

KOSPI200 섹터지수를 이용한 최적성장포트폴리오(GOP) 실증분석

이정호*, 이용웅**

KOSPI200 섹터지수를 이용한 최적성장포트폴리오(GOP) 실증분석

- 28 매 -

[요약]

본 연구는 최적성장포트폴리오 모형을 우리나라 KOSPI200 섹터지수에 적용하여 포트폴리오를 구성하고 운용성과를 분석하였다. 2010년 7월부터 2019년 3월까지의 수익률 자료를 사용하였으며, Markowitz가 제시한 기하평균 최대화 식을 이용하여 섹터별 투자비중을 구하였다. 주요 결과는 다음과 같다. 첫째, 기하 평균 수익률을 최대화하는 최적성장포트폴리오의 수익률은 KOSPI200수익률 대비 양의 초과 누적 수익률을 제공하였다. 둘째, 최적성장포트폴리오를 구성하기 위해 선택된 최적의 모수 추정 기간(9개월)과 보유 기간(2개월)은 모수 추정 기간 동안 수익률이 높은 섹터일수록 보유 기간 동안 수익률이 높은 모멘텀 현상이 유의함을 보여주었다. 셋째, 최적의 모수 추정 기간과 보유 기간 및 각 섹터의 투자 한도 조건 내에서 구한 최적성장포트폴리오의 수익률은 Fama-French의 3요인과 시장 모멘텀 효과를 통제한 후에도 양의 유의적인 위험조정 초과 수익률을 보여주었다. 넷째, 최적의 조건하에서 공매도 비율의 증가는 추가적인 초과수익률의 증가를 제공하였으나 공매도 비율이 일정수준 이상에서는 수익률이 오히려 감소하였으며 이 결과는 증권시장선(SML)이 레버리지 비율에 따라 선형으로 증가하지 않고 일정수준 이상에서는 아래로 휘는 모습을 나타냄을 지지한다.

주제어: 최적성장포트폴리오(GOP), Kelly기준, KOSPI200섹터지수, 모멘텀효과, 공매도, Fama-French 3요인 모형

* 제1저자/교신저자, 02450 서울특별시 동대문구 이문로 107 한국외국어대학교;
E-mail: kowave00@naver.com; 전화: 02-3770-1329

** 공동저자, 17035 경기도 용인시 처인구 모현읍 외대로 81 한국외국어대학교;
E-mail: ywlee@hufs.ac.kr; 전화: 031-330-4516

I. 서론

이 논문은 최적성장포트폴리오(growth optimal portfolio, 이하 GOP) 모형을 국내 증권시장의 KOSPI200 섹터지수에 적용하여 최적성장포트폴리오를 구성하고 운용성과를 실증분석 하는 것이다. 최적성장포트폴리오 모형은 장기적으로 최종 자산의 가치를 최대화 하는 포트폴리오의 투자 비중을 구하는 이론이며 최종 자산가치의 최대화는 투자수익률의 기하평균을 최대화하는 포트폴리오를 구하는 과정에서 유도 된다.

투자수익률의 기하평균을 최대화하는 최적포트폴리오를 구하는 이론은 Kelly(1956)의 논문에서 시작 되었다(김규태 외 2012). Larson(1986)에 의하면 GOP모형에 의한 투자비중의 결정은 다음과 같은 장점이 있는 것으로 알려져 있다. 첫째, 자산의 지수적 성장률을 최대로 하는 투자비중이다. 둘째, 투자기간을 무한히 연장할 때 가장 높은 자산의 성장률을 나타내므로 점근적(asymptotic)으로 가장 우월한 투자비중이다. 셋째, 주어진 기간 내에 자산의 가치를 최대로 높일 수 있는 투자비중이며, 넷째로 GOP모형은 목표한 자산의 증가를 가장 빨리 실현할 수 있는 투자비중을 제공한다.

GOP모형에 대한 해외의 실증연구로는 다우산업지수(DJIA)에 포함된 30개의 주식종목을 이용한 Hunt(2005), 전 세계 104개의 주식섹터데이터를 이용한 Truc Le et al (2006) 등의 연구가 있는데 기존의 평균분산모형(Mean Variance Model, 이하 MV모형)에 대비하여 GOP모형이 수익률 면에서 우수함을 주장하고 있다. 국내 연구로 GOP에 대한 연구자료는 많지 않고, 특히 우리나라 주식시장의 섹터지수를 대상으로 GOP모형을 이용한 전략의 효과를 분석한 연구는 발견하지 못하였다.

GOP모형이 KOSPI200지수 대비 초과수익률이 달성되는지 실증분석하는 연구에서는 데이터의 분석기간과 모수의 추정기간에 대한 조건, 보유기간에 대한 조건, KOSPI200을 구성하는 각 섹터의 시가총액을 고려한 투자의 제약조건, 그리고 공매도(short sale)의 제약 조건에 따라 매우 많

은 경우의 수가 발생한다.

본 연구는 이러한 여러 가지 제약조건 아래에서 GOP를 구성하고, GOP의 수익률이 KOSPI200지수 대비 과연 양의 유의적인 위험조정 초과수익률을 가지는지 Fama-French(1993)의 3요인과 시장 모멘텀 효과를 통제한 후 검증해 본다.

본 연구의 실증분석 결과 및 차별성은 다음과 같다.

첫째, 기하 평균 수익률을 최대화하는 GOP는 KOSPI200수익률 대비 양의 초과 누적 수익률을 나타내었다. 본 연구에서는 KOSPI200지수를 구성하는 각 섹터별로 최저와 최고 투자 비중에 대한 제약조건을 부여하여 분석하였고, GOP를 통해 구해진 섹터별 투자비중과 각 섹터별 시장 비중의 평균값을 이용한 포트폴리오를 구성하여 투자비중의 급격한 비중의 변화를 줄이는 방법을 포함하여 분석하였다. 이와 같이 GOP의 유용성을 유지하면서도 현실에 적용 가능성을 높여 분석하였으며 각 경우의 GOP는 KOSPI200지수 대비 높은 샤프비율을 나타내며 연평균 3.27%이상의 초과수익률을 달성하였다.

둘째, 모수의 추정기간을 3개월에서 36개월까지 변동하고 보유기간을 1개월에서 3개월 까지 변동하는 36가지 조합의 경우를 분석한 결과 모수 추정기간이 9개월이고 보유 기간이 2개월일 때 가장 높은 수익률을 보여 주었다. 이 과정에서 모수 추정 기간 동안 수익률이 높은 섹터일수록 보유 기간 동안 수익률이 높은 모멘텀 현상이 나타나고 중기적으로는 역모멘텀 현상이 나타남을 발견하였다.

셋째, 모멘텀 효과가 발견되는 최적의 모수 추정 기간과 보유 기간 조건 및 각 섹터의 투자 한도 조건 내에서 GOP에 의한 초과 수익률은 Fama-French의 3요인과 시장 모멘텀 효과를 통제한 후에도 양의 유의적인 위험조정 초과 수익률을 나타내었고 모멘텀의 계수는 비유의적이었다. 한편, 중기적으로 역모멘텀 효과가 발견되는 모수추정기간이 18개월인 경

우의 GOP 결과는 위험조정 초과수익률과 모멘텀의 계수 모두 유의하지 않음을 나타내었다. 이것은 GOP에서 나타나는 초과수익률이 기존의 모멘텀 효과와는 다른 것임을 의미한다.

넷째, 단기 모멘텀 효과를 고려하여 선택된 최적의 모수추정기간과 보유기간 조건하에서 공매도 비율을 계속 확대할 경우 수익률이 선형으로 증가하다가 일정수준 이상에서는 오히려 감소함을 발견하였다. 이는 단순한 Kelly(1956)에서와 같이 승률에 대한 기댓값이 양의 값을 갖는다고 하더라도 투자 비중이 최적 수준을 초과하면서 부터는 기대수익률이 감소하는 것과 마찬가지로, 모멘텀 효과를 고려한 최적의 모수추정기간과 보유기간을 찾았다고 하더라도 적정 공매도 허용 비율이 존재한다는 것을 의미한다.

