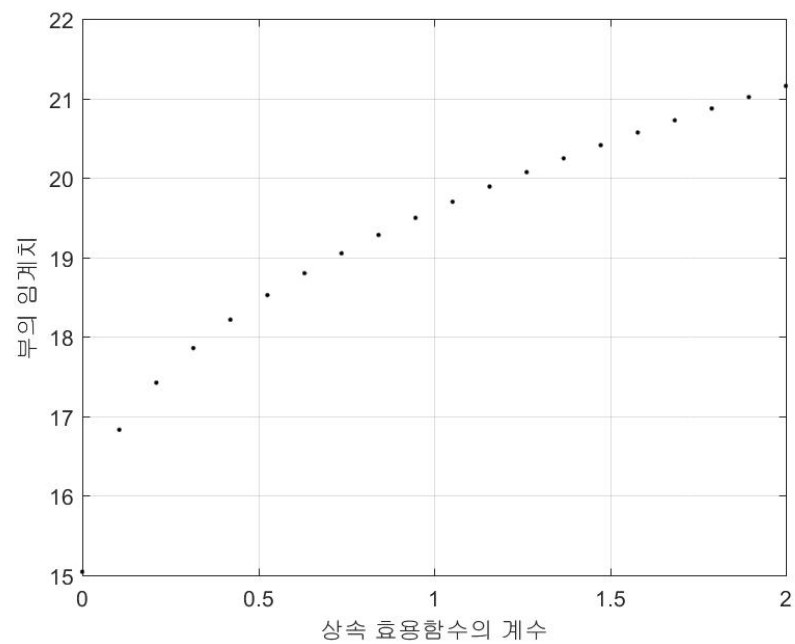
<그림 5> 상속함수의 계수의 변화에 대한 소비의 변화



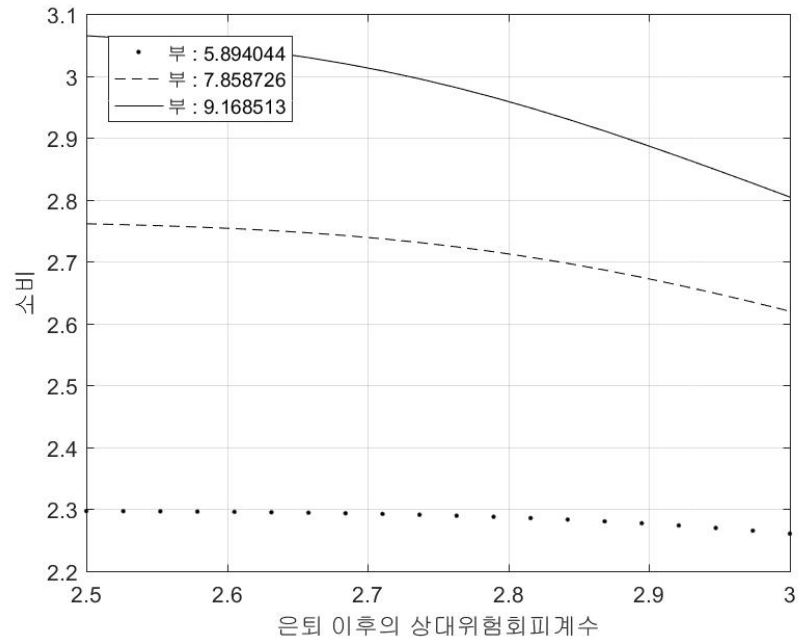
<그림 6> 상속함수의 계수의 변화에 대한 위험자산 포지션의 변화



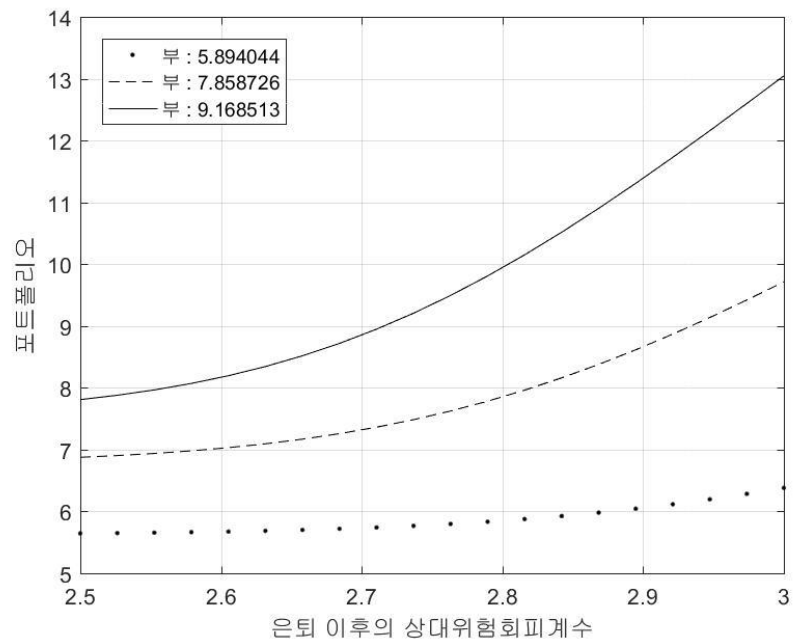