본 연구에서는 GOP모형의 실증분석과정에서 우리나라 주식시장에 단기 모멘텀 효과가 존재함을 발견하였으며, 이에 따라 단기 모멘텀 효과를 고려하여 분석을 진행하였고, 섹터별 투자비중의 한도를 현실에 적용 가능하도록 통제 후 연구를 진행하였다는 점이 다른 GOP 모형의 실증연구와의 차별점을 가진다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. II장의 문헌연구에 이어 III장에서는 연구방법에 대하여 기술하고, IV장에서는 실증분석의 과정과 관찰된 결과를 기술한다. V장에서는 실증분석결과를 요약하고 연구결과의 기여 및 시사점을 제시한다.

II. 문헌연구

Kelly(1956)는 불확실한 정보를 가진 도박사(gambler)가 합리적 인간의 본성에 따라 자산을 최대지수성장 할 수 있도록 하는 최적 투자비중을 설명하였다. 단순한 예를 들어 설명하자면, 만일 원판에 다트(dart)를 던

져서 55%의 확률로 투자금액 만큼을 벌고(이길 확률 $p=55\%$), 나머지 45%의 확률로 투자금액을 모두 잃는 게임을 한다고 할 때, 이 게임에서 장기적으로 투자금액의 가치를 최대화 하려면 Kelly기준(Kelly criterion)으로 $2 \times p - 1 = 2 \times 0.55 - 1 = 0.1$, 즉 가진 돈의 10%만큼을 지속적으로 투자할 때 장기적으로 최적의 성과를 낼 수 있다는 논리이다.[부록 Kelly 기준 참조]

Thorp(1966)는 카지노 게임에서 Kelly기준을 이용하여 게임을 한 결과 실제로 승률이 높았음을 밝혔다. 그는 블랙잭에서 처음에 공이 놓여지는 위치와 원판의 회전을 고려하여 최종적으로 공이 놓여질 위치를 확률적으로 계산한 후 그 확률에 따라 Kelly기준에 의한 투자비율 만큼을 지속적으로 투자한 결과 카지노의 딜러를 이길 수 있었다고 밝히고 있다. 최종적으로 공이 놓여질 위치를 계산하는 과정은 블랙잭 모형을 설치하여 반복적으로 실험을 통해 나온 결과였다. 즉, 사전에 승률을 알고 있다고 가정할 때 Kelly기준을 적용하여 투자함으로써 자본의 최적성장이 나오게 됨을 확신할 수 있게 되었다.

이후에 Thorp(2007)는 확률과정(stochastic process)을 가지는 주가가격을 대상으로 Kelly 기준에 의한 최적 투자 비중을 제시하였다. 주식 X 가 평균 m 과 분산 s^2 을 가지는 확률변수이고, 투자비율 f 를 제외한 금액은 무위험 이자율 r 로 투자된다고 할 때, 초기자금의 f 만큼을 투자한 후 기대되는 n 시점의 가치 V_n 을 최대화하기 위해서 V_n 의 로그수익률인 $g(f)$ 를 최대화 하는 과정을 통해 최적투자 비중은 $f^* = (m - r) / s^2$ 임을 제시하였다. 즉, 하나의 개별 주식을 투자할 때 그 주식 수익률이 로그정규분포 한다는 가정 하에서는 주식의 초과수익률의 기댓값을 분산으로 나눈 비율만큼을 투자하고 나머지는 무위험 자산에 투자하여야 한다는 것이다.

Kelly와 비슷한 시기에 Latane(1959)은 위험자산 선택에 있어서 다른 전략보다 최종적으로 부(wealth)를 최대화 할 수 있는 가능성이 가장 높

은 선택의 기준은 투자안의 기하수익률을 최대화 하는 것이라고 주장하였다. 특히 금융자산에 대한 투자의 경우 주식, 채권, 현금 등의 투자자산은 각각의 기대수익률과 위험의 정도가 다르고, 이 자산들의 배분은 시간의 경과에 따른 반복적인 선택의 연속이며 선택의 누적적인 결과를 목표로 할 수 있고 의사결정의 주요 요인과 기준을 결정할 수 있는 특성을 가지고 있기 때문에 최종적인 목표(goals)인 부(wealth)의 최대화를 위한 하위목표(subgoals)로서 기하수익률의 최대화가 적용 가능함을 주장하였다.

이어서 Latane & Tuttle(1967)은 Yule & Kendall(1950)이 제시한 기하수익률의 근사식을 이용하여, 기하수익률을 최대화하는 레버리지 비율을 유도하였다. 이에 대하여 Vince(1990)는 전통적인 CAPM에서 지배이론에 의한 효율적 투자선과 무위험 이자율과의 관계를 통해 제시되는 증권시장선(SML)이 선형으로 증가하지 않고 레버리지 비율이 일정수준 이상에서는 아래쪽으로 휘어진 모습을 나타낼 것이라는 의미로 해석하였다. 즉, 표준편차로 표시된 위험과 포트폴리오의 수익률 공간에서 위험이 작을 때에는 평균 기대수익률의 증가가 클수록 증권시장선이 증가하는 모습을 보이지만, 초과수익률이 위험의 제공값보다 작아지게 되면 적정레버리지 비율이 감소하므로 증권시장선이 우하향하게 된다는 것이다.

Hakansson(1971)은 MV모형을 다기간으로 확장하는 과정에서 각 단일기간의 MV모형에서 구해진 수익률의 평균복리수익률이 최대화되어야 최종적으로 부(wealth)를 최대화할 수 있으므로 궁극적으로는 GOP모형이 사용되어야 하며 이 점에서 MV모형이 GOP모형과 직접적인 관련이 있다고 주장하였다.

Hunt(2005)는 1972년부터 25년간의 다우산업지수(DJIA)에 포함된 종목을 대상으로 GOP모형을 활용한 실증분석을 시도하였다. 연구결과, 공매도를 허용하지 않은 경우 수익률은 연평균 수익률이 25.27% ~ 31.54%를 보였으며 공매도를 허용한 경우에는 - 88.48% ~ 1,158.72%에 이르는 결과를 나타냈다. 이로서 동일기간의 실제 다우존스산업지수의 수익률은

13.21% ~ 13.64%이고 MV전략에 의한 수익률이 - 0.3% ~ 6.52%임을 고려한다면 GOP모형이 우수한 전략이라고 주장하였다.

Truc Le et. al. (2006)은 1973년부터 2006년 까지 전 세계 104개의 주식섹터데이터를 이용하여 시장가격가중지수와 동일비중지수에 대비하여 GOP모형을 적용한 지수(world stock index, WSI)가 초과성과를 달성함을 보였으며 이때 사용된 로그수익률과 분산은 과거 1년 데이터를 연속적으로 사용함으로써 GOP모형의 극단적인 포트폴리오 비중 조정의 단점을 보완할 수 있으며 WSI가 분산포트폴리오이고 실무적으로 초과성과를 낼 수 있는 포트폴리오(enhanced portfolio)로 활용될 수 있음을 제안하였다.

Estrada(2009)은 미국주가지수(S&P500), 신흥국 주가지수¹⁾, 미국 10년 국채의 총수익지수, 금(gold), MSCI World Index²⁾의 월간 수익률을 대상으로 분석한 결과, GOP모형은 연평균기하수익률 13.0% ~ 14.4%으로 MV모형의 8.0% ~ 12.2% 대비 각 기간에서 모두 우월한 결과를 나타내었으며, 샤프비율(Sharpe's ratio)만을 비교하였을 때는 GOP모형이 열위하나, 특정 자산에 100% 투자하는 경우를 피하기 위하여 개별 자산의 투자비중을 최대 45%로 제약하여 나온 GOP모형은 수익률과 샤프비율에서 모두 MV모형보다 우월함을 보고하였다.

GOP모형에 관한 국내 연구로 김규태·정수희(2012)는 독립적인 두 주식의 기대수익률이 2배 상승과 50%하락으로 같을 때 투자자본의 기하평균수익률이 최대가 되게 하는 투자비율은 두 자산에 각각 50%씩 투자하는 것임을 Monte Carlo simulation을 통해 밝히고, 이것은 Kelly기준에 의한 최적 투자자본 배분율의 결과와 일치하므로 Kelly기준을 사용하는 것이 합당하다고 보고하였다.