<그림 7> 상속함수의 계수의 변화에 대한 보험료의 변화



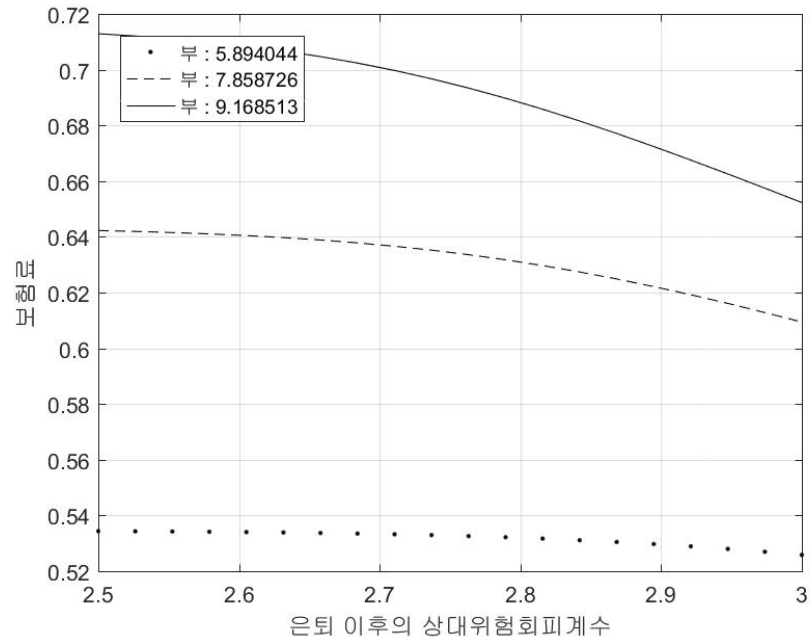
<그림 8> 상속함수의 계수의 변화에 대한 부의 은퇴 잉계치 변화



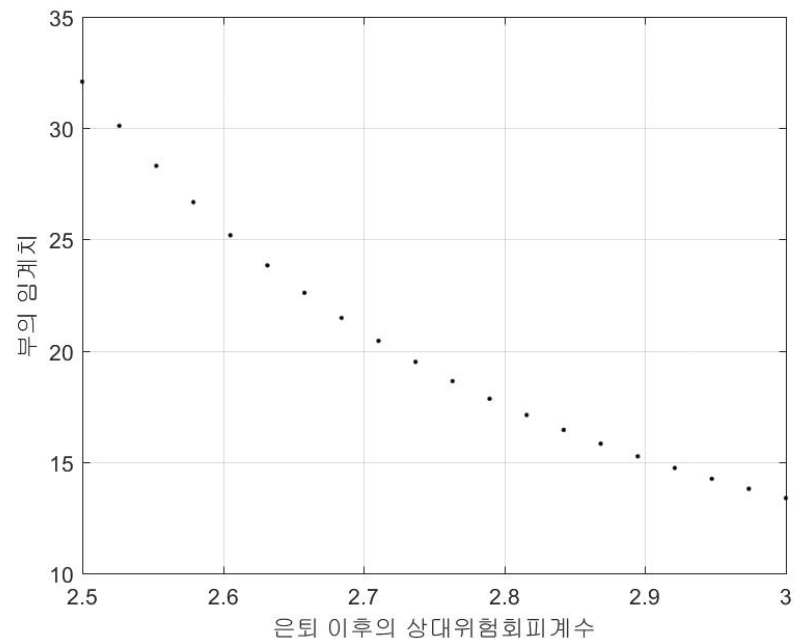
<그림 9> 은퇴 이후의 상대위험회피 계수의 변화에 대한 소비의 변화



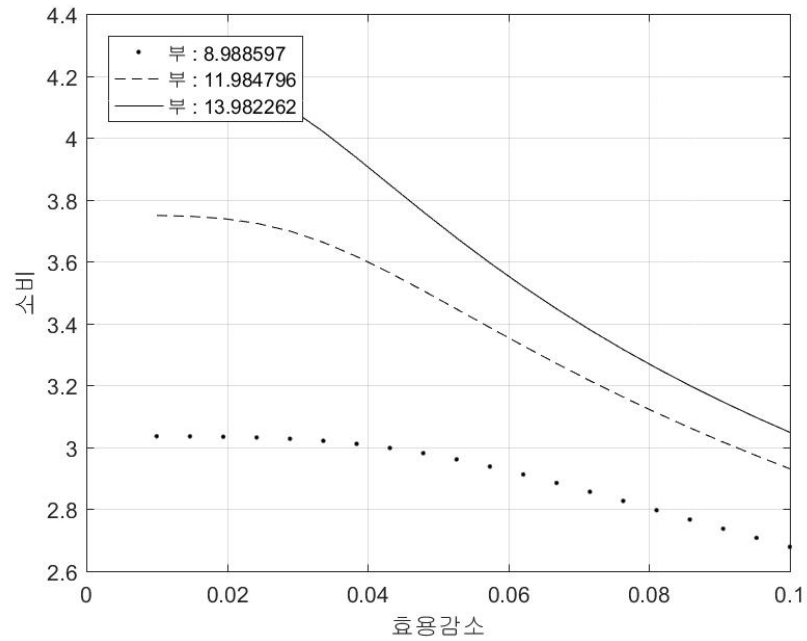
<그림 10> 은퇴 이후의 상대위험회피 계수의 변화에 대한 위험자산 포지션의 변화



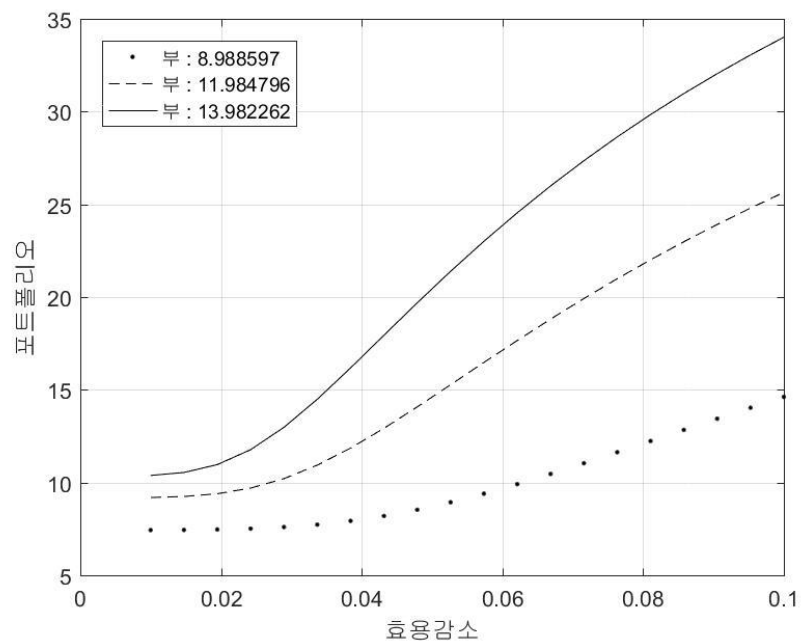
<그림 11> 은퇴 이후의 상대위험회피 계수의 변화에 대한 보험료의 변화