1) EAFE: Europe, Australia and Far East.

2) MSCI: Morgan Stanley Capital International index.

III. 연구방법

1. GOP모형 관련 최적화 함수

r_t 는 두 시점 $(t-1, t)$ 의 주가가격(S)의 상승률로 가정할 때 $(S_t/S_{t-1} = 1 + r_t)$, n 회의 연속적인 투자의 최종 수익률은 다음과 같다.

$$\frac{S_1}{S_0} \frac{S_2}{S_1} \dots \frac{S_{n-1}}{S_{n-2}} \frac{S_n}{S_{n-1}} = (1+r_1)(1+r_2)\dots(1+r_{n-1})(1+r_n) \quad (\text{식1})$$

이때 n 회 투자의 평균수익률은 다음과 같이 기하평균값으로 표시할 수 있다.

$$\sqrt[n]{(1+r_1)(1+r_2)(1+r_3)\dots(1+r_{n-1})(1+r_n)} \quad (\text{식2})$$

이는 로그의 성질에 의해

$$\frac{\log(1+r_1) + \log(1+r_2) + \dots + \log(1+r_{n-1}) + \log(1+r_n)}{n} \quad (\text{식3})$$

으로 표시할 수 있다. 즉, 투자의 기하평균수익률은 로그 수익률의 기댓값이다. 따라서 투자의 기하평균수익률을 최대화하는 것은 로그 수익률의 기댓값을 최대화 하는 것이다.

Markowitz(1959)는 포트폴리오의 장기성장과 관련된 로그수익률의 기댓값에 대하여 다음 두 개의 근사식을 제시하였다.

$$E[\ln(1+r)] = E(r) - \frac{1}{2} \text{var}(r) - \frac{1}{2} [E(r)]^2 \quad (\text{식4})$$

$$E[\ln(1+r)] = \ln(1+E(r)) - \frac{1}{2} \frac{\text{var}(r)}{(1+E(r))^2} \quad (\text{식5})$$

Markowitz(1959)에 의하면 수익률의 범위가 $-30\% \sim 30\%$ 으로 크지 않고 $r \approx 0$ 인 경우의 근사식으로는 (식4)가 적합하며, 수익률의 범위를 고려하지 않고 $r = E(r)$ 인 경우는 (식5)가 적합하다고 언급하였고, 1937년부터 1953년까지 보통주 9종목³⁾의 실제 로그수익률과 비교하였을 때 (식5)가 (식4)보다 오차가 작음을 보였다.

(식4)와 (식5)는 포트폴리오관점에서 다음의 최적화 (식6)과 (식7)로 나타내어 수익률을 최적화하는 투자비중 w 를 각각 구할 수 있다.

$$w^T \mu - \frac{1}{2} w^T \Omega w - \frac{1}{2} [w^T \mu]^2 | w^T \mu = E(R_p), \sum_{(i=1)}^n w_i = 1 \quad (\text{식6})$$

$$\ln(1 + w^T \mu) - \frac{1}{2} \frac{w^T \Omega w}{(1 + w^T \mu)^2} | w^T \mu = E(R_p), \sum_{(i=1)}^n w_i = 1 \quad (\text{식7})$$

여기에서 μ 는 포트폴리오를 구성하는 개별 주식의 평균기대수익률, Ω 은 분산 공분산 행렬이며, w 는 개별 주식의 투자비중으로 $\sum_{(i=1)}^n w_i = 1$, w^T 는 w 의 전치행렬, 그리고 $E(R_p)$ 는 포트폴리오의 기대수익률로서 $E(R_p) = w^T \mu$ 이다.

본 연구에서는 Estrada(2003, 2009)와 같이 (식7)의 방식을 사용하여 최적성장포트폴리오의 투자비중을 구하여 결과를 비교하였다. 본 연구에서 사용한 최적화 도구는 R의 NloOptim 패키지이다.

3) American Tobacco, American Tel. & Tel., United States Steel, General Motors, Atchison Topeka & Santa Fe, Coca-Cola, Borden, Firestone, Sharon Steel.

IV. 실증분석결과

1. 데이터

본 연구에서는 FN-Guide⁴⁾에서 제공하는 2010년 7월부터 2019년 3월까지의 KOSPI200지수와 KOSPI200섹터지수의 일별 데이터를 사용하였다. 섹터지수의 기초통계량은 <표1>과 같으며, 무위험 수익률은 한국자산평가(주)⁵⁾에서 제공하는 통안채 1년 지수를 사용하였다⁶⁾.

<표1>에 의하면 분석기간 동안 KOSPI200지수의 누적수익률은 27.40%이다. 이를 구성하는 섹터 중에서는 헬스케어 섹터와 정보기술 섹터가 각각 95.06%와 69.12%의 높은 수익률을 보이며, 특히 정보기술 섹터의 경우 월별 수익률의 표준편차는 비교적 낮은편이다. 반면, 산업재와 중공업 섹터의 경우는 총수익률도 낮고 월평균 수익률도 낮으면서 특히 중공업 섹터는 표준편차도 높은 편이다. 이로써 기존 MV모델에서는 정보기술 섹터가 높은 투자비중을 차지하게 될 것으로 기대되고, 중공업 섹터는 낮은 투자비중을 차지하게 될 것임을 예상할 수 있다.

정보기술 섹터는 KOSPI200에서 차지하는 시가총액 비중이 자료의 기초에 28.21%이고 기말에 35.38%를 차지하고 있다. 비중이 가장 낮은 섹터는 건설로서 2.66%에서 2.75%를 차지하고 있다. 따라서 정보기술 섹터와 같이 높은 비중을 차지하는 섹터는 포트폴리오 구성의 이론적인 모형에서 반드시 고려해야 할 필요가 있다고 여겨진다.

Jarque Berra 검증에 의하면 철강소재, 에너지화학, 경기소비재, 산업재 섹터를 제외한 나머지 섹터와 KOSPI200의 월 수익률 자료가 유의수준 5%에서 정규분포를 따르고 있다.⁷⁾

4) <http://www.fnguide.com>

5) <http://www.koreaap.com>

6) 통안채 1년 총지수 수익률의 일일 기하평균 수익률은 0.00723%이고, 1년의 평균복리수익률은 $(1+0.00723\%)^{365} - 1 = 2.67\%$ 이다.

<표1> KOSPI200과 KOSPI200섹터지수의 기초통계량

총수익률은 2010.7.1. ~ 2019.3.31.의 수익률(단위, %)을 의미하며, 월평균수익률은 월 수익률의 평균값, 표준편차는 월 수익률의 표준편차이다. 비중(w)은 자료의 초말과 말일 기준 시가총액비중이다. J_B는 월별 수익률을 이용하여 계산된 Jarque-Berra 통계량이며 괄호안은 p-value이다.

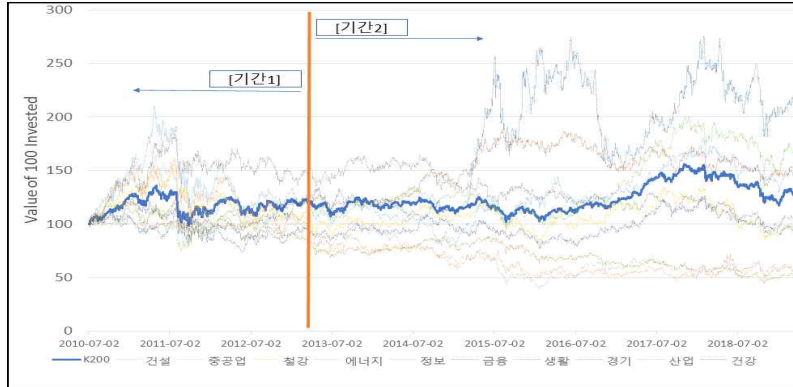
| 섹터 | 총수익률 | 월평균수익률 | 표준편차 | 비중(w) | | J_B |
|----------|--------|--------|------|-----------|-------|-----------------|
| | | | | 기말 | 기초 | |
| KOSPI200 | 27.40 | 0.31 | 4.01 | 100 | 100 | 1.72 (0.42) |
| 건설 | -43.65 | -0.25 | 7.74 | 2.75 | 2.66 | 2.40 (0.30) |
| 중공업 | -45.93 | -0.21 | 8.71 | 3.09 | 4.30 | 4.68 (0.09) |
| 철강소재 | -5.31 | 0.16 | 6.50 | 3.70 | 6.70 | 15.33 (0.00) |
| 에너지화학 | 41.51 | 0.61 | 7.45 | 9.89 | 8.34 | 32.10 (0.00) |
| 정보기술 | 69.12 | 0.62 | 4.76 | 35.38 | 28.21 | 2.12 (0.34) |
| 금융 | -7.16 | 0.06 | 5.18 | 11.75 | 11.72 | 0.73 (0.69) |
| 생활소비재 | 50.86 | 0.46 | 3.48 | 11.49 | 21.38 | 0.52 (0.76) |
| 경기소비재 | 4.16 | 0.16 | 4.94 | 12.63 | 9.69 | 7.94 (0.02) |
| 산업재 | -49.47 | -0.52 | 5.19 | 2.98 | 4.33 | 40.69 (0.00) |
| 헬스케어 | 95.06 | 0.97 | 8.19 | 6.34 | 2.68 | 3.53 (0.17) |

한편, <그림1>에서 확인되듯이 2015년부터 생활소비재, 헬스케어, 정보기술 섹터의 수익률이 상승하면서 전체 KOSPI200지수의 수익률을 견인하고 있는 모습이다. 반면 2015년 이전에는 모든 섹터의 수익률이 횡보하는 모습을 보이며 이로써 KOSPI200지수도 횡보하는 모습을 보이고 있다.

7) Markowitz(1959)는 로그수익률 최적화의 근사적인 (식4)와 (식5)가 현실을 잘 반영하기 위해서는 수익률이 정규분포에 가까워야 함을 전제로 하였다. 하지만 Hunt(2005)에 의하면 추가수익률의 정규성이 GOP에서 적용되는 가정일지라도 만일 GOP가 잘 적용되어 동일가중 수익률 등 다른 운용전략보다 높은 성과를 나타냈다면, GOP에서 정규성의 가정이 중요하지 않을 수 있다. 따라서 본 연구의 결과로서 <표1>에서와 같이 일부 섹터지수의 비정규성에도 불구하고 나타나는 GOP의 초과수익률은 Hunt(2005)와 일치한다고 할 수 있다.

<그림1>KOSPI200과 KOSPI200섹터지수의 수익률 추이

2010년 7월 1일부터 2019년 3월 31일까지 KOSPI200 각 섹터의 수익률을 나타낸다. 2010년 7월 1일을 100으로 환산하였으며, 굵은 실선은 KOSPI200지수 수익률이다.



본 연구에서는 평균과 분산의 추정 구간을 3개월에서 3년까지 변화하면서 분석하였다. 따라서 자료의 첫 3년 기간인 2013년 7월 이전 기간은 모수추정에 사용되는 최초 기간으로서 [기간1]로, 이후의 수익률 계산과 모수의 재추정이 이루어지는 기간은 [기간2]로 구분하여 표시하였다.

2. 모수추정기간별 초과수익률 분석 결과

<그림2>는 [기간2] 동안 평균과 분산의 추정기간을 3개월에서 36개월까지 변경해 가며 (식7)에 의해 계산된 투자 비중을 적용하여 나타난 GOP의 KOSPI200지수 대비 누적 초과수익률을 1개월부터 3개월까지 보유 기간에 따라 보여주고 있다. 이 때 적용된 섹터별 최대 비중은 기초와 기말 시장평균의 두 배를 적용하였고⁸⁾ 각 섹터에 대한 최저 투자비중은 0%로서 공매도를 고려하지 않은 결과이다.

8) <표1>에서 정보기술섹터의 시가총액 비중은 최대 35.38%를 차지하므로 만일 3배 이상을 상한으로 설정하게 되면 한 개의 섹터에 100%를 투자할 수 있게 되는 결과를 방지하기 위하여 2배로 제한하였다.

가로축 3에서 36까지의 변화는 섹터별 수익률의 평균과 분산을 구하는데 적용한 모수추정기간을 나타내며, 세로축은 GOP모형에 의한 비중으로 투자된 포트폴리오의 KOSPI200대비 초과수익률을 나타낸다.⁹⁾ 1개월 보유기간부터 3개월 보유기간으로 구분된 각 실선은 GOP모형으로 구해진 투자비중을 몇 개월 동안 유지하는가에 따른 수익률의 변화를 나타낸다. 즉, A점과 같이 가로축 9와 2개월 보유에 따른 세로축 상의 초과수익률 35.60%가 의미하는 바는 2013년 6월 이전 9개월간의 자료로 추정된 평균과 분산을 GOP모형에 적용하여 나온 투자비중으로 2013년 7월부터 2개월 간 투자한 다음, 2개월이 끝나는 시점에서 과거 9개월 자료로 비중을 구하고 다시 2개월을 투자하여, 이 작업을 데이터의 종료일까지 지속했을 경우의 KOSPI200대비 초과수익률이 35.60%가 달성되었다는 의미이며 이는 연평균 기하수익률으로 5.48%의 초과수익률이다.

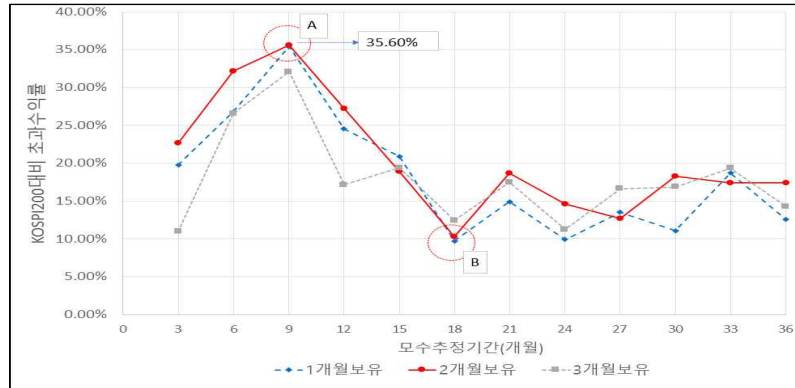
본 연구의 (식7)에서 평균기대수익률 $E(R_p) = w^T \mu$ 를 높이기 위해서는 평균수익률 μ 가 높은 섹터에 투자비중(w^T)이 높아야 한다는 것을 알 수 있다. 평균수익률 μ 는 과거 모수추정기간에 의존하게 된다. <그림2>에 의하면 모수추정기간이 18개월에서 27개월인 경우보다 3개월부터 15개월, 30개월부터 36개월인 경우 높은 초과수익률을 보이고 있다.

<그림2>와 같이 GOP모형에 의한 수익률이 KOSPI200 수익률 대비 높은 수익률을 보이는 결과에 대하여 초과수익률의 원천을 GOP모형의 우수성만으로 주장하기에는 한계가 있다. 특히 모수추정기간이 3개월에서 15개월인 1년 내외의 기간의 경우, 과거 기간 동안 수익률이 좋았던 섹터에 대한 투자비중을 높여 투자하는 GOP모형의 특성에 비추어 볼 때, 초과수익률의 원천을 시장의 비정상수익률과 관련한 주제 중의 하나인 모멘텀 효과로 볼 수도 있을 것이다. 즉, A점과 같이 과거 수익률이 높았던

9) 초과수익률 계산의 첫 시작일은 데이터의 시작일로부터 36개월 이후인 2013년 7월부터 계산하여 2019년 3월까지 [기간2] 동안 동일한 조건에서 비교된 초과수익률이다.

<그림2> 모수추정기간별 KOSPI200대비 초과수익률

모수추정기간을 3개월부터 36개월까지 변경하면서 각각의 경우에 대해 보유기간을 1개월에서 3개월까지 변경하였을 경우에 GOP 포트폴리오의 KOSPI200지수대비 초과수익률이 다. GOP 포트폴리오는 공매도를 가정하지 않은 경우이며, 섹터별 투자비중의 상한은 각 섹터의 시가총액비중의 2배를 넘지 않도록 통제하였다.