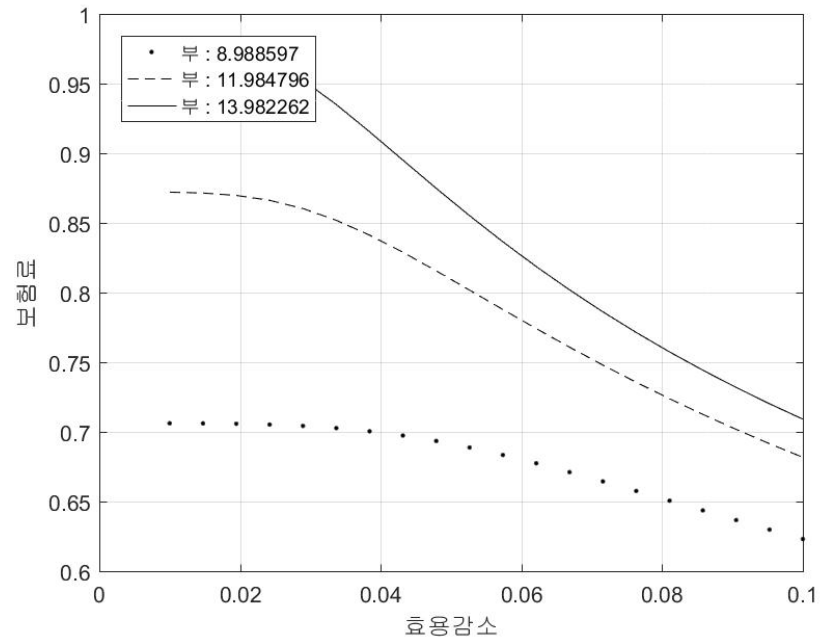
<그림 12> 은퇴 이후의 상대위험회피 계수의 변화에 대한 부의 은퇴 임계치 변화