섹터에 대한 투자에서는 모멘텀 효과로 인해 초과수익률을 달성할 수 있으나, B점과 같이 18개월간 수익률이 높았던 섹터에 대한 투자는 역모멘텀 효과를 보인다고 해석할 수 있다. 따라서 GOP모형을 사용하기 위해서는 모멘텀 효과가 있는 기간의 모수로 추정된 값을 사용해야 하며, 만일 역모멘텀이 있는 기간의 모수로 추정된 값을 사용할 경우에는 수익률의 음의 효과를 가중시킬 가능성이 있으므로, GOP모형의 활용에서 모멘텀의 효과는 매우 중요한 요소임을 알 수 있다.

국내에서 모멘텀 효과에 최근의 연구는 1년 내외의 기간에서 모멘텀 효과가 있음을 주장하고 있으며(고승의(2015); 심명화(2018)), 본 연구의 결과도 이를 지지한다고 볼 수 있다.¹⁰⁾

10) 국내에서 모멘텀 효과에 대한 초기의 분석은 대부분 반대투자전략(역모멘텀 효과)이 양호한 성과를 보이는 것으로 보고되었다.(김병준(2008); 감형규(2011); 이명철(2011))

<그림2>에서 모수추정기간이 9개월인 경우 보유기간에 상관없이 가장 높은 초과수익률을 보이고, 3개월에서 36개월까지 총 12회의 모수추정기간에서 가장 수익률이 높았던 경우를 살펴보면 보유기간 1개월인 경우 1회, 2개월인 경우 8회, 3개월인 경우 3회였고, 수익률이 가장 낮은 경우가 보유기간 1개월인 경우 5회, 2개월인 경우 3회, 3개월인 경우 4회로 나타났다. 이에 따라 본 연구에서는 <그림2>의 A점인 모수추정기간 9개월, 보유기간이 2개월인 경우를 모멘텀 효과가 존재하며, GOP모형을 수행하기 위한 최적의 조건으로 가정하고 논의를 진행하였다.

3. 시장비중(market weight) 조정 GOP

GOP모형의 실증분석 결과는 대부분 투자수익률의 변동성이 매우 크며, 투자비중 w 가 각 추정기간에 따라 극단적인 변동을 보인다는 점이 단점으로 제시되었다(Hunt 2005, Truc Le & Platen 2006). 이에 대한 보완방법으로 GOP모형에 따른 결과의 비중을 부분적으로 적용하는 방식이 소개되었으며(Chin, 2006), stop-loss rule을 적용하는 방식(Nielsen, 2013), hyperbolic tangent 함수¹¹⁾를 적용하는 방식(Shonkwiler, 2013) 등의 시도가 있었다.

본 연구에서는 최적화 함수를 이용하여 투자비중을 구하는 첫 단계에서는 공매도를 허용하지 않은 조건에서 섹터별 최대 비중을 기초와 기말 시장평균의 두 배로 제한한 후 GOP모형에 적용하였고, 두 번째 단계로 GOP모형에 의한 투자비중과 각 시점의 시가총액비중의 중간값에 투자하는 것을 GOP_half로 표시하고 이를 GOP모형과 함께 분석을 진행하였다. 이로서 GOP의 유용성을 유지하면서도 시장의 비중을 고려한 방법으로 실증분석을 수행하였다.

11) $\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

4. 공매도 비율의 변화에 따른 효과 분석

GOP모형에서는 섹터에 대한 투자비중 w 를 구하기 위해 $0 < w < 1$ 의 가정에서 출발하지만 실증적으로 보면 $w < 0$ 인 경우가 다수 발견된다. 그러나 FN-Guide의 자료에 의하면 [기간2]동안 KOSPI200 섹터지수에 대한 공매도 비율은 10개 섹터를 모두 합하여도 일평균은 0.29%이며 가장 높았던 값은 2.81%로 낮은 수준이다. 이는 우리나라 금융제도 또는 거래비용과 수급을 감안할 때의 제약조건이 많기 때문으로 파악된다. 현실적으로는 공매도가 충분히 가능하다고 할 수 없다.

현실적 제약에도 불구하고, 본 연구에서는 공매도를 허용할 경우에 공매도의 허용 비중을 높여감에 따른 GOP모형에 따른 투자수익률의 변화를 살펴보았다. 공매도 비율은 각 섹터에 대해 허용한 공매도 비율이므로 어느 기간에 한 섹터에 공매도 비중만큼 다른 섹터의 투자 비중은 그만큼 확대됨을 의미한다.

<그림3>은 섹터의 최대투자비중을 시가총액의 6배로 제한하고¹²⁾, 모수 추정기간 9개월, 보유기간 2개월, GOP_half를 적용하였을 때 공매도비율의 변화에 따른 KOSPI200대비 초과수익률의 변화를 나타낸다. <그림3>을 살펴보면 공매도 비율이 37% 수준을 초과하면서 부터는 수익률의 증가가 크지 않고, 53%를 초과하면서 오히려 수익률의 감소현상이 나타난다. 이는 GOP모형에 의한 투자비중 결정에서는 모수추정기간과 보유기간 뿐만 아니라 적정 공매도 비율의 결정이 필요함을 시사하고 있다.

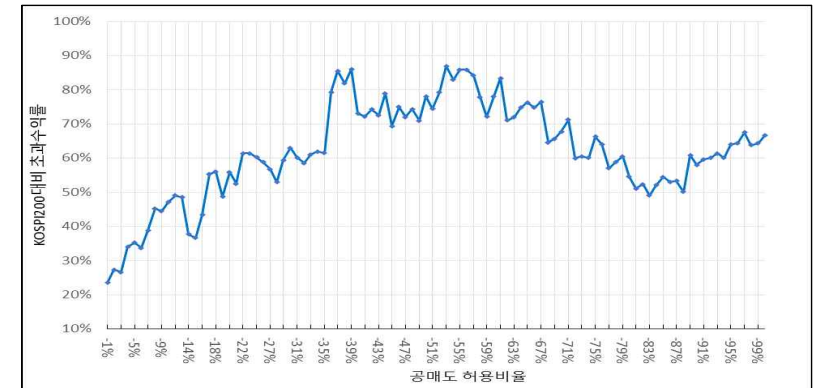
공매도 비율이 증가하면서 투자수익률이 증가하다가 일정수준 이상에

12) 예를 들어 <표1>의 정보기술섹터의 최대 시장비중이 35.38%일 때, 정보기술 섹터 외의 9개 섹터가 모두 100% 공매도 대상일 경우 정보기술 섹터에 대한 투자비중은 165.38%이다. 이는 최대 시가총액의 4.67배이다. 그러나 만일 건설섹터(시가총액 비중 2.67%) 외의 모든 섹터가 100% 공매도 대상일 경우 건설섹터는 102.67%의 투자가 가능해진다. 이는 시가총액의 38.45배이다. 본 연구에서는 이러한 비현실성을 줄이기 위하여 시가총액 비중을 늘려가며 테스트를 진행한 결과 모든 섹터의 시가총액 비중을 최소 6배로 제한 할 경우 100% 이내의 공매도 조건하에서도 GOP모형의 투자비중을 유지할 수 있었다.

서 부터는 체감하거나 감소한다는 것은 중요한 의미를 가진다. Kelly(1956)에서와 같이 승률에 대한 기댓값이 양의 값을 갖는다고 하더라도 투자 비중이 최적 수준을 초과하면서 부터는 기대수익률이 감소하는 것과 마찬가지로, 모멘텀 효과를 고려한 최적의 모수 추정기간과 보유기간을 찾았다고 하더라도 적정 공매도 허용 비율이 존재한다는 것을 의미하기 때문이다. 이는 증권시장선(SML)이 무위험 자산과 위험자산 간의 차입포트폴리오에 의해 선형으로 증가하지 않고 일정수준 이상에서는 아래쪽으로 휘어진 모습을 나타낼 것이라는 Vince(1990)의 해석을 지지한다고 볼 수 있다.

<그림3> 공매도비율과 초과수익률의 변화

모수추정기간 9개월 보유기간 2개월, GOP_half, 섹터 편입비중 최대한도는 시장비중의 6배로 정한 상태에서 섹터별 공매도에 대한 허용비율을 각 섹터별 시장비중의 0%에서 -100%로 증가시킬 때, 포트폴리오의 초과수익률이다.



5. GOP모형의 투자수익률과 성과분석

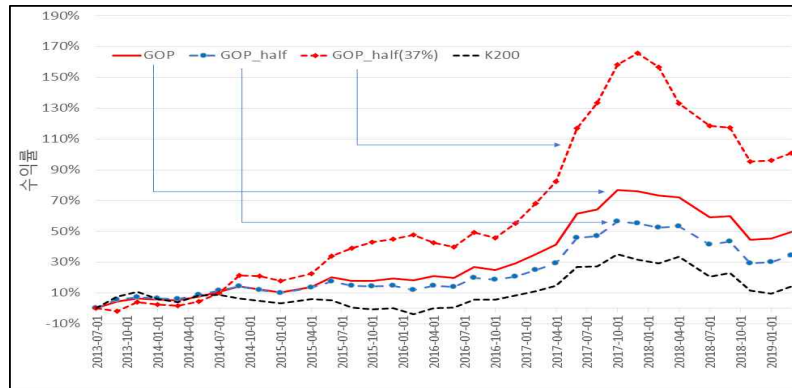
<그림4>는 모수추정기간 9개월, 보유기간 2개월인 경우 GOP와 GOP_half, 그리고 공매도 허용비율이 37%인 경우에 GOP_half의 누적수

익률의 추이를 나타낸다.

2013년 7월부터 2015년 이전까지 KOSPI200지수가 횡보하는 구간에서는 각 GOP모형의 수익률 간에 큰 차이를 보이지 않고 KOSPI200지수대비로도 큰 차이를 보이지 않는다. 이후 생활소비재, 헬스케어, 정보기술 섹터의 수익률이 상승하면서 전체 KOSPI200지수의 수익률을 견인하고 있는 구간에서는 초과수익률이 증가하고 있으며, GOP_half는 GOP수익률과 KOSPI200지수의 중간 수준의 수익률을 보이고 있다. 2015년 7월부터 2016년 1월까지 KOSPI200지수가 하락하는 구간에서 GOP와 GOP_half는 수익률이 횡보하고 있지만 GOP_half(37%)는 수익률이 상승하고 있는 데 이는 공매도의 효과로 보여진다. 2016년 10월 이후 각 GOP모형은 KOSPI200지수가 상승하는 국면에서 지수대비 초과수익률이 증가하였다.

<그림4> 누적투자수익률 추이

2013년 7월부터 2019년 3월까지 GOP, GOP_half, GOP_half(37%)의 누적수익률과 KOSPI200지수의 누적수익률추이이다. 모수추정기간 9개월, 보유기간 2개월의 조건은 동일하며, GOP와 GOP_half의 섹터 편입비중 최제한도는 시장비중의 2배이고 공매도를 고려하지 않은 결과이다. GOP_half(37%)는 섹터별 공매도를 시가총액의 37%까지 허용하였고, 섹터별 투자의 최제한도는 시장비중의 6배 이내로 제한하였다.



<표2>는 투자성적을 나타낸 표이다. [기간2]동안 KOSPI200 수익률은

14.23%이었다. <표2>에 의하면 GOP모형의 누적수익률은 49.83%, GOP_half의 누적수익률은 34.40%이다. 샤프비율로 비교해도 GOP모형이 GOP_half 보다 우수한 성과를 나타냈다. 그러나 GOP_half의 초과수익률은 20.16%로 GOP의 초과수익률인 35.60%의 절반인 17.80%보다 2.36%높은 초과수익률을 보이고 있다. 여기서 GOP모형이 각 섹터별 투자비중을 0%부터 해당 섹터 시장비중의 2배까지 허용한 반면, GOP_half는 GOP모형과 시장비중의 평균에 투자한 결과임을 고려할 때 GOP_half전략이 유용할 수 있음을 나타낸다. GOP_half에 37%공매도를 허용한 경우에는 누적수익률이 100.65%로서 KOSPI200 대비 86.41%의 초과수익률을 나타내고 있다. 표준편차는 3.04로 가장 높은 결과를 보이고, 샤프비율도 가장 높은 결과를 보이고 있는데 이는 변동성의 증가효과 보다 수익률의 상승 효과가 크기 때문이다. 그러나 여기에서도 높은 공매도 비율과 높은 섹터별 투자한도로 제약조건을 완화하였음을 고려하여 평가해야 한다.

<표2> 투자성과 비교

모수추정기간 9개월, 보유기간 2개월의 조건은 동일하며, GOP와 GOP_half의 섹터 편입 비중 최제한도는 시장비중의 2배이고 공매도를 고려하지 않은 결과이다. GOP_half(37%)는 섹터별 공매도를 시가총액의 37%까지 허용하였고, 섹터별 투자의 최제한도는 시장비중의 6배 이내로 제한하였다. 누적수익률은 [기간2]의 2013년 7월부터 2019년 3월까지 수익률을 구성하는 각 보유기간인 2개월 단위 수익률에 1/2을 곱한 값의 평균과 표준편차이다.

| 구분 | KOSPI200 | GOP | GOP_half | GOP_half(37%) |
|-------------|----------|--------|----------|---------------|
| 누적수익률 | 14.23% | 49.83% | 34.40% | 100.65% |
| 월평균수익률 | 0.25% | 0.66% | 0.49% | 1.15% |
| 표준편차 | 2.14% | 2.11% | 1.99% | 3.04% |
| 누적초과수익률 | - | 35.60% | 20.16% | 86.41% |
| 연평균초과수익률 | - | 5.48% | 3.27% | 11.52% |
| 월평균초과수익률 | - | 0.41% | 0.24% | 0.91% |
| 초과수익률의 표준편차 | - | 1.11% | 0.89% | 2.61% |
| 샤프비율 (연환산) | 0.10 | 0.58 | 0.40 | 0.80 |

다음의 <표3>은 포트폴리오의 월별 수익률을 종속변수로 하고 Fama-French(1993) 3요인과 모멘텀 요인을 독립변수로¹³⁾하여 회귀분석한 결과이다.

<표3>의 패널 A는 모수추정기간이 9개월인 경우이다. 성과요인분석에 의하면, GOP, GOP_half, GOP_half(37%) 모두에서 위험조정 초과수익률이 유의수준 5%에서 유의적인 양의 값으로 나타났다.¹⁴⁾ KOSPI200의 계수는 1 미만으로 GOP모형은 베타가 낮은 전략임을 보이고 있다. 모멘텀(momentum)의 계수는 모두 유의하지 않은 것으로 나타났다. 이는 GOP의 위험조정 초과수익률이 기존 Fama-French 3요인과 수익률 모멘텀 효과로 설명할 수 없는 새로운 형태의 모멘텀을 가지고 있음을 시사하고 있다.

한편 패널 B는 모수추정기간이 18개월인 경우로서 <그림2>의 B점에 해당하는 경우이다. 이 경우 각 GOP모형의 위험조정 초과수익률은 패널 A보다 작게 나타나고 있으며 유의수준 5%에서 유의적이지 못한 값이다. 이는 GOP모형의 위험조정 초과수익률의 유의성은 최적 모수 추정 기간에 대해서만 성립하며, 최적 모수 추정기간이 아닌 경우 GOP에 의한 모멘텀 효과는 유효하지 않음을 시사한다.

13) KOSPI200종목을 대상으로 한국펀드평가에서 제공한 SMB, HML자료를 사용하였으며, Momentum 자료는 거래소에 상장된 전체 종목을 대상으로 FN_Guide에서 제공하는 자료를 사용하였다. 한국펀드평가에서는 KOSPI200종목만을 대상으로 하는 Momentum자료를 제공하지 않고 있고, FN_Guide에서는 KOSPI200만을 대상으로 하는 SMB와 HML자료를 제공하지 않고 있다.