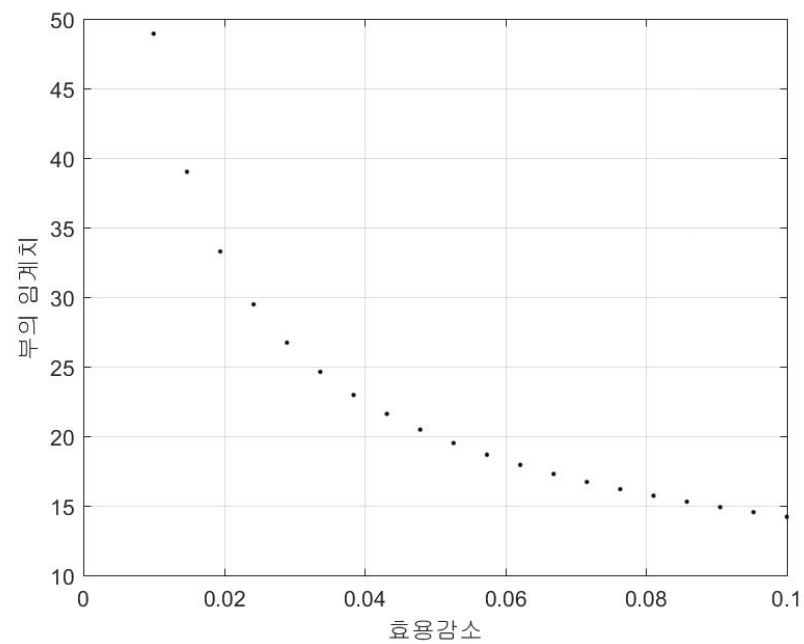
<그림 13> 노동에 의한 효용 감소 정도의 변화에 대한 소비의 변화



<그림 14> 노동에 의한 효용 감소 정도의 변화에 대한 위험자산 포지션의 변화



<그림 15> 노동에 의한 효율 감소 정도의 변화에 대한 보험료의 변화



<그림 16> 노동에 의한 효율 감소 정도의 변화에 대한 부의 은퇴 임계치 변화

참 고 문 헌

- [1] Choi, K. J. and H. K. Koo, "A preference change and discretionary stopping in a consumption and portfolio selection problem," *Mathematical Methods of Operations Research*, Vol.61, No.3(2005), pp. 419-435.
- [2] Choi, K.J. and G. Shim, "Disutility, optimal retirement and portfolio selection," *Mathematical Finance*, Vol.16, No.2(2006), pp. 443-467.
- [3] Choi, S., S. Kim, and G. Shim, "Effect of lifetime uncertainty on consumption/investment with luxury bequest motives," *Finance Research Letters*, Vol.17(2016), pp. 275-279.
- [4] Farhi, E. and S. Panageas, "Saving and investing for early retirement: A theoretical analysis," *Journal of Financial Economics*, Vol 83, No.1(2007), pp. 87-121.
- [5] Hakansson. N.H., "Optimal investment and consumption strategies under risk, an uncertain lifetime, and insurance," *International Economic Review*, Vol.10, No.3(1969), pp. 443-466.
- [6] Jang, B., S. Park, and Y. Rhee, "Optimal retirement with unemployment risks," *Journal of Banking & Finance*, Vol.37, No.9(2013), pp. 3585-3604.
- [7] Karatzas, I. and S. E. Shreve, *Methods of mathematical finance*(Vol. 39, pp. xvi+-407), Springer, New York, 1998.
- [8] Karatzas, I. and H. Wang, "Utility maximization with discretionary stopping," *SIAM Journal on Control and Optimization*, Vol.39, No.1(2000), pp. 306-329.
- [9] Merton, R.C., "Lifetime portfolio selection under uncertainty: The continuous-time case," *The review of Economics and Statistics*, Vol.51, No.3(1969), pp. 247-257.
- [10] Merton, R.C., "Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model," *Journal of economic theory*, Vol.3, No.4(1971), pp. 373-413.
- [11] Pliska, S.R. and J. Ye, "Optimal life insurance purchase and consumption/investment under uncertain lifetime," *Journal of Banking and Finance*, Vol.31, No.5(2007), pp. 1307-1319.
- [12] Richard, S.F., "Optimal consumption, portfolio and life insurance rules for an uncertain lived individual in a continuous time model," *Journal of Financial Economics*, Vol.2, No.2(1975), pp. 187-203.
- [13] Yarri, M.E., "Uncertain lifetime, life insurance, and the theory of the consumer," *The Review of Economic Studies*, Vol.32, No.2(1965), pp. 137-150.
- [14] Ye, J. "Optimal life insurance, consumption and portfolio under uncertainty: martingale methods," *Proceedings of the 2007 American Control Conference*, 1103-1109.
- [15] Ye, J. "Optimal life insurance, consumption and portfolio: A dynamic programming approach," *Proceedings of the 2008 American Control Conference*, 1103-1109.
- [16] Ye, J. "A numerical method for a continuous-time insurance-consumption-investment model, *Proceedings of 2010 American Control Conference*, 6897-6903.