14) 공매도가 있는 GOP_half(37%)에서 위험조정 초과수익률이 가장 큰 값을 보이고 있으나 Fama-French의 3요인과 모멘텀효과로 통제된 모형(6)의 경우에서 유의수준 5%에서 유의하지 않은 것으로 나타나고 있다. 하지만 유의하지 않은 요인인 SMB, HML과 Momentum을 제거한 모형(7)에서는 유의하게 나타나고 있다.

<표3> 투자수익률의 성과요인 분석

<표2>의 GOP, GOP_half, GOP_half(37%)의 월별수익률을 종속변수로하고 Fama-French의 3요인과 모멘텀요인이 독립변수인 시계열 회귀분석의 결과이며 회귀모형식은 다음과 같다. 여기서 R_{it} 는 포트폴리오의 t 월 수익률이고 SMB 는 기업규모효과, HML 은 시장가치대비 장부가치효과이다.

$$R_{it} = \alpha + \beta_1 KOSPI200_{it} + \beta_2 SMB_{it} + \beta_3 HML_{it} + \beta_4 Momentum_{it}$$

회귀계수 추정치는 백분율이고 []안 숫자는 p-value이다.

패널 A: 모수추정기간 9개월

| 모형 | GOP | | GOP_half | | GOP_half(37%) | |
|-----------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| | (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) |
| α | 1.02 (0.020) | 0.89 (0.024) | 0.79 (0.014) | 0.55 (0.067) | 1.71 (0.107) | 1.94 (0.044) |
| β_1 | 88.42 (0.000) | 85.27 (0.000) | 89.59 (0.000) | 84.77 (0.000) | 71.50 (0.004) | 72.86 (0.002) |
| β_2 | 8.45 (0.349) | | 11.01 (0.102) | | -0.84 (0.969) | |
| β_3 | 2.62 (0.775) | | 5.84 (0.391) | | -3.97 (0.861) | |
| β_4 | 9.21 (0.214) | | 6.06 (0.265) | | 27.93 (0.130) | |

패널 B: 모수추정기간 18개월

| 모형 | GOP | | GOP_half | | GOP_half(37%) | |
|-----------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| | (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) |
| α | 0.35 (0.362) | 0.34 (0.340) | 0.46 (0.127) | 0.28 (0.327) | 0.42 (0.107) | 0.48 (0.208) |
| β_1 | 81.78 (0.000) | 80.21 (0.000) | 86.27 (0.000) | 82.25 (0.000) | 75.65 (0.000) | 75.16 (0.000) |
| β_2 | 11.08 (0.187) | | 12.33 (0.062) | | 5.32 (0.542) | |
| β_3 | -5.24 (0.538) | | 1.90 (0.770) | | -3.46 (0.699) | |
| β_4 | 11.17 (0.106) | | 7.04 (0.181) | | 12.79 (0.080) | |

V. 요약 및 결론

본 논문에서는 우리나라 KOSPI200의 섹터 지수의 2010년 7월부터 2019년 3월까지 자료를 GOP모형에 적용하여 최적성장포트폴리오를 구성하고 운용성과를 비교하는 실증분석을 진행하였다. GOP모형은 평균 기하수익률을 최대화 하는 투자전략인데 본 연구에서는 Markowitz(1959)가 제시한 기하수익률 최적화 식을 이용하였다.

GOP모형으로 투자비중을 구하기 위해 필요한 평균과 분산을 추정하는데 필요한 모수추정기간의 선택, 결정된 투자 비중으로 얼마나 투자한 후 재조정(리밸런싱)하는가의 보유 기간의 선택, 그리고 현실적으로 KOSPI200 각 섹터의 시가총액을 얼마나 고려하여 투자비중의 상한과 하한을 결정하는가에 따라 GOP모형의 성과는 다르게 나타났다. 본 연구에서는 단기 모멘텀 효과를 고려한 최적 모수추정기간으로 9개월, 보유 기간은 2개월을 선택하였다. 투자비중의 상한은 시가총액의 2배로 제한한 경우와(GOP), 이 때 계산된 GOP모형의 투자비중을 시가총액과 평균하여 사용한 (GOP_half) 결과를 비교하였으며, 공매도의 효과를 분석하였다.

본 연구의 결과는 첫째, 기하 평균 수익률을 최대화하는 GOP모형에 의한 수익률은 KOSPI200 수익률 대비 양의 초과 누적 수익률을 나타내었으며, 둘째, GOP를 구성하기 위해 선택된 최적의 모수추정기간은 9개월, 보유 기간은 2개월로 나타나 모멘텀 현상이 유의함을 발견하였다. 셋째, 최적의 모수추정기간과 보유 기간 및 각 섹터의 투자 한도 조건 내에서 구한 GOP 수익률은 Fama-French의 3요인과 시장 모멘텀 효과를 통제 한 후에도 양의 유의적인 위험조정 초과수익률을 보여주었다. 넷째, 최적의 조건하에서도 공매도 비율의 증가가 일정수준 이상에서는 수익률에 음의 효과를 나타내었다.

본 연구의 결과가 시사하는 바는 첫째, 사뮤엘슨(1971)은 GOP모형의 실증분석 결과에 대하여 높은 수익률이 나타났다는 것이 '단지 그러한 자료를 사용했기 때문'이라고 지적하였지만, 본 연구의 결과에 의하면 GOP

모형이 어떠한 경우에도 적용될 수 있는 모형은 아니라고 하더라도, 모멘텀 효과와 같은 주식시장의 특성을 고려하여 적용된다면 Larson(1986)의 주장과 같이 GOP모형이 우월한 전략일 수 있다는 점과, 둘째, 단기 모멘텀 효과를 고려한 최적의 조건하에서도 일정수준 이상으로 공매도 비율을 계속 확대할 때 오히려 수익률이 하락함을 발견하였는데, 이는 단순한 Kelly(1956)에서와 같이 투자 비중이 최적 수준을 초과하면서 부터는 기대수익률이 감소하는 것과 마찬가지로, 증권시장선(SML)이 차입포트폴리오에 의해 선형으로 증가하지 않고 레버리지 비율이 일정수준 이상에서는 아래쪽으로 휘어진 모습을 나타낼 것이라는 Vince(1990)의 해석을 지지한다고 볼 수 있다는 점이다.

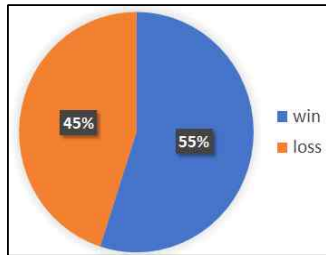
본 연구에서 GOP 모형을 이용하여 포트폴리오를 구성하는 조건을 선정하는데 있어 너무나 많은 경우의 수가 있었기 때문에 각 경우의 결과를 모두 설명하는데 한계가 있었다. 향후 시계열의 상관성, 변동성의 군집성(조건부 변동성) 및 거래비용, 유동성의 제약 등의 문제를 깊게 분석한다면 GOP 이론은 더욱 정교하게 발전될 수 있을 것이다.

[부록] Kelly 기준

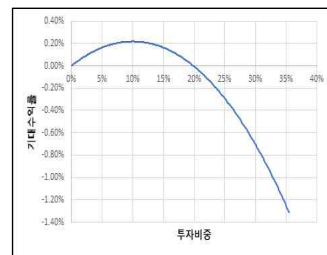
Kelly(1956)는 야구경기 결과에 대한 도박게임에서 베팅하는 예를 들어서 설명하였는데 여기에서는 같은 내용이지만 원판돌리기의 예를 통하여 설명해보고자 한다.

다음 [그림 1]에서와 같은 원판에 다트를 던져 맞추는 게임을 한다고 가정하자. 55%의 확률로 베팅한 금액의 100%를 얻을 수 있는 반면, 나머지 45%의 확률로 베팅한 금액을 모두 잃는 게임이다. 이 게임은 무한히 반복할 수 있으며 초기의 투자금은 고정되어 있다.

[그림 1]



[그림 2]



V_0 은 초기자금, V_n 은 n 번 게임을 한 이후의 자금이고 f 는 각 게임에 베팅하는 투자비율이라고 할 때, 첫 번째 게임에서 승리를 하고 n 번째까지 계속 승리한다면 n 번째 자금 $V_n = V_0 \times (1+f)^n$ 이고 반대로 n 회의 게임에서 계속 패배를 할 경우의 n 번째 자금 $V_n = V_0 \times (1-f)^n$ 이다.

투자비율 f 는 초기투자금액대비 베팅 금액의 비율로서 만일 투자금액이 1일 때 20%의 자금을 계속 복리로 투자하여 10번을 승리만 하였을 때 얻을 수 있는 $n=10$ 시점의 가치는 $(1+0.2)^{10} \approx 6.19$ 가 된다.

승리회수를 W , 패배회수를 L 이라고 할 때 n 번째 자금 V_n 은

$V_n = V_0 \times (1+f)^W (1-f)^L$ 이고, 이때 초기자금 V_0 대비 n 시점의 자금 V_n 은 게임에 의한 총 수익률이라고 할 수 있으므로 총수익률은 $V_n/V_0 = (1+f)^W (1-f)^L$ 이며, 양변에 로그를 취하면, $\ln(V_n/V_0) = W \ln(1+f) + L \ln(1-f)$ 이다. 여기에서 평균 투자수익률을 구하기 위해 양변을 투자횟수 n 으로 나누고 게임을 무한히 반복한다면 평균 투자수익률은 다음과 같다.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \ln(V_n/V_0) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{W}{n} \ln(1+f) + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L}{n} \ln(1-f) \quad \text{----- (식A1)}$$

여기서 평균투자수익률을 $g(f)$, $W/n=p$ 는 승률, $L/n=q=1-p$ 는 패배율로 정의하면 $g(f) = p \times \ln(1+f) + q \times \ln(1-f)$ 이다. 여기에서 평균투자수익률을 최대화하는 f 를 구하기 위하여 $g(f)$ 를 미분하고 그 값이 0이 되도록 하는 최적 투자비율 f^* 를 구하면,

$$g'(f) = \frac{p}{(1+f)} - \frac{q}{(1-f)} = 0 \quad \text{----- (식A2)}$$

$$\frac{p}{(1+f)} - \frac{(1-p)}{(1-f)} = 2p - 1 - f = 0 \quad \text{----- (식A3)}$$

이므로 최적투자비율 $f^* = 2p - 1$ 이다. 즉, 55%의 확률로 이길 수 있을 때 베팅 비율은 $2 \times 0.55 - 1 = 0.1$ 이며 이와 같은 결과가 의미하는 바는 가진 돈의 10%를 베팅하는 것이 이 게임을 지속적할 때 최대의 수익률을 달성할 수 있게 하는 베팅비율인 것이다. 위 [그림 2와] 같이 투자비율을 20% 이상 가져가게 되면 이 게임을 계속 할 때 결과적으로 손실을 볼 확률이 높아진다. 각 게임에서 이길 확률은 55대 45로 높았지만 투자 비율에 따라 장기적으로 손실을 볼 수도 있음을 보여주고 있다.

[참고문헌]

김형규, 신용재, “모멘텀효과를 이용한 투자전략의 성과에 관한 연구”, 「기업경영연구」, 제 18권 제 1호, 2011.3, 265-278

고승의, “한국 주식시장에서의 융합적 모멘텀 투자전략”, 「한국융합학회논문지」, 2015, 127-132

김규태, 정수희, “Kelly 기준을 이용한 투자자본 배분문제”, 「Journal of the Korea Management Engineers Society」, Vol. 17 No. 1, 2012. 3., 39-51

김병준, 정호정, “한국 주식 수익률의 장기 반전현상에 관한 연구”, 「재무연구」 제21권 제2호, 2008.7

심명화, “주식시장의 순위모멘텀 전략”, 「재무연구」, 제31권 제1호, 2018.2

David Carl Larson, “Growth Optimal Investment Strategies”, *Stanford university*, March, 1986

Fama, E. F. and K. R. French, “Common Risk Factors in the Returns on Stocks and Bonds”, *Journal of Financial Economics*, Vol. 33, No. 1, 1993

Harry M. Markowitz, “Portfolio Selection: Efficient diversification of investment”, *Cowles Foundation for Research in Economics at Yale University*, 1959

Henry Allen Latané, “Criteria for Choice Among Risky Ventures”, *Journal of Political Economy*, Vol. 67, No. 2 1959.4, 144-155

Henry Latané and Donald Tuttle, “Criteria for Portfolio Building”, *Journal of finance*, 22,1967.9, 362-363

Hunt, “Feasible high growth investment strategy: Growth optimal portfolios applied to Dow Jones stocks”, *Journal of Asset Management*, Vol. 6, 2, 2005, 141 - 157

Javier Estrada, “Geometric Mean Maximization: An Overlooked Portfolio Approach?”, *IESE Business School*, 2009

J.L.Kelly, “A New Interpretation of Information Rate” *Bell System Technical Journal* 35, 1956, 917-926

Nils H. Hakansson, “Multi-Period Mean-Variance Analysis: Toward a General Theory of Portfolio Choice”, *The Journal of Finance*, Vol. 26, No. 4, 1971.9, 857-884

Rafael De Santiago and Javier Estrada, “Geometric Mean Maximization: Expected, Observed, and Simulated Performance”, *The Journal of Investing*, 2003

Ralph Vince, “Portfolio Management formulas: Mathematical Trading Method for Futures, Options, and Stock Markets”, *Wiley Finance Editions*, 1990.

Samuelson, P. A., “The fallacy of maximizing the geometric mean in long sequences of investing or gambling”, *Proceedings National Acad. Sciences USA* 68, 1971, 2493 - 2496.

Thorp, E. O., “Beat the dealers: A winning strategy for the Game

of twenty-one". *Vintage Books Edition*, 1966

Thorp, E. O. (2007), "The Kelly Criterion in Blackjack, Sports Betting, and the Stock Market", in Proceedings of 10th International Conference on Gambling and Risk Taking, in <http://www.bjmath.com/bjmath/>

Truc Le and Eckhard Platen, "Approximating the Growth Optimal Portfolio with a diversified world stock index", *The Journal of Risk Finance*, Vol. 7 No.5, 2006, 559-574

William Chin, Mark Ingenoso, "Risk Formula for Proportional Betting", 2006, *Department of Mathematical Sciences DePaul University*

Yule and Kendall, "An Introduction to the theory of Statistics", 14th ed, 1950, 150

[ABSTRACT]

Application of Growth Optimal Portfolio: Using KOSPI200 Sector Indices

Lee, Jeong Ho*, Lee, Yong Woong**

This study applied the GOP(growth optimal portfolio) model to Korea's KOSPI200 sector indices to form a portfolio and analyze the performance. Data from July 2010 to March 2019 were used, and the weight of investment was obtained using the geometric mean maximization equation presented by Markowitz. The main results are as follows. First, the return of GOP provided an excess cumulative return over the KOSPI200 return. Second, the optimal parameter estimation period (9 months) and holding period (2 months) was chosen to form the GOP and that showed momentum phenomenon was significant. Third, the return of GOP obtained within the optimal parameter estimation period, holding period and investment limit conditions for each sector showed a significant risk-adjusted excess return even after controlling the three factors model of Fama-French and market momentum effects. Fourth, even under optimal conditions, the increase in the short sale ratio represents a negative effect on returns above a certain level, and the result is that the stock market line (SML) does not increase linearly with the ratio of leverage, but curves downward at a certain level or above.

Key words: GOP, Kelly criterion, momentum effect, short sale, Fama-French 3 factor model

* First Author/corresponding author, 107, Imun-ro, Dongdaemun-gu, Seoul 02450, Hankuk University of Foreign Studies;

E-mail: kowave00@naver.com; Tel: 02-3770-1329

** Co-Author, Professor, Dept. of International Finance; 81, Oedae-ro, Mohyeon-eup, Cheoin-gu, Yongin-si, Gyeonggi-do, 17035 Hufs; E-mail: ywlee@hufs.ac.kr; Tel: 031-330-4516